МОЛОДІ ВЧЕНІ

doi: 10.15407/visn2015.09.080

КАРПЕЛЬ
Олена Михайлівна —
кандидат фізико-математичних наук, науковий співробітник Фізико-технічного інституту низьких температур ім. Б.І. Вєркіна НАН України,
helen.karpel@gmail.com

УДК 517.987.5

ІНВАРІАНТНІ МІРИ НА ДІАГРАМАХ БРАТТЕЛІ

За матеріалами наукового повідомлення на засіданні Президії НАН України 17 червня 2015 року

Результати, висвітлені у доповіді, присвячено проблемі класифікації канторівських динамічних систем з точністю до орбітальної еквівалентності. Ключову роль у такій класифікації відіграє дослідження інваріантних мір для цих динамічних систем. Наведено повну класифікацію широкого класу як скінченних, так і нескінченних борелівських мір на канторівських просторах. Зокрема, отримано повну класифікацію ергодичних мір, інваріантних для аперіодичних підстановочних динамічних систем. Такі міри є інваріантними для кофінального відношення еквівалентності на просторах шляхів стаціонарних діаграм Браттелі. Досліджено структуру ергодичних мір на просторі шляхів довільної діаграми Браттелі, зокрема, знайдено опис піддіаграм, які є носіями скінченних ергодичних інваріантних мір. Ці результати є суттєвим кроком на шляху вирішення відкритого питання щодо класифікації канторівських аперіодичних динамічних систем з точністю до орбітальної еквівалентності.

***Ключові слова*:** канторівська динамічна система, ергодична інваріантна міра, діаграма Браттелі, орбітальна еквівалентність.

Вступ

Класична математична теорія динамічних систем виникла з ньютонової механіки в другій половині XVII ст. при вивченні рухів планет Сонячної системи. Ця теорія розвивалася впродовж XVIII і XIX ст. Засновником сучасної теорії динамічних систем вважають А. Пуанкаре, який наприкінці XIX ст. написав книгу «Нові методи небесної механіки». Наразі теорія динамічних систем є однією з важливих галузей математики, вона бурхливо розвивається і має численні застосування в різноманітних сферах науки. Наприклад, за допомогою цієї теорії моделюють фізичні процеси, які виникають, зокрема, у класичній механіці та термодинаміці, у біології при вивченні змін чисельності популяцій тварин, у хімії, метеорології, економіці, соціології тощо. При цьому вивчають якісну поведінку системи та її еволюцію з плином часу.

Будь-яка динамічна система складається з трьох елементів: фазового простору, точками якого є всі можливі стани системи, часу та закону, за яким система змінюється у часі. Зазвичай дуже важко відстежити траєкторію кожної конкретної точки в системі, але часто можливо описати якісну поведінку системи в цілому. Наприклад, рух планет сонячної системи є майже періодичним: для будь-якого початкового стану, система буде постійно повертатися в довільно малий окіл цього стану. Такі системи називають мінімальними. Термодинамічні системи демонструють іншу поведінку: ізольована термодинамічна система наближується до стану рівноваги. Цей стан називають атрактором, оскільки він притягує до себе траєкторії всіх точок. Відкрита термодинамічна система може мати цілу циклічну динамічну підсистему як атрактор. У метеорології є системи, що мають складну хаотичну поведінку (рис. 1).

З огляду на таку різноманітність у поведінці динамічних систем, природним чином постає завдання класифікації та систематизації отриманих результатів досліджень. У цьому допомагає такий розділ теорії динамічних систем, як ***символічна динаміка***. Вперше символічна динаміка виникла в роботах М. Морса і Г. Хедлунда [1, 2] в першій половині ХХ ст. як метод вивчення довільних динамічних систем шляхом кодування траєкторій точок. У подальшому методи цієї теорії широко застосовували в інших галузях математики, зокрема в лінійній алгебрі, в теорії зберігання та кодування даних тощо. Також символічні системи, а саме, підстановочні динамічні системи, виникають у фізиці при вивченні спектра дискретного оператора Шредингера для моделювання електронних властивостей квазікристалів, за відкриття яких у 2011 р. видатний фізик і хімік Д. Шехтман отримав Нобелівську премію з хімії. Отже, символічна динамічна система є універсальною: будь-яку довільну динамічну систему можна розглядати як символічну. Таким чином, ключовим є питання класифікації символічних систем.

Фазовий простір символічних динамічних систем складається з нескінченних послідовностей символів, наприклад з усіх послідовностей, що складаються з нулів та одиниць. Найчастіше фазовий простір є канторівською множиною, тобто символічні динамічні системи є канторівськими. Є багато еквівалентних реалізацій канторівської множини. Залежно від ситуації зручно використовувати ту чи іншу реалізацію. Наприклад, згадана вище множина всіх нескінченних послідовностей з символів {0,1} є канторівською. Іншу реалізацію канторівської множини, яку винайшов Г. Кантор у XIX ст., називають стандартною. У просторі її можна отримати шляхом поступового викидання точок з одиничного куба (рис. 2). Канторівська множина являє собою континуум точок, що є цілком незв'язним, і нагадує пил. Її часто називають канторівським пилом. Ще однією реалізацією канторівської множини, яку використовують у математичній фізиці, є множина p-адичних чисел.

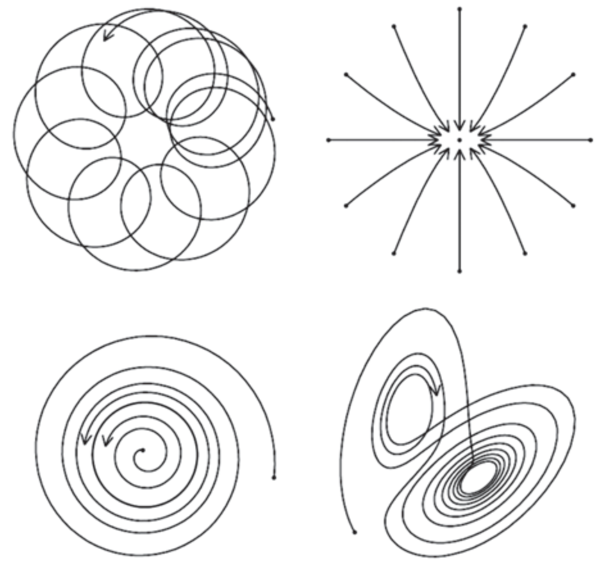

Рис. 1. Приклади якісної поведінки динамічних систем: мінімальні системи, точка-атрактор, цикл-атрактор, хаотична поведінка

Діаграми Браттелі та класифікація канторівських динамічних систем

У дослідженнях, що проводилися разом з колегами з України та Польщі, використовується

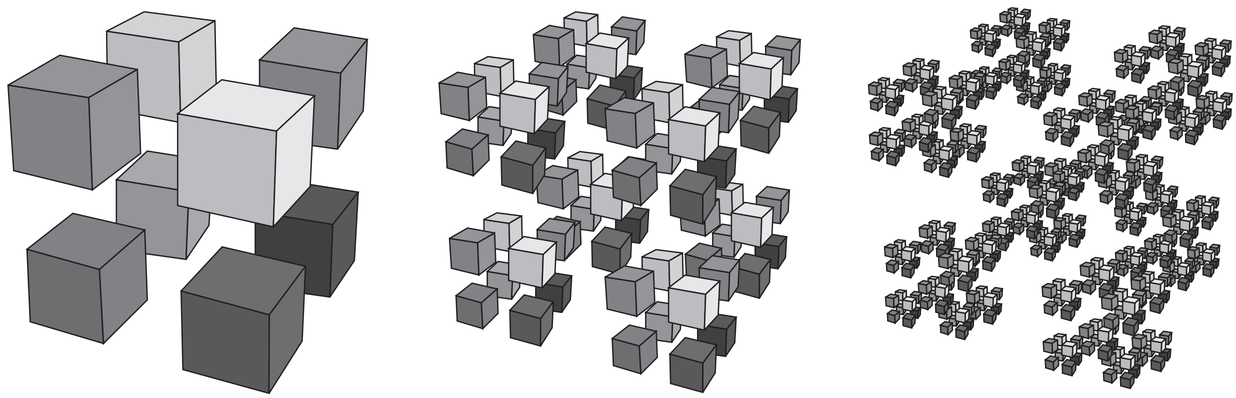

Рис. 2. Канторівський пил

модель канторівської множини, яку називають ***діаграмою Браттелі***. Цю модель широко застосовують при вивченні динамічних систем [3—5]. Діаграма Браттелі є нескінченним графом, у якому множина вершин розбита на нескінченну кількість рівнів, на кожному рівні знаходиться скінченна кількість вершин (рис. 3). Простір нескінченних шляхів діаграми Браттелі, що починаються з верхньої вершини V_0, є канторівською множиною.

Нескінченні графи, які пізніше було названо діаграмами Браттелі, вперше виникли в 1972 р. у відомій роботі О. Браттелі [6], присвяченій класифікації операторних алгебр. У 80-х роках XX ст. А. Вершик [7] зробив значний крок у вивченні динамічних систем, увівши перетворення на цих графах, яке пізніше було названо перетворенням Вершика. Виявилося, що отримана динамічна система Браттелі—Вершика моделює широкий клас канторівських динамічних систем. А саме, будь-який мінімальний і навіть аперіодичний гомеоморфізм канторівської множини можна реалізувати як перетворення Вершика на діаграмі Браттелі. Зазначимо, що для мінімальних систем цей результат було отримано у роботі Р. Хермана, Є. Патнама та К. Скау в 1992 р. [8], тоді як для немінімальних аперіодичних систем відповідну реалізацію було одержано лише у 2006 р. у роботі К. Мединця [9].

Для класифікації канторівських динамічних систем ключову роль відіграє класифікація відповідних інваріантних мір з точністю до гомеоморфізму (топологічної еквівалентності). Наразі існує критерій орбітальної еквівалентності для мінімальних динамічних систем. Разом з іншими важливими результатами його було отримано у роботі Т. Жордано, Є. Патнама і К. Скау в 1995 р. [10]. При його формулюванні використовують гомеоморфність інваріантних мір. Питання про класифікацію немінімальних аперіодичних динамічних систем досі залишається відкритим. У моїх роботах разом зі співавтором С. Безуглим досліджено класифікацію мір на канторівських множинах, інваріантних для немінімальних динамічних систем [11, 12]. Зокрема, докладно вивчено випадок мір, інваріантних для підстановочних динамічних систем. Використовується той факт, що такі міри є інваріантними для кофінального відношення еквівалентності на просторі шляхів стаціонарних діаграм Браттелі. Цей зв'язок доведено для мінімальних систем у роботі Ф. Дюрана, Б. Хоста та К. Скау [13], а для немінімальних аперіодичних — у роботі С. Безуглого, Я. Квятковського та К. Мединця [14].

Реалізація гомеоморфізму як перетворення Вершика на діаграмі Браттелі дає змогу ефективно розраховувати значення мір на різноманітних множинах, що відіграє основну роль при класифікації мір. Зазначимо, що проблема класифікації борелівських мір на топологічних просторах сама по собі є важливою та актуальною, вона ставилася ще в статтях відомих математиків Дж. Окстобі та С. Улама у 1941 р. [15]. Їх результати були узагальнені на випадки різних зв'язних многовидів (наприклад, [16]). У 1999 р. І. Ейкін [17] розпочав систематичне вивчення гомеоморфних мір на канторівських множинах. Проблема класифікації мір на канторівських множинах розглядалася в численних роботах починаючи з 1979 р. [18—20], але вивчалися лише ймовірнісні міри, до того ж переважна більшість результатів стосувалася випадку мір Бернуллі.

На відміну від випадку мінімальних систем, для аперіодичних динамічних систем виникають нескінченні борелівські міри як інваріантні міри. У моїй роботі [12] вперше розглянуто класифікацію нескінченних борелівських мір на канторівських просторах відносно гомеоморфізмів. Введено і досліджено поняття нескінченної недефектної міри, для класу нескінченних недефектних мір знайдено необхідні й достатні умови для гомеоморфності. Доведено, що існує континуум попарно негомеоморфних нескінченних недефектних мір на канторівському просторі. У статті [21] узагальнено класифікацію мір на випадок некомпактного локально компактного канторівського простору, проведено класифікацію як скінченних, так і нескінченних мір на некомпактних канторівських множинах. Прикладом такої множини є множина всіх p-адичних чисел, тоді як множина цілих p-адичних чисел є компактною канторівською множиною.

У роботі [22] разом зі співавтором С. Безуглим докладно вивчено клас орбітальної еквівалентності для підстановочних динамічних систем. Зокрема, побудовано нескінченний клас орбітальної еквівалентності серед класу мінімальних підстановочних динамічних систем. Для побудови такого класу використано апарат діаграм Браттелі, а також методи символічної динаміки, зокрема, знайдено оцінки для функції складності символьних послідовностей, що виникають у підстановочних динамічних системах.

У роботах [23, 24] разом із колегами з Польщі та України досліджено структуру інваріантних мір на просторі шляхів довільних діаграм Браттелі, зокрема, знайдено опис піддіаграм, які є носіями скінченних ергодичних інваріантних мір, також наведено деякі оцінки на кількість ергодичних інваріантних мір для широкого класу діаграм Браттелі. Ергодичні міри є крайніми точками у симплексі інваріантних мір, їх дослідження є вирішальним для вивчення довільних інваріантних мір. Ці результати є суттєвим кроком на шляху класифікації мір, інваріантних відносно аперіодичних гомеоморфізмів канторівських просторів.

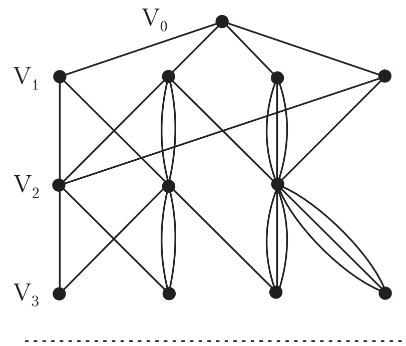

Рис. 3. Діаграма Браттелі

У подальшому планується дослідити застосування діаграм Браттелі в теорії мереж живлення, зокрема електричних мереж, наразі це питання обговорюється з колегами із США та Канади. Також планується дослідити ймовірнісні процеси на діаграмах Браттелі і застосувати отриману класифікацію для мір Маркова (перші кроки в цьому напрямі зроблено в роботі С. Безуглого та П. Йоргенсена [25]). Передбачається застосувати отримані результати в теорії графів та в теорії C^*-алгебр. Методи переходу від мір на канторівських просторах до слідів на C^*-алгебрах досліджено в роботі С. Безуглого та Д. Хандельмана [26]. Крім того, планується покращити результати, отримані в статті [24], і знайти більш точні оцінки на кількість ергодичних інваріантних мір для широкого класу діаграм Браттелі, використовуючи дослідження зі структури інваріантних мір на просторі шляхів довільних діаграм Браттелі, отримані в роботах [23, 24].

Висновки

Проведено класифікацію борелівських скінченних та нескінченних мір на компактних, а також на некомпактних локально компактних канторівських просторах. Випадок нескінченних мір, а також мір на некомпактних локально компактних канторівських просторах розглядається вперше, що істотно розширює проведені раніше дослідження. Досліджено клас орбітальної еквівалентності для підстановочних динамічних систем та структуру інваріантних мір на просторі шляхів довільних діаграм Браттелі. Отримано такі нові результати:

1. Знайдено необхідні й достатні умови для топологічної еквівалентності для класу ймовірнісних та нескінченних ергодичних мір, інваріантних відносно гомеоморфізмів, заданих аперіодичними підстановочними динамічними системами.

2. Отримано критерій гомеоморфності для класу нескінченних мір на компактному канторівському просторі, а також на некомпактному локально компактному канторівському просторі.

3. Побудовано нескінченний клас орбітальної еквівалентності в класі підстановочних динамічних систем.

4. Досліджено структуру ергодичних мір на просторі шляхів довільних діаграм Браттелі, зокрема, знайдено опис піддіаграм, які є носіями скінченних ергодичних інваріантних мір.

Отримані результати можуть бути використані в топологічній динаміці, ергодичній теорії, в теорії міри, а також при вивченні гомеоморфізмів канторівських множин, зокрема для класифікації канторівських динамічних систем з точністю до орбітальної еквівалентності.

Доповідач висловлює глибоку подяку провідному науковому співробітнику відділу математичної фізики ФТІНТ НАН України доктору фізико-математичних наук С.І. Безуглому та професору Університету інформаційних технологій та менеджменту ім. Тадеуша Котарбінського (Ольштин), доктору Яну Квятковському за допомогу в роботі та численні обговорення матеріалу.

REFERENCES

1. Morse M. A one-to-one representation of geodesics on a surface of negative curvature. *Am. J. Math.* 1921. **43**: 33.
2. Morse M., Hedlund G. Symbolic dynamics. *Am. J. Math.* 1938. **60**(4): 815.
3. Durand F. Combinatorics on Bratteli diagrams and dynamical systems. In: *Combinatorics, Automata and Number Theory* (Eds. V. Berthe, M. Rigo). (Cambridge: University Press, 2010).
4. Putnam I. Orbit equivalence of Cantor minimal systems: a survey and a new proof. *Expo. Math.* 2010. **28**(2): 101. Cambridge
5. Bezuglyi S., Karpel O. Bratteli diagrams: structure, measures, dynamics. arXiv:1503.03360.
6. Bratteli O. Inductive limits of finite-dimensional C^*-algebras. *Trans. Am. Math. Soc.* 1972. **171**: 195.
7. Vershik A.M. A theorem on Markov periodic approximation in ergodic theory. *Zap. Nauchn. Sem. LOMI*. 1982. **115**: 72. [in Russian].
8. Herman R.H., Putnam I., Skau C. Ordered Bratteli diagrams, dimension groups, and topological dynamics. *Int. J. Math.* 1992. **3**(6): 827.
9. Medynets K. Cantor aperiodic systems and Bratteli diagrams. *Comptes Rendus Mathematique*. 2006. **342**(1): 43.
10. Giordano T., Putnam I., Skau C. Topological orbit equivalence and C^*-crossed products. *J. Reine Angew. Math.* 1995. **469**: 51.
11. Bezuglyi S., Karpel O. Homeomorphic Measures on Stationary Bratteli Diagrams. *J. Funct. Anal.* 2011. **261**(12): 3519.
12. Karpel O. Infinite measures on Cantor spaces. *J. Difference Equ. Appl.* 2012. **18**(4): 703.
13. Durand F., Host B., Skau C. Substitutional dynamical systems. Bratteli diagrams and dimension groups. *Ergodic Theory Dynam. Syst.* 1999. **19**(4): 953.
14. Bezuglyi S., Kwiatkowski J., Medynets K. Aperiodic substitution systems and their Bratteli diagrams. *Ergodic Theory Dynam. Syst.* 2009. **29**(1): 37.
15. Oxtoby J.C., Ulam S.M. Measure preserving homeomorphisms and metrical transitivity. *Ann. Math.* 1941. **42**: 874.

16. Alpern S., Prasad V.S. *Typical Dynamics of Volume Preserving Homeomorphisms*. (Cambridge: Cambridge University Press, 2000).
17. Akin E. Measures on Cantor space. *Topology Proc*. 1999. **24**: 1.
18. Navarro-Bermudez F.J. Topologically equivalent measures in the Cantor space. *Proc. Am. Math. Soc*. 1979. **77**(2): 229.
19. Akin E., Dougherty R., Mauldin R.D., Yingst A. Which Bernoulli measures are good measures? *Colloq. Math*. 2008. **110**: 243.
20. Austin T.D. A pair of non-homeomorphic product measures on the Cantor set. *Math. Proc. Cam. Phil. Soc*. 2007. **142**: 103.
21. Karpel O. Good measures on locally compact Cantor sets. *J. Math. Phys. Anal. Geom*. 2012. **8**: 260.
22. Bezuglyi S., Karpel O. Orbit Equivalent Substitution Dynamical Systems and Complexity. *Proc. Am. Math. Soc*. 2014. **142**: 4155.
23. Bezuglyi S., Karpel O., Kwiatkowski J. Subdiagrams of Bratteli diagrams supporting finite invariant measures. *J. Math. Phys. Anal. Geom*. 2015. **11**(1): 3.
24. Adamska M., Bezuglyi S., Karpel O., Kwiatkowski J. Subdiagrams and invariant measures of Bratteli diagrams. arXiv:1502.05690.
25. Bezuglyi S., Jorgensen P. Representations of Cuntz-Krieger relations, dynamics on Bratteli diagrams, and path-space measures. arXiv:1410.2318.
26. Bezuglyi S., Handelman D. Measures on Cantor sets: The good, the ugly, the bad. *Trans. Am. Math. Soc*. 2014. **366**(12): 6247.

Е.М. Карпель

Физико-технический институт низких температур им. Б.И. Веркина НАН Украины
просп. Ленина, 47, Харьков, 61103, Украина

ИНВАРИАНТНЫЕ МЕРЫ НА ДИАГРАММАХ БРАТТЕЛИ

По материалам научного сообщения на заседании Президиума НАН Украины 17 июня 2015 года

Результаты, изложенные в докладе, посвящены проблемам классификации канторовских динамических систем с точностью до орбитальной эквивалентности. Ключевую роль в такой классификации играет исследование инвариантных мер для данных динамических систем. Дана полная классификация широкого класса как конечных, так и бесконечных борелевских мер на канторовских пространствах. В частности, получена полная классификация эргодических мер, инвариантных для апериодических подстановочных динамических систем. Такие меры являются инвариантными для кофинального отношения эквивалентности на пространстве путей стационарных диаграмм Браттели. Исследована структура эргодических мер на пространстве произвольных диаграмм Браттели, в частности, найдено описание поддиаграмм, которые являются носителями конечных эргодических инвариантных мер. Эти результаты являются существенным шагом на пути решения открытого вопроса о классификации канторовских апериодических динамических систем с точностью до орбитальной эквивалентности.

***Ключевые слова*:** канторовская динамическая система, эргодическая инвариантная мера, диаграмма Браттели, орбитальная эквивалентность.

O.M. Karpel

Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering of National Academy of Sciences of Ukraine
47 Lenin Ave., Kharkiv, 61103, Ukraine

INVARIANT MEASURES ON BRATTELI DIAGRAMS

Information from scientific report at the meeting of Presidium of NAS of Ukraine, June 17, 2015

The results, stated in the report, are devoted to the problem of classification of Cantor dynamical systems up to orbit equivalence. The study of invariant measures for such dynamical systems plays the crucial role in the classification. The complete classification of the wide class of both finite and infinite Borel measures on Cantor spaces is given. In particular, the complete classification of ergodic invariant measures for aperiodic substitution dynamical systems is obtained. Such measures are invariant for the cofinal equivalence relation on the path spaces of stationary Bratteli diagrams. The structure of ergodic measures on the path space of an arbitrary Bratteli diagram is studied, in particular, the description of subdiagrams supporting finite ergodic invariant measures is found. These results are essential for deciding an open question about the classification of Cantor aperiodic dynamical systems up to orbit equivalence.

***Keywords*:** Cantor dynamical system, ergodic invariant measure, Bratteli diagram, orbit equivalence.