doi: https://doi.org/10.15407/visn2026.10.023



СКРИПНІК
Ігор Ігорович —
академік НАН України, доктор фізико-математичних наук, заступник директора з наукової роботи Інституту прикладної математики і механіки НАН України

ЗАСТОСУВАННЯ ЕЛІПТИЧНИХ І ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ ДО АНАЛІЗУ СТРУКТУРНО НЕОДНОРІДНИХ СЕРЕДОВИЩ

Стенограма доповіді на засіданні Президії НАН України 16 вересня 2026 року

У доповіді представлено отримані в Інституті прикладної математики і механіки НАН України нові вагомі результати світового рівня з якісної теорії диференціальних рівнянь у частинних похідних зі складною структурою зростання. Ці результати є значним внеском у розвиток фундаментальної математики і мають принципове значення для суміжних прикладних галузей, зокрема механіки неоднорідних середовищ, гідродинаміки неньютонівських рідин, матеріалознавства, оброблення зображень і математичної біології.

Шановні члени Президії!
Шановні колеги!
Сьогодні я хотів би ознайомити вас з останніми тенденціями в застосуванні еліптичних і параболічних рівнянь з нестандартними умовами зростання та/або неоднорідною еліптичністю/параболічністю, а також розповісти про власні досягнення. В останні роки ця тематика активно розвивається і привертає до себе увагу багатьох дослідників. Ця галузь досліджень містить багато відкритих питань і, як побачимо далі, тісно взаємопов'язана з іншими галузями математики, як-от гармонічний аналіз і теорія функціональних просторів, а також має важливе значення для розвитку суміжних прикладних галузей, зокрема механіки неоднорідних середовищ, гідродинаміки неньютонівських рідин, матеріалознавства, оброблення зображень та математичної біології.

Навіщо вивчати диференціальні рівняння з частинними похідними? Вивчати варто, бо це універсальна мова науки та інженерії. Її використовують насамперед у фізичних моделях для прогнозування тих чи інших процесів. Річ у тім, що перед тим, як запускати дорогі цифрові симуляції, потрібно отримати математичні гарантії щодо коректності задачі (рис. 1). Саме

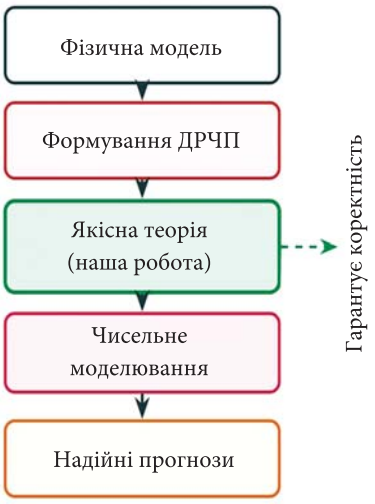


Рис. 1. Роль диференціальних рівнянь з частинними похідними у побудові фізичних моделей

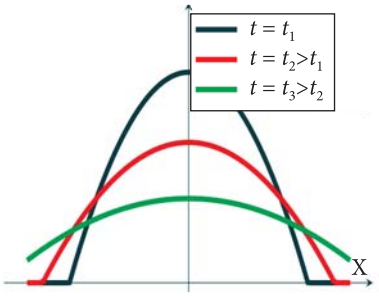


Рис. 2. Розв'язок Баренблатта: носій компактний і поширюється зі скінченною швидкістю

регулярність гарантує збіжність чисельної схеми до істинного розв'язку. Без належних оцінок регулярності симуляції можуть давати артефакти замість відображення справжньої фізики процесу. В матеріалознавстві це пов'язано з неперервністю полів напруження та деформації, у біології — з фізичною осмисленістю профілів концентрацій, в обробленні зображень — із контролем якості алгоритмів шумозаглушення. Тому ключове питання полягає в тому, чи мають розв'язки цих рівнянь «хорошу» поведінку.

Які рівняння ми досліджуємо? Звісно, ми починали з класичних рівнянь у частинних похідних, зокрема з рівняння Лапласа

$$\Delta u := \partial^2_{x_1} u + \cdots + \partial^2_{x_n} = 0;$$

та рівняння теплопровідності

$$u_t - \Delta u = 0.$$

Однак тут є велике обмеження: ці рівняння є ідеалізацією. У такій формі вони не описують безпосередньо фізичні процеси з нелінійною поведінкою, змінними властивостями матеріалу або складною структурою середовища. Реальний світ є нелінійним, тому для опису таких процесів потрібні нелінійні рівняння. Одним із них є рівняння з p-лапласіаном:

$$\Delta_p u = \operatorname{div}(|Du|^{p-2} Du) = 0, \ p > 1.$$

При $p = 2$ воно зводиться до рівняння Лапласа. Сфера фізичних застосувань цього рівняння охоплює моделювання в гляціології, зокрема льодовикових щитів (при $p = 3/2$); моделювання неньютонівських рідин, таких як полімери, кетчуп чи кров; моделювання процесів пластичного формування та рідин, що розріджуються при зсуві (при $1 < p < 2$).

Ще одне класичне рівняння, яке ми досліджуємо, — це рівняння пористого середовища:

$$u_t = \Delta(u^m), \ m > 1.$$

Його фізичні застосування охоплюють течію ґрунтових вод крізь пористі породи, течію газу в пористих середовищах, теплове випромінювання в іонізованих газах, популяційну динаміку, зокрема поширення видів. Ключовою особливістю цього рівняння є скінченна швидкість поширення розв'язків — на відміну від рівняння теплопровідності, збурення не поширюються миттєво. Прикладом розв'язку рівняння пористого середовища є розв'язок Баренблатта (рис. 2).

Від початку 2000-х років і дотепер активно розвиваються нові напрями, пов'язані з рівняннями з нестандартними умовами зростання. Розглядають еліптичні та параболічні рівняння загального вигляду

$$\operatorname{div} A(x, u, Du) = 0,$$

$$u_t = \operatorname{div} A(x, t, u, Du).$$

Це насамперед ваговий p-лапласіан (параболічний ваговий p-лапласіан); $p(x)$-лапласіан (параболічний $p(x, t)$-лапласіан); двофазні рівняння; двофазні вироджені рівняння; рівняння з анізотропним зростанням.

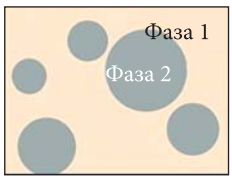
На початку 2000-х було запропоновано кілька фізичних моделей для рівнянь з нестандартними умовами зростання, зокрема:

- електрореологічні рідини (ці моделі враховують складну взаємодію між електромагнітними полями та рухомою рідиною) [1];

- відновлення зображення [2];
- анізотропні та композиційні матеріали [3];
- поширення епідемічного захворювання [4].

Такі рівняння дозволяють моделювати процеси в неоднорідних середовищах, наприклад у матеріалах зі змінними властивостями, в рамках єдиного рівняння, без необхідності описувати кожну однорідну ділянку окремо. Так, в електрореологічних рідинах показник $p(x)$ залежить від локальної напруженості електричного поля. У двофазній моделі композитного матеріалу коефіцієнт $a(x)$ «перемикається» між двома різними фазами (рис. 3). Це не «іграшкові» моделі, вони виникають безпосередньо з фізичних та інженерних застосувань, які неможливо описати класичними рівняннями з постійною експонентою.

Рис. 3. Приклад фізичного застосування рівняння з нестандартними умовами зростання для двофазної моделі композитного матеріалу



$a(x) = 0$ чи $a(x) > 0$

Від класики до сучасних досліджень. Якісна теорія нелінійних диференціальних рівнянь ґрунтується на фундаментальних роботах Де Джорджі (1957) та Неша (1958), Мозера (1961, 1964), Ладиженської та Уральцевої, Серріна, Трудінгера, Фрідмана (1960-ті — 1980-ті), ДіБенедетто (1986, 1993). Фундаментальний результат Де Джорджі продемонстрував можливості ітераційних нерівностей для інтегралів, мір, ліній рівня, осциляції тощо. В останні 20 років сформувалися провідні дослідницькі групи з вивчення рівнянь із нестандартним зростанням. Серед дослідників цього напряму варто назвати Baroni, Colombo, Cupini, Mingione, Marcellini, Lukkari (Італія); Harhulehto, Hästö, Karppinen, Kinnunen, Lehtelä (Фінляндія); Duzaar, Bögelein (Австрія); Rădulescu (Румунія); Diening (Німеччина); Shahgholian (Швеція); Byun та Ok (Південна Корея). Про інтенсивність розвитку напряму свідчить публікаційна активність: понад тисяча статей у провідних міжнародних журналах за останні п'ять років.

Отримані результати. Ми розвиваємо цю тематику в межах наукової школи, започаткованої в середині минулого століття видатним математиком академіком Ярославом Борисовичем Лопатинським (1906—1981). До нашої дослідницької групи в Україні входять Євгенія Євгеньєва, Марія Савченко і я, Ігор Скрипнік, ще один співробітник, Михайло Войтович, на жаль, загинув у Маріуполі на початку повномасштабного вторгнення. У нашій групі працюють також математики з Італії і Португалії — Сімоне Чіані (Simone Ciani), Вінченцо Веспрі (Vincenzo Vespri) та Еуріка Енрікес (Eurica Henriques).

Сфера інтересів нашої групи пов'язана з дослідженням рівнянь

$$u_t - \operatorname{div} A(x,t,u,Du) = 0,$$

$$A(x,t,u,Du)Du \gtrsim u^{(m_1-1)(p_1-1)}|Du|^{p_1},\ m_1, m_2 > 0,$$

$$|A(x,t,u,Du)| \lesssim u^{(m_2-1)(p_2-1)}|Du|^{p_2-1},\ 1 < p_1 < p_2$$

і охоплює як рівняння пористого середовища з нестандартним (m_1, m_2)-зростанням, так і параболічне рівняння з (p_1, p_2)-зростанням (аналог параболічного p-лапласіана).

Програма наших досліджень містить кілька основних напрямів. Передусім це точне визначення розв'язку, вибір функціональних просторів, питання існування / неіснування, єдиності / неєдиності. Причому ми розглядаємо переважно слабкі розв'язки, оскільки це зараз мейнстрим у термінах інтегральної тотожності. Далі досліджуємо внутрішню регулярність розв'язків L^∞, C^α, $W^{1,\infty}$, $C^{1+\alpha}$, нерівності типу Гарнака; регулярність біля негладкої межі та критерій Вінера. Окремі напрями — це асимптотика для початкових даних і правої частини L^1 (це так звані сингулярні розв'язки), а також поведінка на нескінченності (при $|x| \to \infty$, $t \to \infty$) і теореми типу Ліувілля і Фрагмена—Ліндельофа.

Наша методологія ґрунтується переважно на методі внутрішнього масштабування (підхід ДіБенедетто, адаптований до нестандартного зростання), в якому геометрія параболічних циліндрів адаптивно визначається як локальними значеннями розв'язку, так і структурою коефіцієнтів рівняння, а для анізотропних рівнянь масштаб диференціюється в кожному

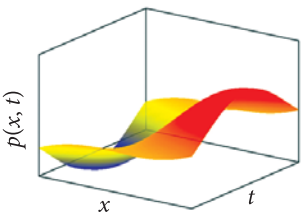


Рис. 4. Неперервність для $p(x, t)$-лапласіана; показник $p(x, t)$ неперервно змінюється, створюючи неоднорідне середовище

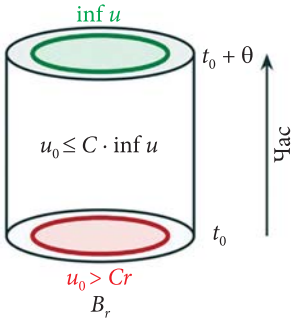


Рис. 5. Нерівність Гарнака для двофазних рівнянь

просторовому напрямку. Як техніку ітерацій застосовуємо аналог Де Джорджі для рівнянь з нестандартним зростанням.

Що ж зумовлює складність задачі? По-перше, відсутність однорідності за розв'язком та/або градієнтом; по-друге, те, що енергія та геометрія мають адаптивно поєднуватися; по-третє, те, що геометрія залежить від точки, а ще інколи можливий так званий ефект типу Трикомі (тип рівняння не змінюється, але відбувається перехід від виродженого випадку до сингулярного, які потребують різних підходів). І нарешті, склеїти стандартно локальні оцінки на нескінченності неможливо.

Тепер наведу конкретні приклади отриманих нами результатів.

Перший результат — неперервність для $p(x, t)$-лапласіана (фізичний зміст — електрореологічні рідини, оброблення зображень). Намагаючись поліпшити логарифмічні умови, ми довели теорему (рис. 4): *кожен локально обмежений слабкий розв'язок u є неперервною функцією:*

$$\omega_r \le \omega_\rho e^{-\int_{2r}^{\rho} e^{-e^{\gamma_0 \mu(s)}} \frac{ds}{s}} \Rightarrow$$

неперервність, якщо

$$\int_0 e^{-e^{\gamma_0 \mu(s)}} \frac{ds}{s} = \infty, \quad \mu(r) = \in \log\log\log\frac{1}{r}, \ \in \gamma_0 < 1.$$

Важливо, що аналогічні результати було отримано для всіх видів рівнянь, точні результати — для двофазних рівнянь. Ключова складність полягає в тому, що класичні аргументи тут не працюють.

Другий результат — нерівність Гарнака для двофазних рівнянь:

$$u_t = \operatorname{div}(|Du|^{p-2} Du + a(x,t)|Du|^{q-2} Du),$$

$$1 < p \le q, \ a \ge 0.$$

Фізичний зміст пов'язаний з композитними матеріалами з різкими переходами. Наш внесок полягає в доведенні теореми (рис. 5): *нехай $u \ge 0$ є слабким розв'язком. Тоді існує таке $C > 0$, що*

$$u := u(x_0, t_0) \le C\left(\inf_{B_r \times \{t_0 + \theta\}} u + r\right),$$

$$\theta \approx \frac{r^2}{(u_0 / r)^{p-2} + a(x_0, t_0)(u_0 / r)^{q-2}}, \ u_0 > Cr$$

(для порівняння: лінійний випадок $\theta = r^2$).

Значущість результату полягає в тому, що це перша нерівність Гарнака для параболічного двофазного рівняння за гострих умов на відрив q/p. Найскладніший випадок — $p < 2 < q$: в точках, де $a(x_0, t_0) = 0$, змінюється вид рівняння з виродженого на сингулярний.

Третій результат — регулярність для двічі нелінійних рівнянь:

$$u_t = \operatorname{div}(|Du^m|^{p-2} Du^m), \ m > 0, \ p > 1.$$

Йдеться про комбіновані процеси швидкої/повільної дифузії. Це рівняння об'єднує дві фундаментальні моделі: $m = 1$ — параболічний p-лапласіан і $p = 2$ — рівняння пористого середовища.

Наш внесок полягає в тому, що ми отримали гельдерову неперервність для обмежених слабких розв'язків у повному діапазоні $m > 0$, $p > 1$. Важливо, що наші результати охоплюють весь параметричний діапазон, а не лише окремі випадки. Раніше було охоплено лише випадки $m(p - 1) > 1$, $p > 2$ і $m(p - 1) < 1$, $p < 2$, тобто двічі вироджений та двічі сингулярний випадки (світлі ділянки на рис. 6). Тепер охоплено ще й вироджено сингулярний випадок, коли $m(p - 1) > 1$, $p < 2$, та сингулярно вироджений, коли $m(p - 1) < 1$, $p > 2$ (темні ділянки на рис. 6).

І останній результат, про який я встигаю сьогодні розповісти, — це анізотропні рівняння з подвійною нелінійністю:

$$u_t = \sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i} \left(\left| \partial_{x_i} u^{m_i} \right|^{p_i - 2} \partial_{x_i} u^{m_i} \right),$$

$$p_{min} > 1,\ m_{min} > 0.$$

Слід зазначити, що це, мабуть, найскладніші рівняння з тих, які ми досліджували. Їхній фізичний зміст — це середовище, яке має різні швидкості дифузії в різних просторових напрямках. Сфера практичного застосування рівнянь — осадові породи, проникність яких варіюється за шарами; армовані волокном композити із сильною анізотропією вздовж волокон; біологічні тканини, зокрема м'язові волокна і деревина; моделі поширення епідемічного захворювання.

Наш внесок полягає в доведенні теореми: *обмежені слабкі розв'язки є локально гельдерово неперервними за умови, що показники анізотропії задовольняють*:

$$\max_i m_i (p_i - 1) \le \min_i m_i (p_i - 1) + \in,$$

$$0 < \in < \frac{(m+1)p}{n},\ \frac{1}{p} := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p_i},\ m := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} m_i.$$

Важливо, що це майже точна умова.

Свідченням того, що отримані нами результати мають високий науковий рівень і визнані світовою математичною спільнотою, є їх публікація у високорейтингових міжнародних журналах першого квартиля [5—12].

Ми виконували дослідження за підтримки різних наукових проєктів і грантів. Вітчизняна підтримка включала відомчу тематику фундаментальних досліджень НАН України; грант Державного фонду фундаментальних досліджень України на 2016—2017 рр.; проєкт НАН України за конкурсом «Підтримка пріоритетних для держави наукових досліджень і науково-технічних (експериментальних) розробок Відділення математики НАН України на 2022 р.» за КПКВК 6541230; проєкти за конкурсом «Науково-дослідні роботи молодих учених НАН України» на 2021—2022 і 2025—2026 рр.;

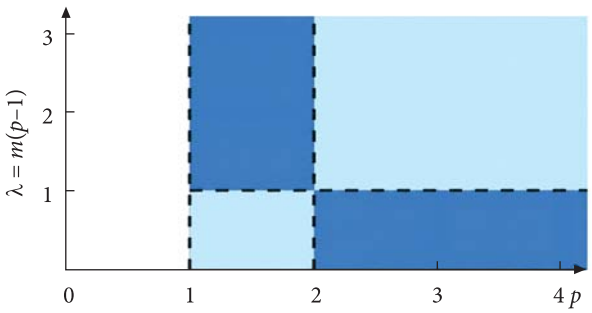


Рис. 6. Гельдерова неперервність для обмежених слабких розв'язків на різних діапазонах

грант Національного фонду досліджень України «Передова наука в Україні 2026—2028». Міжнародна підтримка — це дослідницький грант Європейської федерації академій природничих та гуманітарних наук ALLEA 2023 р., індивідуальний грант програми Європейської комісії MSCA4Ukraine на 2023—2024 рр. та дослідницькі гранти Фонду Саймонса (США) на 2023—2026 рр.

Висновки. Якісна теорія нелінійних диференціальних рівнянь із частинними похідними зі складною структурою є новим, сучасним, актуальним напрямом досліджень, який стрімко зростає і набуває потужності у світі. Він активно розвивається і в Інституті прикладної математики і механіки НАН України. Наша наукова група продовжує традиції наукової школи, заснованої на початку існування Інституту академіком Я.Б. Лопатинським, тісно співпрацює з провідними науковими школами Італії та Португалії. Отримані результати мають високий, міжнародно визнаний науковий рівень, що підтверджується численними публікаціями в провідних міжнародних наукових виданнях квартилів Q1—Q2 — близько 40 публікацій за останні десять років.

Дослідження мають значний потенціал для розвитку суміжних галузей науки. Розроблені математичні методи та отримані теоретичні результати можуть бути використані у математичному моделюванні неоднорідних і композиційних матеріалів, процесів фільтрації та дифузії, неньютонівських та електрореологічних рідин, анізотропних середовищ, біологіч-

них тканин, процесів поширення епідемічних захворювань, а також у задачах, пов'язаних з відновленням та обробленням зображень.

Надалі одним з основних стратегічних завдань є перехід від фундаментальних результатів до ширшого міждисциплінарного застосування, зокрема завдяки розширенню співпраці з іншими відділеннями НАН України. Перспективним є встановлення нових зв'язків між отриманими теоремами регулярності та конкретними фізичними моделями структурно неоднорідних середовищ. Особливу увагу доцільно приділити задачам механіки неоднорідних матеріалів, теорії фільтрації, анізотропної дифузії та математичного моделювання складних фізико-біологічних процесів.

Необхідною умовою сталого розвитку напряму є підготовка молодих науковців. Зважаючи на складність і швидкий розвиток сучасної теорії нелінійних рівнянь із нестандартними умовами зростання, особливого значення набувають підготовка аспірантів і докторантів, формування молодіжних наукових груп, їх залучення до участі в міжнародних конференціях, спільних публікаціях та грантових проєктах.

Подальше зміцнення міжнародної співпраці є одним із пріоритетних напрямів розвитку. Йдеться про співпрацю із закордонними науковими групами та участь у міжнародних грантових програмах Simons Foundation, Volkswagen Foundation, Horizon Europe та ін.

Загалом зазначений напрям досліджень поєднує фундаментальну математичну новизну, сучасну методологію та значний прикладний потенціал.

Отже, основні результати нашої групи стосуються точних або майже точних умов на коефіцієнти рівнянь із нестандартними умовами зростання, які забезпечують відповідну регулярність розв'язків. Дослідження еліптичних і параболічних рівнянь зі складною структурою зростання є перспективним напрямом сучасної фундаментальної математики, що має вагоме теоретичне та прикладне значення. Поєднання нових методів локального аналізу, точних результатів щодо регулярності та поведінки розв'язків, широкої міжнародної співпраці й перспектив практичного застосування закладає міцну основу для подальшого розвитку цього напряму в Інституті прикладної математики і механіки НАН України.

Наступним стратегічним кроком стане посилення міждисциплінарної взаємодії, розширення міжнародних дослідницьких проєктів, підготовка молодих учених та перенесення отриманих фундаментальних результатів у конкретні задачі механіки, матеріалознавства, фізики, інформатики та математичної біології.

Дякую за увагу!

За матеріалами засідання
підготувала О.О. Мележик

REFERENCES

1. Ruzicka M. *Electrorheological Fluids: Modelling and Mathematical Theory*. Springer, 2000. https://doi.org/10.1007/BFb0104029
2. Chen Yu., Levine S., Rao M. Variable exponent, linear growth functionals in image restoration. *SIAM Journal on Applied Mathematics*. 2006. **66**(4): 050624522. https://doi.org/10.1137/050624522
3. Cowin S.C. *Continuum Mechanics of Anisotropic Materials.* Springer Science+Business Media New York, 2013. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-5025-2
4. Bendahmane M., Langlais M., Saad M. On some anisotropic reaction-diffusion systems with L^1-data modeling the propagation of an epidemic disease. *Nonlinear Analysis*. 2003. **54**(4): 617—636. https://doi.org/10.1016/S0362-546X(03)00090-7
5. Skrypnik I., Voitovych M. B_1 classes of De Giorgi—Ladyzhenskaya—Ural'tseva and their applications to elliptic and parabolic equations with generalized Orlicz growth conditions. *Nonlinear Analysis*. 2021. **202**(1): 112135. https://doi.org/10.1016/j.na.2020.112135
6. Skrypnik I.I., Voitovych M.V. On the continuity of solutions of quasilinear parabolic equations with generalized Orlicz growth under non-logarithmic conditions. *Annali di Matematica Pura ed Applicata*. 2022. **201**(3): 1381—1416. https://doi.org/10.1007/s10231-021-01161-y
7. Savchenko M., Skrypnik I., Yevgenieva Y. A note on the weak Harnack inequality for unbounded minimizers of elliptic functionals with generalized Orlicz growth. *Annali di Matematica Pura ed Applicata*. 2025. **204**(5): 1937—1946. https://doi.org/10.1007/s10231-025-01553-4
8. Skrypnik I., Yevgenieva Y. Harnack inequality for solutions of the p(x)-Laplace equation under the precise non-logarithmic Zhikov's conditions. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*. 2024. **63**(1): 7. https://doi.org/10.1007/s00526-023-02608-1
9. Ciani S., Skrypnik I.I., Vespri V. On the local behavior of local weak solutions to some singular anisotropic elliptic equations. *Advances in Nonlinear Analysis*. 2023. **12**(1): 237—265. https://doi.org/10.1515/anona-2022-0275
10. Ciani S., Henriques E., Skrypnik I.I. On the continuity of solutions to anisotropic elliptic operators in the limiting case. *Bulletin of the London Mathematical Society*. 2025. **57**(5): 1548—1567. https://doi.org/10.1112/blms.70047
11. Ciani S., Henriques E., Skrypnik I.I. The weak Harnack inequality for unbounded minimizers of elliptic functionals with generalized Orlicz growth. *Advances in Calculus of Variations*. 2025. **18**(3): 639—652. https://doi.org/10.1515/acv-2024-0032
12. Ciani S., Henriques E., Savchenko M.O., Skrypnik I.I. Parabolic De Giorgi classes with doubly nonlinear, nonstandard growth: local boundedness under exact integrability assumptions. *Journal of Differential Equations*. 2026. **462**: 114235. https://doi.org/10.1016/j.jde.2026.114235

Ihor I. Skrypnik
Institute of Applied Mathematics and Mechanics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Slavyansk, Ukraine
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-7398-9273

APPLICATION OF ELLIPTIC AND PARABOLIC EQUATIONS
TO THE ANALYSIS OF STRUCTURALLY INHOMOGENEOUS MEDIA

Transcript of scientific report at the meeting of the Presidium of NAS of Ukraine, September 16, 2026

The report presents new significant world-class results obtained at the Institute of Applied Mathematics and Mechanics of the NAS of Ukraine in the qualitative theory of partial differential equations with a complex growth structure. These results are a significant contribution to the development of fundamental mathematics and are of fundamental importance for related applied fields, in particular, mechanics of inhomogeneous media, hydrodynamics of non-Newtonian fluids, materials science, image processing, and mathematical biology.

Cite this article: Skrypnik I.I. Application of elliptic and parabolic equations to the analysis of structurally inhomogeneous media (transcript of scientific report at the meeting of the Presidium of NAS of Ukraine, September 16, 2026). *Visn. Nac. Akad. Nauk Ukr*. 2026. (10): 23—29. https://doi.org/10.15407/visn2026.10.023