doi: https://doi.org/10.15407/visn2026.06.031

**ШЕПЕЛЬСЬКИЙ**
**Дмитро Георгійович —**
член-кореспондент НАН України, доктор фізико-математичних наук, завідувач відділу диференціальних рівнянь і геометрії Математичного відділення Фізико-технічного інституту низьких температур ім. Б.І. Вєркіна НАН України

# СУЧАСНІ МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ ДЛЯ ОПТОВОЛОКОННИХ КОМУНІКАЦІЙ

## Стенограма доповіді на засіданні Президії НАН України 25 березня 2026 року

*Доповідь присвячено подоланню «нелінійної кризи» пропускної здатності сучасних волоконно-оптичних мереж за допомогою апарату інтегровних систем. Розглянуто застосування нелінійного перетворення Фур'є (NFT) та задачі Рімана—Гільберта для кодування і передачі даних. Представлено результати чисельного моделювання періодичних NFT-систем, розроблених у співпраці з Астонським інститутом фотонних технологій (Велика Британія), що демонструють стійкість сигналу до нелінійних спотворень. Окреслено перспективи впровадження спеціалізованих обчислювальних засобів для реалізації цих математичних методів у телекомунікаційній інженерії.*

Вельмишановний пане голово!
Вельмишановні члени Президії! Колеги!
Насамперед хочу подякувати за можливість представити результати наших досліджень, які стосуються питань впровадження певних математичних конструкцій у розроблення сучасних систем оптичної комунікації.

Як відомо, оптичні волокна становлять фізичну основу систем передачі даних, передусім на великі відстані. Не секрет, що ресурси сучасних оптичних мереж перевантажені, і подальша їх інтенсивна експлуатація може загальмувати розвиток різних секторів економіки [1]. Одним із фундаментальних факторів, що обмежує подальше підвищення пропускної здатності сучасних систем оптичної комунікації, є існування нелінійних явищ, що спричиняють проблеми з організацією передачі інформації на різних етапах цього процесу.

У чому ж полягає проблема з нелінійністю? Відома формула Шеннона [2] для лінійних каналів зв'язку стверджує: якщо ви хочете передавати більше інформації, потрібно підвищувати потужність сигналу, збільшуючи співвідношення сигнал/шум. Однак на практиці спостерігається явище, яке називають нелінійною кризою пропускної здатності. Це пов'язано з тим, що вища потужність активує нелінійні ефекти. Як наслідок, криві

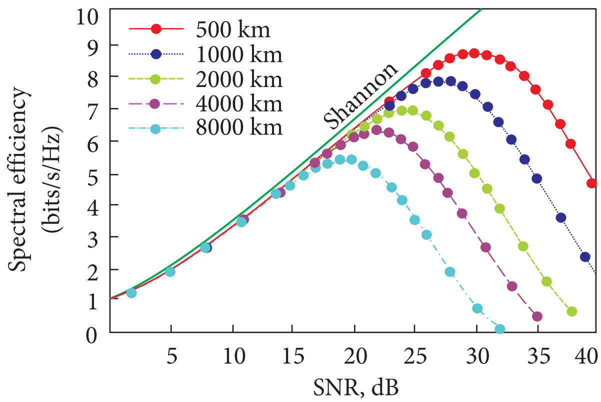



***Рис. 1.*** Нелінійна криза пропускної здатності

залежності якості систем передачі інформації від потужності сигналу мають характерний вигляд із загином донизу [3] (рис. 1). Іншими словами, неможливо перевищити певне значення потужності без втрати якості передачі (тобто зберегти задовільний рівень похибок).

Тепер трошки математики. Вона стосується інтегровності певного класу нелінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними.

Що дає нам властивість інтегровності? Вона дозволяє розв'язувати початкові задачі для відповідного конкретного нелінійного рівняння, наприклад для фокусуючого нелінійного рівняння Шредінгера, через розв'язання певної кількості лінійних задач. Це роблять із застосуванням так званих прямого та оберненого перетворень Фур'є. Певною мірою це є аналогом звичайного (лінійного) перетворення Фур'є, яке застосовують для лінійних рівнянь.

Для чого потрібні ці перетворення? Вони слугують певною заміною змінних: у нових, спектральних змінних нелінійне поширення замінюється лінійним. Це, зокрема, дозволяє за потреби легко «відмотати» процес назад.

Чому це важливо в контексті оптичних комунікацій? Тому що одне з таких інтегровних рівнянь, нелінійне рівняння Шредінгера

$$i\frac{\partial q}{\partial z}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 q}{\partial t^2}+|q|^2 q=0,$$

є хорошою моделлю поширення хвиль в оптичному волокні, де змінна $q$ описує обвідну електромагнітного поля.

Слід зазначити, що дослідження інтегровних нелінійних рівнянь мають тривалу історію саме в Математичному відділенні Фізико-технічного інституту низьких температур ім. Б.І. Вєркіна. Відповідна наукова школа сформувалася в Інституті одночасно з виникненням самої теорії інтегровних рівнянь (яку ще називають теорією солітонів) у 1970-х роках завдяки працям академіків НАН України Володимира Олександровича Марченка і Євгена Яковича Хруслова, а також доктора фізико-математичних наук Володимира Петровича Котлярова. Фундаментом цієї школи були дослідження академіка В.О. Марченка з обернених задач для операторів Штурма—Ліувілля, які він розпочав ще в 1950-х роках. Школа і сьогодні продовжує активно розвиватися. Серед її ключових досягнень останніх років варто відзначити розв'язання різних нелінійних інтегровних рівнянь із нетривіальними (ненульовими) крайовими умовами. Зокрема, це розвиток методу нелінійного перетворення Фур'є (більш відомого у математичній спільноті як метод оберненої задачі розсіювання) для розв'язання початково-крайових задач (метод Фокаса), дослідження нелокальних нелінійних рівнянь тощо.

Однак повернімося до оптичних хвилеводів. Вони є середовищем, у якому поширюються електромагнітні хвилі в певному діапазоні частот і яке добре моделюється за допомогою нелінійного рівняння Шредінгера. При цьому ігнорування нелінійності в рамках самої моделі поширення сигналів зумовлює необхідність компенсації нелінійності відповідними засобами, що збільшує кількість «шуму» в системі і, відповідно, призводить до зниження якості функціонування всієї системи передачі інформації. На цьому й ґрунтується наша ідея про те, що можливість включення нелінійності в саму модель поширення має підвищити якість передачі порівняно з лінійними моделями.

Для того щоб передати інформацію, нам потрібно закодувати (модулювати) її в початкові дані. Відповідно до методу нелінійного перетворення Фур'є, інформація закладається в так званий нелінійний спектр. На боці передавача виконується обернене нелінійне перетворення

 ISSN 1027-3239. Visn. Nac. Acad. Nauk Ukr. 2026. (6)

Фур'є, за допомогою якого формується сигнал. Завдяки властивостям хвилеводу цей сигнал доходить до приймача, де для отримання спектральних параметрів необхідно виконати пряме нелінійне перетворення Фур'є.

Оскільки еволюція цих спектральних параметрів є лінійною, їх можна легко «відкрутити назад». Тобто, маючи параметри на приймачі, ми можемо відновити значення, які закладалися на боці передавача, а отже, отримати вихідну інформацію.

Далі, якщо ми говоримо про диференціальні рівняння (неважливо, лінійні чи нелінійні) і хочемо мати справу з добре визначеними об'єктами, необхідно визначитися з крайовими умовами, яким мають задовольняти розв'язки відповідного рівняння.

Власне, метод оберненої задачі розсіювання розробляли саме для певного класу крайових умов: для розв'язків початкових задач, у яких початкові умови спадають до нуля на нескінченності. У нашому випадку ця нескінченність розглядається відносно часу. Втім, можливі й інші крайові умови, наприклад періодичні. З точки зору оптики, яка стоїть за цими моделями, обидва варіанти є однаково прийнятними. Проте надалі ми маємо врахувати практичні переваги та недоліки кожного з цих підходів.

Наведу ілюстрацію того, що відбувається у спектральних (перетворених) змінних. Якщо порівнювати спадні і періодичні крайові умови, то для спадних умов характерні спектральні функції двох типів: одна — неперервна, інша — дискретна, що складається з пар точок (рис. 2).

Натомість у періодичному формалізмі ми маємо справу виключно з дискретними характеристиками спектра — краями зон спектра, до яких, щоб однозначно охарактеризувати сигнал у спектральних термінах, додаються так звані фази (рис. 3).

Якщо порівняти ці підходи у фізичних змінних, то при застосуванні спадних крайових умов кожен сигнал необхідно доповнювати досить довгими нульовими інтервалами. Це потрібно для імітації умов на нескінченності, де сигнал прямує до нуля. Через це доводиться обробляти досить велике часове вікно, але навіть у цьому разі виникає проблема взаємодії сигналів, які внаслідок дисперсії створюють завади один одному.

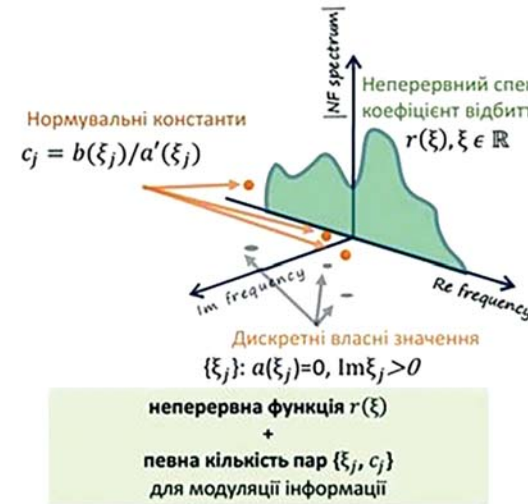
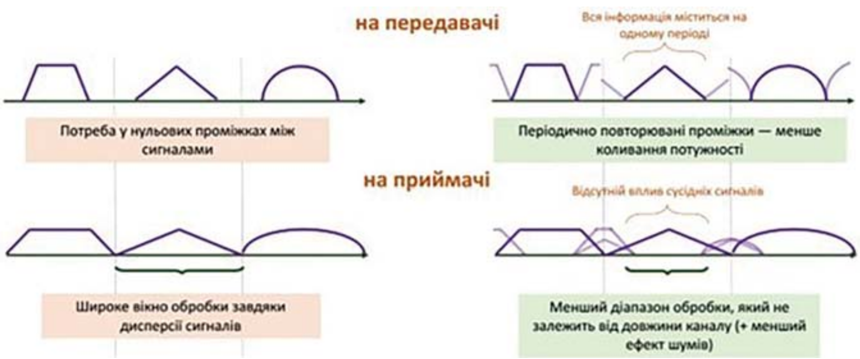



***Рис. 2.*** Спектральні характеристики у випадку спадних крайових умов


***Рис. 3.*** Спектральні характеристики у випадку періодичних крайових умов (скінченнозонний сигнал)

У періодичному формалізмі вся інформація зосереджена на одному періоді. Більше того, ми можемо контролювати цей період під час формування вихідного сигналу. У випадку періодичних крайових умов період, на якому обробляється сигнал у фізичній області, перебуває повністю «в наших руках». Це досягається




*а* *б*

***Рис. 4***. Порівняння сигналів у фізичному просторі: *а* — спадні крайові умови; *б* — періодичні крайові умови

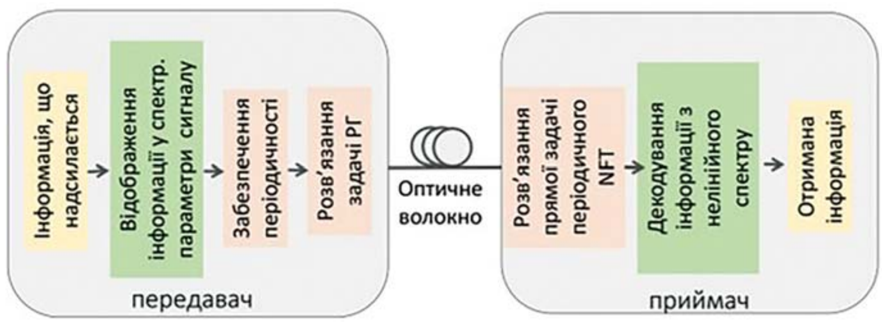



***Рис. 5.*** Принципова схема системи передачі інформації

завдяки спеціальному вибору параметрів, які є краями спектральних зон (рис. 4).

Отже, ми віддаємо перевагу використанню періодичного нелінійного перетворення Фур'є (NFT). Для його успішної реалізації необхідно мати ефективні чисельні процедури як для прямого, так і для оберненого кроків перетворення, відповідно — на приймачі та на передавачі.

Ми пропонуємо комунікаційну систему, що базується на застосуванні розв'язків так званих задач Рімана—Гільберта на етапі формування сигналу на передавачі. Імена Рімана і Гільберта нині відомі всім, адже вони зробили величезний внесок у різні галузі математики. Наша мета — інтегрувати відповідні задачі, які вони розв'язували, в роботу оптичного передавача.

Принципова схема така (рис. 5): інформація, яка надсилається, відображається у спектральні характеристики. Далі за цими характеристиками шляхом розв'язання задачі Рімана—Гільберта формується вихідний сигнал. Цей сигнал надходить у волокно і приймається на приймачі. Після цього необхідно виконати пряме нелінійне перетворення Фур'є, яке відновлює спектральні параметри. Завдяки лінійності еволюції спектральних даних за просторовою змінною ми можемо точно відновити інформацію, яка була закладена на боці передавача.

Трошки більше математики. З цих пар спектральних параметрів $(\xi_j, \phi_j)$, $j = 1, \ldots, N$ формується певна система лінійних алгебраїчних рівнянь, розв'язки якої визначають так звані часткові частоти $C_j^f, C_j^g$ :

$$\sum_{j=1}^{N} C_j^g \int_{\Gamma_j} \frac{\xi^k d\xi}{w(\xi)} = 0, \; k = 0, \ldots, N-3,$$

$$\sum_{j=1}^{N} C_j^g \int_{\Gamma_j} \frac{\xi^{N-2} d\xi}{w(\xi)} = -4\pi i,$$

$$\sum_{j=1}^{N} C_j^g \int_{\Gamma_j} \frac{\xi^{N-1} d\xi}{w(\xi)} = -2\pi i \sum_{j=0}^{N} (\lambda_j + \lambda_j^*).$$


ISSN 1027-3239. Visn. Nac. Acad. Nauk Ukr. 2026. (6)

На основі цих частот будуються матричнозначні функції $\mathbf{G}_j$ у комплексній площині спектрального параметра, що асоціюється з кожною дугою $\Gamma_j = (\xi_j, \xi_j^*)$:

$$\mathbf{G}_j(t,z) = \begin{pmatrix} 0 & ie^{-i(C_j^f t + C_j^g z + \phi_j)} \\ ie^{i(C_j^f t + C_j^g z + \phi_j)} & 0 \end{pmatrix}.$$

Ця функція слугує вхідними даними для задачі Рімана—Гільберта. Суть цієї задачі полягає в тому, що за заданою матрицею стрибка на контурі необхідно відновити кусково-аналітичну функцію, граничні значення якої пов'язані матрицею:

$$\mathrm{M}^-(t,z,\lambda) = \mathrm{M}^+(t,z,\lambda)\,\mathrm{G}_j(t,z),$$
$$\lambda \in \Gamma_j,\quad j = 1, \ldots, N,$$

яка задовольняє умову нормування

$$\mathrm{M}(t, z, \infty) = I.$$

До чого ж тут нелінійне рівняння Шредінгера? Зв'язок такий: якщо ми маємо розв'язок задачі Рімана—Гільберта, то, аналізуючи його асимптотичну поведінку, коли спектральний параметр прямує до нескінченності, ми отримуємо розв'язок нелінійного рівняння:

$$q(t,z) = 2i\,(\mathrm{M}_1)_{1,2}(t,z),$$

де

$$\mathrm{M}(t,z,\lambda) = I + \mathrm{M}_1(t,z)\,\lambda^{-1} + \mathrm{O}(\lambda^{-2}).$$

Зокрема, якщо покласти $z = 0$ (що відповідає положенню передавача), ми отримуємо саме той сигнал, який запускаємо у волокно.

Відповідно, на боці приймача нам необхідно розв'язати задачу, що є прямою відносно методу нелінійного перетворення Фур'є. Ми маємо фізичний сигнал і аналізуємо його на певному періоді. Цей сигнал виступає потенціалом для лінійної задачі, яка називається системою Захарова—Шабата. Розв'язуючи цю задачу, ми отримуємо матричнозначну функцію спектрального параметра, а з неї — відповідну скалярну функцію. За допомогою цієї функції формується лінійна система рівнянь відносно вектора фаз $\phi$. Розв'язуючи її на боці приймача (що позначається індексом $L$), ми відновлюємо фазові характеристики сигналу. Наша мета — відновити ці дані в тому вигляді, в якому вони були на боці передавача (що позначається індексом 0). Це стає можливим завдяки простій лінійній залежності спектральних параметрів від дистанції поширення:

$$\phi_j^0 = \phi_j^L - (C_i^g + 2g_0)L.$$

Паралельно з цим інформація, що закладалася в краї зон, відновлюється автоматично, оскільки краї зон не змінюються під час еволюції сигналу. Тобто якими ми їх сформували на передавачі, такими вони і залишаються на приймачі.

Було проведено чисельне моделювання передачі інформації за цією схемою. Навіть у найпростішому випадку $N = 1$, коли ми маємо всього дві зони спектра (дві пари точок $\xi_j$ та дві фази $\phi_j$), було показано, що якість передачі цілком відповідає сучасним системам. Ми знову отримали криву, подібну до кривої Шеннона, але вона дещо зсунута в бік поліпшення. Це дає можливість застосовувати потужніший сигнал і при цьому отримувати прийнятні значення Q-фактора (рис. 6).

Проте залишається проблема зі швидкістю передачі, оскільки в таку просту структуру неможливо закласти великий обсяг інформації. Відповідно, необхідно розробляти системи, в яких кількість спектральних зон буде значно більшою, ніж дві. Наші розрахунки для таких випадків також підтвердили хорошу якість сигналу, однак за швидкістю передачі ці прототипи поки що поступаються сучасним комерційним системам зв'язку з тих причин, про які я згадував раніше.

Ці дослідження ми проводили в тісній співпраці з Астонським інститутом фотонних технологій (м. Бірмінгем, Велика Британія). Щодо апробації результатів зазначу: ми прагнули, щоб їх оцінили саме фахівці, які безпосередньо працюють у галузі передачі інформації. Нам вдалося опублікувати кілька статей у провідних профільних виданнях, таких як Journal of Lightwave Technology, IEEE Transactions on Communications та ін. [4—8]. Крім того, результати було представлено на престижній європейській конференції European Conference on Optical Communication (ECOC) (це

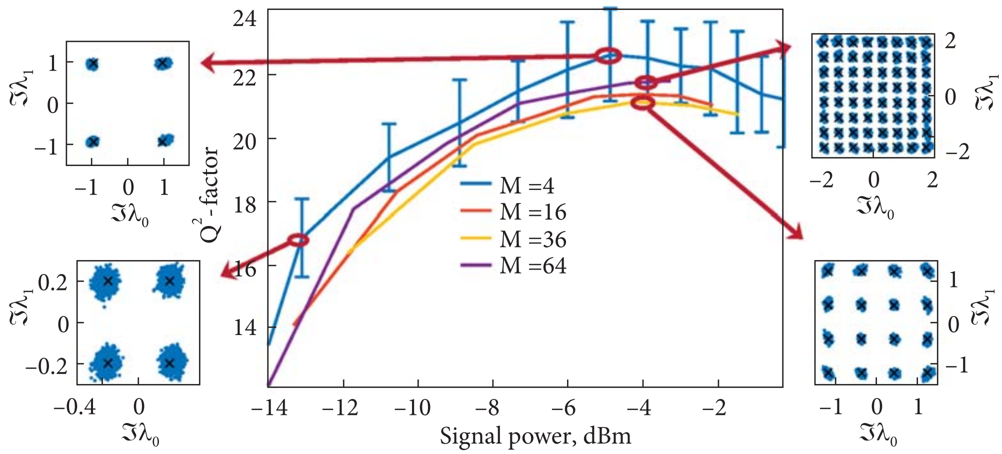



***Рис. 6.*** Результати чисельного моделювання передачі інформації: $N = 1$, Q-фактор як міра якості передачі — чим більше, тим краще

надзвичайно селективний форум, де доповіді проходять дуже ретельний відбір).

Водночас ми не оминали увагою і суто математичний бік проблеми: фундаментальне підґрунтя наших досліджень — адаптацію методу оберненої задачі розсіювання до періодичних крайових умов — опубліковано в журналі Proceedings of the Royal Society A [9].

Отже, що ми маємо як позитивний результат? Ми успішно пред'явили *proof of concept* — побудували засновану на застосуванні математики систему, яка пов'язана з методом оберненої задачі розсіювання для задач з періодичними крайовими умовами, і ця система за якістю передачі зіставна з відомими сучасними аналогами. Ба більше, ми запропонували другий варіант системи, де для відновлення фаз на боці приймача використовуються нейронні мережі.

З іншого боку, ми чітко бачимо виклики. Нам необхідно навчитися закладати більше інформації в сигнал, або додаючи нові ступені свободи, або ущільнюючи спектральні характеристики. Ще одна перспектива — математичне врахування поляризації електромагнітних хвиль. Це потребує узагальнення методу для складніших нелінійних рівнянь, які є багатокомпонентними аналогами базової моделі — нелінійного рівняння Шредінгера.

Крім того, чисельні алгоритми, які ми використовуємо, потребують зараз значних обчислювальних ресурсів. Проте ці витрати можна істотно зменшити, якщо розробити спеціалізовані апаратні рішення (hardware cores). Немає потреби ставити суперкомп'ютер на кожному вузлі — можна застосовувати компактні спеціалізовані пристрої, що виконують конкретні математичні операції.

Підсумовуючи, хотів би зазначити, що досить складна математика у сфері систем оптичної комунікації часто, на жаль, відлякує представників інженерної спільноти, але саме вона відкриває нові горизонти для систем зв'язку.

Дякую за увагу!

*За матеріалами засідання*
*підготувала О.О. Мележик*

REFERENCES

1. Lord A., Soppera A., Jacquet A. The impact of capacity growth in national telecommunications networks. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. 2016. **374**(2062): 20140431. https://doi.org/10.1098/rsta.2014.0431
2. Shannon C.E. Communication in the presence of noise. *Proceedings of the IRE*. 1949. **37**(1): 10—21. https://doi.org/10.1109/JRPROC.1949.232969
3. Essiambre R.-J., Kramer G., Winzer P.J., Foschini G.J., Goebel B. Capacity limits of optical fiber networks. *Journal of Lightwave Technology*. 2010. **28**(4): 662—701. https://doi.org/10.1109/JLT.2009.2039464
4. Kamalian M., Vasylchenkova A., Shepelsky D., Prilepsky J.E., Turitsyn S.K. Signal modulation and processing in nonlinear fibre channels by employing the Riemann-Hilbert problem. *Journal of Lightwave Technology*. 2018. **36**(24): 5714—5727. https://doi.org/10.1109/JLT.2018.2877103
5. Kamalian M., Vasylchenkova A., Prilepsky Ja.E., Shepelsky D., Turitsyn S.K. Full-spectrum periodic nonlinear Fourier transform optical communication through solving the Riemann-Hilbert problem. *Journal of Lightwave Technology*. 2020. **38**(14): 3602—3615. https://doi.org/10.1109/JLT.2020.2979322
6. Shepelsky D., Vasylchenkova A., Prilepsky Ja.E., Karpenko I. Nonlinear Fourier spectrum characterization of time-limited signals. *IEEE Transactions on Communications*. 2020. **68**(5): 3024—3032. https://doi.org/10.1109/TCOMM.2020.2973265
7. Bogdanov S., Shepelsky D., Vasylchenkova A., Sedov E., Freire P.J., Turitsin S.K., Prilepsky J.E. Phase computation for the finite-genus solutions to the focusing nonlinear Schrodinger equation using convolutional neural networks. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2023. **125**: 107311. https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2023.107311
8. Bogdanov S., Shepelsky D., Kamalian-Kopae M., Vasylchenkova A., Prilepsky Ja.E. Finite-Genus Solutions-Based Optical Communication with the Riemann-Hilbert Problem Transmitter and a Convolutional Neural Network Receiver. *Journal of Lightwave Technology*. 2024. **42**(16): 5529—5536. https://doi.org/10.1109/JLT.2024.3398561
9. Shepelsky D., Karpenko I., Bogdanov S., Prilepsky Ja.E. Periodic finite-band solutions to the focusing nonlinear Schrodinger equation by the Fokas method: inverse and direct problems. *Proc. R. Soc. A*. 2024. **480**(2286): 20230828. https://doi.org/10.1098/rspa.2023.0828

Dmytro G. Shepelsky
*B. Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering*
*of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kharkiv, Ukraine*
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-6616-5893

ADVANCED MATHEMATICAL METHODS FOR OPTICAL FIBER COMMUNICATIONS

Transcript of scientific report at the meeting of the Presidium of NAS of Ukraine, March 25, 2026

The report focuses on overcoming the "nonlinear capacity crisis" in modern fiber-optic networks using the framework of integrable systems. The application of the nonlinear Fourier transform (NFT) and the Riemann—Hilbert problem for data encoding and transmission is discussed. The results of numerical simulations of periodic NFT systems, developed in collaboration with the Aston Institute of Photonic Technologies (UK), are presented, demonstrating signal resilience to nonlinear distortions. The prospects for the implementation of specialized computing tools for the realization of these mathematical methods in telecommunications engineering are outlined.

**Cite this article:** Shepelsky D.G. Advanced mathematical methods for optical fiber communications (transcript of scientific report at the meeting of the Presidium of NAS of Ukraine, March 25, 2026). *Visn. Nac. Akad. Nauk Ukr*. 2026. (6): 31—37. https://doi.org/10.15407/visn2026.06.031