



АНДРІЙЧУК

Михайло Іванович – доктор технічних наук, завідувач відділу числових методів математичної фізики Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України

МОДЕЛЮВАННЯ МАТЕРІАЛІВ ЗІ СПЕЦИФІЧНИМИ ВЛАСТИВОСТЯМИ НА ОСНОВІ АСИМПТОТИЧНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ЗАДАЧ АКУСТИЧНОГО І ЕЛЕКТРОМАГНІТНОГО РОЗСІЮВАННЯ

**Стенограма доповіді на засіданні
Президії НАН України 3 грудня 2025 року**

У доповіді наведено отримані в Інституті прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України нові вагомі результати в галузі аналітично-числового дослідження властивостей неоднорідних матеріалів на основі розв'язання задач акустичного і електромагнітного розсіювання на сукупності розсіювачів малого розміру. Запропонований підхід дозволяє створювати матеріали із заданою просторовою дисперсією, що важливо для багатьох інженерних застосувань, зокрема для розроблення метаматеріалів.

Вельмишановний Анатолію Глібовичу!

Вельмишановні колеги!

В Інституті прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України в результаті багаторічних досліджень розроблено ефективний метод граничних інтегральних рівнянь для задач розсіювання на сукупності малих включень. Цей метод є фундаментальним інструментом для моделювання складних хвильових процесів у неоднорідних середовищах.

Водночас застосування асимптотичного методу розв'язання задач акустичного та електромагнітного розсіювання має на меті створення матеріалів із властивостями, які забезпечують мінімізацію зворотного розсіювання в широкому частотному діапазоні, що на сучасному етапі відповідає потребам зміцнення обороноздатності та безпеки держави.

У процесі розв'язання задач, пов'язаних із формуванням середовищ із заданими акустичними чи електромагнітними влас-

тивостями, значну увагу приділяють методу розв'язування прямої задачі. Серед наукових праць, присвячених цій проблематиці, слід відзначити роботи [1–4], в яких розроблено основи теорії розсіювання неоднорідними об'єктами.

Свого часу відомий американський учений у галузі електродинаміки та поширення хвиль А.Г. Рамм (Alexander G. Ramm) з Університету штату Канзас (Kansas State University) сформулював прямі задачі розсіювання у строгій електродинамічній постановці на основі рівнянь Максвелла. Крім того, він вказав на можливість формування матеріалу, який завдяки розміщенню в певному однорідному середовищі великої кількості тіл малого розміру матиме відмінні від початкових акустичні чи електромагнітні характеристики, зокрема коефіцієнт рефракції та магнітну проникність [5].

Останніми десятиліттями роботи за цим напрямом дедалі більше привертають увагу дослідників, оскільки відкривають шлях до створення на цій основі так званих кіральних середовищ і матеріалів із заданими чи близькими до заданих електродинамічними характеристиками [6–11].

Як правило, результати, отримані в цій галузі, стосуються випадку регулярного розміщення включень у початковій однорідній області (матеріалі). Однак попередні дослідження засвідчили необхідність використання нерегулярного розміщення мікрочлених для досягнення характеристик неоднорідного матеріалу з більш ефективними показниками затухання зворотного розсіювання. Створення таких матеріалів є важливим з точки зору мінімізації видимості літальних апаратів, що підвищує безпеку польотів і посилює захист від можливого раннього їх виявлення.

У наших попередніх роботах було встановлено, що використання покриттів із регулярно вбудованими в початковий матеріал включеннями дає можливість зменшити зворотне розсіювання на 30–40 %. Це досягається завдяки від'ємному значенню коефіцієнта рефракції — чим більшим за модулем є це від'ємне значення, тим меншим є значення зворотного розсі-

ювання. Тому важливим стає формулювання обернених задач, розв'язки яких можна було б використати для розрахунку й оптимізації матеріальних і електрофізичних параметрів покриття з матеріалів, що забезпечують мінімальні характеристики розсіювання.

Отже, ми поставили перед собою завдання на основі отриманих напіваналітичних розв'язків задач акустичного та електромагнітного розсіювання продемонструвати можливість моделювання матеріалів з особливими фізичними характеристиками, зокрема коефіцієнтом рефракції та магнітною проникністю, що відкриває перспективи для створення матеріалів із мінімальними характеристиками зворотного розсіювання.

Ключова перевага розробленого нами підходу полягає у зведенні задачі до системи лінійних алгебраїчних рівнянь фіксованої розмірності, що дає змогу не лише кардинально зменшити обчислювальні витрати, а й забезпечити можливість отримання напіваналітичних розв'язків і відкриває шлях до точного й масштабованого моделювання фізичних процесів у новітніх матеріалах, зокрема в метаматеріалах і наноструктурах.

Як і класичні постановки задач розсіювання, постановка задачі акустичного чи електромагнітного розсіювання ґрунтується на використанні класичного рівняння Гельмгольца для випадку акустичної хвилі та системи рівнянь Максвелла для випадку електромагнітної хвилі [12].

У випадку акустичного розсіювання загальне акустичне поле задовольняє однорідне рівняння Гельмгольца та граничні умови другого роду. Нехай у певну тривимірну область поміщено сукупність включень малого розміру, відстань між якими на порядок більша за їхній розмір. Для розв'язання задачі, враховуючи фізичні властивості області, де відбувається розсіювання, ми отримуємо відповідне інтегральне рівняння для загального поля. Ядро цього рівняння містить функцію Гріна тривимірного простору та функції, що визначають фізичні характеристики матеріалу. Для знаходження розв'язків рівняння ми застосували

запропонований у статті [13] метод колокацій, що приводить до відповідної системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Для її розв'язання було використано метод регуляризації, запропонований у роботі [14], оскільки коефіцієнти, що визначають діагональні елементи матриці такої системи, мають неінтегровані особливості.

У випадку електромагнітного розсіювання знаходження розв'язків задачі розсіювання ґрунтується на системі рівнянь Максвелла

$$\nabla \times \mathbf{E} = i\omega\mu_0\mathbf{H}, \quad \nabla \times \mathbf{H} = -i\omega\epsilon_0\mathbf{E} \quad (1)$$

з використанням граничних умов імпедансного типу. Аналогічно, як і у випадку акустичного розсіювання, від диференціальної постановки задачі переходимо до інтегральної, використовуючи фізичні характеристики області розсіювання. Матриця відповідної системи лінійних алгебраїчних рівнянь також має неінтегровані особливості в діагональних коефіцієнтах, а тому для її регуляризації так само застосовуємо метод, запропонований у [14].

Отримані інтегральні рівняння відіграють ключову роль у виведенні явних формул для матеріальних параметрів неоднорідних середовищ, сформованих шляхом поміщення в однорідний матеріал сукупності малих включень, на поверхні яких задано імпедансні граничні умови, або ці тіла є ідеально провідними [15].

Подіавши оператором Гельмгольца на інтегральне подання розв'язку задачі акустичного розсіювання і враховуючи співвідношення між коефіцієнтами класичного рівняння розсіювання й отриманими для нашого випадку, можна дійти висновку, що коефіцієнт рефракції n^2 неоднорідного середовища із сукупністю малих включень визначається формулою

$$n^2 = n_0^2(1 - 2\pi N h k^{-2}), \quad (2)$$

де n^2 — коефіцієнт рефракції початкового матеріалу; N — параметр, що визначає густину розміщення включень; h — параметр, який описує жорсткість матеріалу включень; k — хвильове число вільного простору.

Оскільки параметр $N > 0$ ми можемо задавати довільно, рівняння (2) демонструє, що, задаючи відповідне N , ми отримуємо в неоднорідному середовищі значення коефіцієнта рефракції

n^2 , який є меншим за коефіцієнт рефракції n_0^2 однорідного середовища. Очевидно, що за певних співвідношень фізичних параметрів у рівнянні (2) можна отримати від'ємні значення коефіцієнта рефракції, що дозволяє мінімізувати характеристики зворотного випромінювання одержаного неоднорідного матеріалу.

У випадку електромагнітного розсіювання подвійна дія оператора набла ($\nabla \times$) на інтегральне рівняння дає можливість отримати явну формулу для магнітної проникності $\mu(x)$ неоднорідного матеріалу з включеннями

$$\mu(x) := \mu_0(x) / \left(1 + \frac{8\pi i}{3\omega\mu_0(x)} h(x)N(x) \right), \quad (3)$$

де $\mu_0(x)$ — магнітна проникність початкового матеріалу; функції $h(x)$ і $N(x)$ визначають імпеданс матеріалу включень і густину їхнього розміщення; ω — частота падаючої електромагнітної хвилі. Формулу (3) отримано для випадку, коли фізичні параметри матеріалу є змінними характеристиками координат, а x — тривимірна координата в просторі.

Таким чином, магнітна проникність нового неоднорідного матеріалу визначається явною формулою, як і у випадку задачі акустичного розсіювання для коефіцієнта рефракції. З формули (3) випливає також, що якщо певним чином задати фізичні параметри включень (наприклад, нехай функція $h(x)$, яка характеризує імпеданс, є суто уявною), отримаємо значення $\mu(x)$, які будуть меншими за магнітну проникність початкового однорідного матеріалу. Коли $h(x)$ є дійсною, ми отримуємо комплексну магнітну проникність. Це дає можливість моделювати матеріали з різними характеристиками випромінювання, зокрема з такими, що забезпечують мінімізацію зворотного розсіювання.

Результати чисельних розрахунків демонструють можливість створення матеріалів зі специфічними параметрами. Розрахунок значень магнітної проникності неоднорідних матеріалів для певних частот випромінювання електромагнітних полів свідчить, що навіть розв'язки прямих задач розсіювання можуть бути підтвердженням ефективності запропонованого методу.

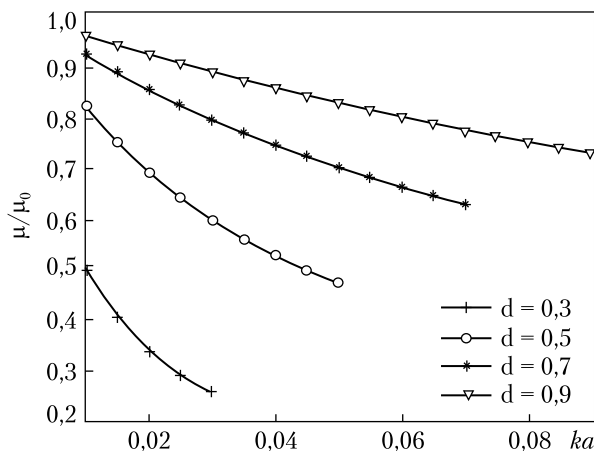


Рис. 1. Залежність магнітної проникності μ від безрозмірного параметра ka

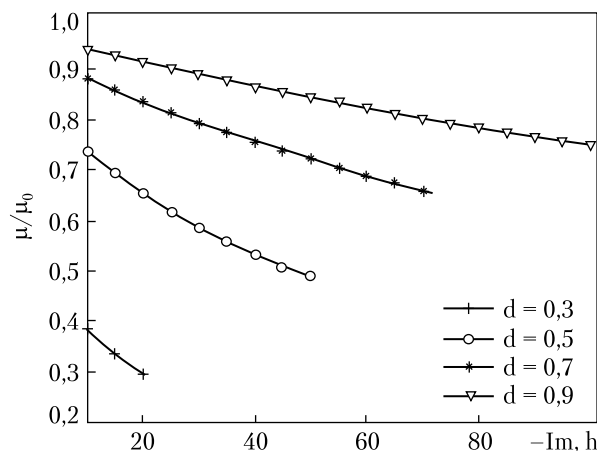


Рис. 2. Залежність магнітної проникності μ від поверхневого імпедансу частинок

Розглянемо конкретні результати моделювання магнітної проникності залежно від фізичних параметрів матеріалу, які найбільше впливають на змінення її значення порівняно з магнітною проникністю початкового однорідного матеріалу.

На рис. 1 наведено результати, отримані для кубічного зразка матеріалу з такими фізичними параметрами: кількість включень $M = 10^3$; хвильове число $k = 10^3 \text{ м}^{-1}$, що відповідає частоті $f = 47,86 \text{ ГГц}$; магнітна проникність початкового матеріалу $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} = 1,256 \cdot 10^{-6} \text{ Гн/м}$; значення радіуса частинок змінюється в межах

$a = 1 \cdot 10^{-5} \text{—} 8 \cdot 10^{-5} \text{ м}$; відстань d між ними вимірюється в сантиметрах. Значення отриманої проникності μ нормалізовано на значення μ_0 .

На рис. 2 наведено залежність величини магнітної проникності μ від значень функції $h(x)$, яка визначає поверхневий імпеданс частинок. Як і в попередньому випадку, значення μ не вдається отримати для всіх можливих співвідношень початкових параметрів задачі. Це пов'язано з тим, що для певного співвідношення цих значень ітераційний процес розв'язання допоміжної системи лінійних алгебраїчних рівнянь, яка відповідає інтегральному рівнянню, не збігається, тобто розв'язок початкової задачі розсіювання не існує за певних співвідношень вхідних параметрів задачі [16].

Отже, розроблено асимптотичний підхід до розв'язання задач акустичного й електромагнітного розсіювання на сукупності включень малого розміру для випадку, коли на їхній границі задаються імпедансні граничні умови або включення є ідеально провідними.

З використанням ефективного поля отримано системи лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення розв'язків задач розсіювання поза областю включень, на відміну від стандартного підходу, де для цього потрібно розв'язувати системи граничних інтегральних рівнянь.

Отримано інтегральні рівняння для ефективного поля розсіювання, на основі яких виведено явні формули для матеріальних параметрів неоднорідних структур (коефіцієнт рефракції і магнітна проникність).

За результатами чисельних розрахунків продемонстровано можливість створення матеріалів з від'ємним коефіцієнтом рефракції для випадку акустичного розсіювання і відмінною від початкової магнітною проникністю для випадку електромагнітного розсіювання.

На завершення хотів би додати, що за результатами проведених досліджень наш співробітник Борис Євстигнєєв підготував і захистив дисертацію на здобуття наукового ступеня доктора філософії.

Дякую за увагу!

За матеріалами засідання підготувала О.О. Мележик

REFERENCES

1. Katsenelenbaum B.Z., Voitovich N.N. Reducing the backscattering via complex impedance coating. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*. 2009. 57(7): 2123—2129. <https://doi.org/10.1109/TAP.2009.2021874>
2. Khodapanah E. Calculation of electromagnetic scattering from an inhomogeneous sphere. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*. 2019. 67(3): 1772—1778. <https://doi.org/10.1109/TAP.2018.2883695>
3. Li S., He Z., Ding D., Gu P., Liu J., Ai X. Efficient EM scattering analysis of uncertain inhomogeneous medium. *IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters*. 2022. 21(6): 1178—1182. <https://doi.org/10.1109/LAWP.2022.3161031>
4. Tsalamengas J.L. Nyström-type technique for electromagnetic wave scattering in inhomogeneous material, plasma and metamaterial slabs. *IEEE Open Journal of Antennas and Propagation*. 2024. 5(2): 297—315. <https://doi.org/10.1109/OJAP.2023.3347704>
5. Ramm A.G. *Scattering of Acoustic and Electromagnetic Waves by Small Impedance Bodies of Arbitrary Shapes*. New York: Momentum Press, 2013.
6. Cuesta F.S., Asadchy V.S., Mirmoosa M.S., Ma X., Tretyakov S.A. Embedding fields into invisible metasurface-bound volumes. In: *Proc. 12th International Congress on Artificial Materials for Novel Wave Phenomena (Metamaterials)*. Espoo, Finland, 2018. P. 87—89. <https://doi.org/10.1109/MetaMaterials.2018.8534065>
7. Yatsenko V.V., Maslovski S.I., Tretyakov S.A., Prosvirnin S.L., Zouhdi S. Plane-wave reflection from double arrays of small magnetoelectric scatterers. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*. 2003. 51(1): 2—11. <https://doi.org/10.1109/TAP.2003.808569>
8. Caloz C., Sihvola A. Electromagnetic chirality. Part 1. The microscopic perspective [electromagnetic perspectives]. *IEEE Antennas and Propagation Magazine*. 2020. 62(1): 58—71. <https://doi.org/10.1109/MAP.2019.2955698>
9. Caloz C., Sihvola A. Electromagnetic chirality. Part 2. The macroscopic perspective [electromagnetic perspectives]. *IEEE Antennas and Propagation Magazine*. 2020. 62(2): 82—98. <https://doi.org/10.1109/MAP.2020.2969265>
10. Sohl C., Gustafsson M., Kristensson G. Bounds on metamaterials in scattering and antenna problems. In: *2nd European Conference on Antennas and Propagation (EuCAP 2007)*. Edinburgh, 2007. P. 1—4. <https://doi.org/10.1049/ic.2007.1413>
11. Chiba H., Notomi M. Graphene-induced on-demand nanocavity based on Si photonic crystal. In: *Proc. 21st OptoElectronics and Communications Conference (OECC) held jointly with 2016 International Conference on Photonics in Switching (PS)*. Niigata, Japan, 2016. P. 1—3.
12. Ramm A.G. *Wave Scattering by Small Bodies of Arbitrary Shapes*. Singapore: World Scientific Publishing Company, 2005. <https://doi.org/10.1142/5765>
13. Ramm A.G. A collocation method for solving integral equations. *International Journal of Computing Science and Mathematics*. 2009. 2(3): 202—208. <https://doi.org/10.1504/IJCSM.2009.027874>
14. Andriychuk M. Asymptotic regularisation of the solution to the problem of electromagnetic field scattering from a set of small impedance particles. *IET Microwaves, Antennas & Propagation*. 2021. 15(10): 1330—1346. <https://doi.org/10.1049/mia2.12171>
15. Ramm A.G., Andriychuk M.I. Scattering of electromagnetic waves by many thin cylinders: theory and computational modeling. *Optics Communications*. 2012. 285(20): 4019—4026. <https://doi.org/10.1016/j.optcom.2012.06.017>
16. Andriychuk M.I., Yevstyhneiev B.Ye. Asymptotic method for solving the problem of scattering of electromagnetic fields by a set of small impedance particles. *Journal of Mathematical Sciences*. 2025. 287(2): 186—204. <https://doi.org/10.1007/s10958-025-07584-9>

Mykhalo I. Andriychuk

*Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics
of the National Academy of Sciences of Ukraine, Lviv, Ukraine*

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9380-8807>

MODELING OF MATERIALS WITH SPECIFIC PROPERTIES BASED ON ASYMPTOTIC SOLUTIONS OF ACOUSTIC AND ELECTROMAGNETIC SCATTERING PROBLEMS

Transcript of scientific report at the meeting of the Presidium of NAS of Ukraine, December 3, 2025

The report presents new significant results obtained at the Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics of the NAS of Ukraine in the field of analytical and numerical research into the properties of inhomogeneous materials based on solving problems of acoustic and electromagnetic scattering on a set of small-sized scatterers. The proposed approach allows creating materials with a given spatial dispersion, which is important for many engineering applications, in particular for the development of metamaterials.

Cite this article: Andriychuk M.I. Modeling of materials with specific properties based on asymptotic solutions of acoustic and electromagnetic scattering problems (transcript of scientific report at the meeting of the Presidium of NAS of Ukraine, December 3, 2025). *Visn. Nac. Akad. Nauk Ukr.* 2026. (2): 39—43. <https://doi.org/10.15407/visn2026.02.039>