

<https://doi.org/10.15407/knit2021.05.060>
УДК 539.3+624.074

Н. Г. САХНО, пров. інженер відділу, аспірант Національного технічного університету
«Харківський політехнічний інститут»

ORCID: 0000-0003-4179-5316

К. В. АВРАМОВ, зав. відділу, д-р техн. наук, проф.

ORCID: 0000-0002-8740-693X

Б. В. УСПЕНСЬКИЙ, старш. наук. співроб., канд. техн. наук

ORCID: 0000-0001-6360-7430

E-mail: Uspensky.kubes@gmail.com

Інститут проблем машинобудування ім. А. М. Підгорного Національної академії наук України
Харків, вул. Пожарського 2/10, Україна, 61064

ДИНАМІЧНА ВТРАТА СТІЙКОСТІ СКЛАДЕНОЇ НАНОКОМПОЗИТНОЇ ОБОЛОНКИ

Досліджено вільні коливання та динамічну втрату стійкості функціонально-градієнтної композитної складеної конічно-циліндричної оболонки з матеріалу, посиленого вуглецевими нанотрубками, у надзвуковому газовому потоці. Розглянуто нанокompозитні матеріали з лінійним розподілом об'ємної частки нанотрубок по товщині. Для оцінки механічних характеристик нанокompозиту застосовано розширене правило змішування. Для моделювання деформування оболонки використано теорію деформацій зсуву високого порядку. Для отримання рівнянь руху конструкції застосовано метод заданих форм та метод Релея — Рітца. Для аналізу динаміки складеної оболонки запропоновано використовувати базисні функції, які автоматично задовольняють умови неперервності переміщень на стику циліндричної та конічної оболонок. Для моделювання впливу надзвукового газового потоку на оболонку використано поршневу теорію.

Розглянуто приклад аналізу динаміки нанокompозитної конічно-циліндричної оболонки під дією надзвукового потоку. Результати аналізу її власних коливань методом Релея — Рітца демонструють високу збіжність з власними частотами оболонки, отриманими методом скінченних елементів. При цьому метод скінченних елементів можна застосовувати лише до оболонки з матеріалу з постійним розподілом нанотрубок по товщині. Досліджено залежність власних частот коливань складеної оболонки від співвідношення довжини конічної та циліндричної частин. Досліджено залежність критичного тиску надзвукового потоку від чисел Маха та виду армування вуглецевими нанотрубками. Оболонки з концентрацією нанотрубок переважно поблизу зовнішньої та внутрішньої поверхонь характеризуються більшими значеннями власних частот та критичного тиску, ніж оболонки з рівномірним розподілом нанотрубок або такі, в яких максимальна концентрація нанотрубок досягається всередині оболонки.

Ключові слова: нанокompозит, динамічна втрата стійкості, складена оболонка, функціонально-градієнтний матеріал, вільні коливання, вуглецеві нанотрубки.

ВСТУП

Стрімкий прогрес технологій та науки призвів до появи нових функціонально-градієнтних матеріалів, посиленних вуглецевими нанотрубками

(ВНТ). Оскільки механічні характеристики ВНТ вищі за характеристики сталі на кілька порядків, вони є вдалим вибором для армування композиту. Конструкції з наноармованих (нанокompозитних) матеріалів є легкими та міцними, тому

Цитування: Сахно Н. Г., Аврамов К. В., Успенський Б. В. Динамічна втрата стійкості складеної нанокompозитної оболонки. *Космічна наука і технологія*. 2021. 27, № 5 (132). С. 60—70. <https://doi.org/10.15407/knit2021.05.060>

такі матеріали є перспективними для аерокосмічної, енергетичної, машинобудівної галузей.

Проблемі оцінки механічних характеристик nanoармованих матеріалів присвячено низку досліджень. У роботі [15] досліджено механічні характеристики нанокompозитів методом скінченних елементів. Для перевірки результатів використано розширене правило змішування. У роботі [21] побудовано модель еквівалентного континууму, в якій механічні властивості оцінюються за допомогою силових констант, що описують міжатомні взаємодії у молекулярній моделі. У роботі [25] обчислено ефективні пружні властивості нанотрубок за допомогою методів мікромеханіки. Ці властивості використано у методі Морі — Танака для обчислення ефективних пружних властивостей нанокompозиту.

Динаміку нанокompозитних циліндрів, армованих ВНТ, під впливом ударного навантаження розглянуто в роботі [20], проведено аналіз вільних коливань та поширення хвиль у конструкції. Статику та динаміку циліндричних оболонок з nanoармованого матеріалу розглянуто в роботі [29]. Аналіз лінійних коливань nanoармованих пластин наведено у роботі [11]. Вільні коливання пологих оболонок подвійної кривизни з функціонально градієнтного композиту з включеннями графенових нанопластинок розглянуто в дослідженні [28]. Математичну модель шарнірно опертої пологої оболонки подвійної кривизни побудовано за допомогою принципу Гамільтона та теорії зсуву високого порядку.

Серію робіт присвячено аналізу динамічної втрати стійкості нанокompозитних оболонок в надзвуковому газовому потоці. Ці задачі є важливими для галузі аерокосмічної техніки, в якій проблеми створення легких та міцних конструкцій є надзвичайно актуальними. У роботі [14] досліджено втрату стійкості функціонально-градієнтної панелі, проведено аналіз впливу типу армування ВНТ на стійкість. У роботі [16] використано метод скінченних елементів для аналізу стійкості та вільних коливань функціонально-градієнтних нанокompозитних панелей. Багато досліджень присвячено аналізу флатера нанокompозитних оболонок у взаємодії з над-

звуковим потоком [7]. Для опису динаміки таких конструкцій застосовуються теорії зсуву високого порядку. Флатер нанокompозитних циліндричних оболонок розглянуто в роботі [30]. У роботі [2] досліджено флатер функціонально градієнтних нанокompозитних балок, панелей, циліндричних та конічних оболонок. У роботі [4] запропоновано метод аналізу флатера нанокompозитних циліндричних оболонок.

Складені оболонки часто застосовуються в аерокосмічній техніці та машинобудуванні. Тому моделюванню поведінки таких конструкцій присвячено низку досліджень. У роботі [9] описано експериментальне дослідження вільних коливань складеної конічно-циліндричної оболонки. Коливання складеної оболонкової конструкції досліджено методом скінченних елементів у роботі [13]. У роботі [10] досліджено вільні коливання тонкостінної конструкції з циліндричними та конічними оболонками. Авторами використано статистичні ряди для моделювання переміщень оболонки. Напіваналітичний метод скінченних елементів використано для аналізу вільних коливань складеної конічно-циліндричної оболонки в роботі [26]. У роботі [5] отримано характеристики вільних коливань конічно-циліндричної оболонки.

Нижче ми пропонуємо новий підхід до аналізу вільних коливань та динамічної втрати стійкості складеної функціонально-градієнтної нанокompозитної конічно-циліндричної оболонки. Аналіз вільних коливань базується на методі Релея — Рітца. Розв'язок задачі розшукується у спеціальній формі, яка точно задовольняє умови неперервності переміщень на стику циліндра та конуса.

Динамічна втрата стійкості нанокompозитної оболонки обумовлена її взаємодією з надзвуковим газовим потоком. Для дослідження динамічної втрати стійкості використовується метод заданих форм. Динаміка конструкції розкладається за власними формами вільних коливань. Показано, що динамічна втрата стійкості виникає внаслідок біфуркації Хоффа [8] положення рівноваги конструкції. Досліджено вплив типу nanoармування на характеристики динамічної втрати стійкості системою.

**ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ
ТА ВЛАСТИВОСТІ МАТЕРІАЛУ**

Розглядається складена конічно-циліндрична оболонка постійної товщини h (рис. 1) з функціонально-градієнтного композиту, армованого ВНТ. Серединна поверхня оболонки має пов'язану з нею криволінійну систему координат x, ϕ (рис. 1), де x — позадвжжня координата; ϕ — окружна координата. Перпендикулярно до серединної поверхні у зовнішньому напрямку розташовано вісь z ($z \in [-h/2, h/2]$).

Переміщення точок оболонки вважаються малими порівняно з її товщиною, тому зв'язок між деформаціями та переміщеннями описується лінійною моделлю. Оскільки оболонка є функціонально-градієнтною та композитною, використовується теорія зсуву високого порядку.

Розглядаються наноармовані матеріали, в яких ВНТ розташовано у позадвжжньому на-

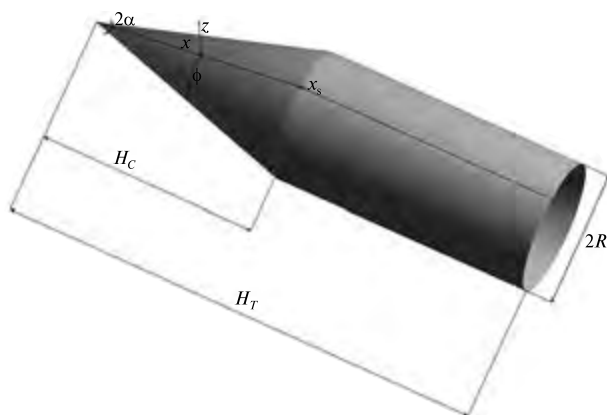


Рис. 1. Ескіз складеної оболонкової конструкції

Таблиця 1. Залежність $V_{CNT}(z)$ для різних типів наноармування

Тип армування	Об'ємна частка ВНТ
UD-CNT	$V_{CNT}(z) \equiv V_{CNT}^*$
FGX-CNT	$V_{CNT}(z) = \frac{4 z }{h} V_{CNT}^*$
FGO-CNT	$V_{CNT}(z) = 2\left(1 - \frac{2 z }{h}\right) V_{CNT}^*$

прямку оболонки, а їхній розподіл є лінійним [18]. В даній роботі розглядаються три типи армування: UD, FGX, FGO, для кожного з яких об'ємна частка ВНТ $V_{CNT}(z)$ залежить від координати z за законами, які наведено у табл. 1. Константа V_{CNT}^* у табл. 1 відповідає сумарній об'ємній частці ВНТ у композиті.

Механічні властивості наноармованого матеріалу можна розрахувати за допомогою правила змішування, докладно описаного в роботах [4, 18]. При цьому механічні характеристики матеріалу нерівномірно розподілені по товщині оболонки, що призводить до утворення функціонально-градієнтної конструкції. Тип наноармування значно впливає на динамічні властивості конструкції.

Метод, описаний в роботі, легко можна розширити для аналізу оболонок з інших наноармованих матеріалів.

Нанокompозитний матеріал є ортотропним, і закон Гука для нього має вигляд

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{\phi\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{12} & Q_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{\phi\phi} \end{bmatrix},$$

$$\sigma_{\phi z} = G_{\phi z}(z)\varepsilon_{\phi z}, \sigma_{xz} = G_{xz}(z)\varepsilon_{xz}, \sigma_{x\phi} = G_{x\phi}(z)\varepsilon_{x\phi}, \quad (1)$$

де $\sigma_{xx}, \sigma_{\phi\phi}, \sigma_{\phi z}, \sigma_{xz}, \sigma_{x\phi}$ — позадвжжнє, кругове напруження і напруження зсуву; $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{\phi\phi}, \varepsilon_{\phi z}, \varepsilon_{xz}, \varepsilon_{x\phi}$ — відповідні деформації;

$$Q_{11}(z) = \beta E_{xx}(z), \quad Q_{22}(z) = \beta E_{\phi\phi}(z),$$

$$Q_{12}(z) = \mu_{\phi x}(z)\beta E_{xx}(z) = \mu_{x\phi}(z)\beta E_{\phi\phi}(z),$$

$$\mu_{\phi x}(z) = \frac{\mu_{x\phi}(z)E_{\phi\phi}(z)}{E_{xx}(z)},$$

$E_{xx}, E_{\phi\phi}$, — модулі Юнга; $G_{x\phi}, G_{xz}, G_{\phi z}, \mu_{x\phi}$ — модулі зсуву та коефіцієнт Пуассона наноармованого матеріалу.

Тонкостінна оболонкова конструкція взаємодіє з надзвуковим газовим потоком, який рухається паралельно осі симетрії конструкції, внаслідок чого виникає динамічна втрата стійкості конструкції. Модель цієї взаємодії буде розглянуто нижче.

**ПОТЕНЦІАЛЬНА ТА КІНЕТИЧНА ЕНЕРГІЯ
ТОНКОСТІННОЇ КОНСТРУКЦІЇ**

Для дослідження динаміки оболонки під дією навантаження слід отримати загальні співвідношення її деформування. Радіус кривизни серединної поверхні тонкостінної конструкції в окружному напрямку (рис. 1) позначимо R_ϕ , а параметр Ляме — A_ϕ . Вони залежать від повздовжньої координати x . Для конструкції з одинарною кривизною радіус кривизни та параметр Ляме вздовж твірної лінії дорівнюють $R_x = \infty, A_x = 1$.

Стиккування циліндричної оболонки відбувається при $x = x_s = H_C / \cos\alpha$. Геометричні параметри оболонки визначаються співвідношеннями

$$R_\phi = \begin{cases} xt\text{g}\alpha & x < x_s, \\ R & x \geq x_s, \end{cases} \quad A_\phi = \begin{cases} x\text{sin}\alpha & x < x_s, \\ R & x \geq x_s, \end{cases} \quad (2)$$

$$R_x = \infty, A_x = 1.$$

Відповідно до роботи [1] зв'язок між деформаціями та переміщеннями тонкостінної конструкції мають вигляд

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \frac{\partial u_x}{\partial x}, \\ \epsilon_{\phi\phi} &= \frac{1}{1+z/R_\phi} \left(\frac{1}{A_\phi} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + \frac{u_x}{A_\phi} \frac{\partial A_\phi}{\partial x} + \frac{u_z}{R_\phi} \right), \\ \epsilon_{x\phi} &= \frac{\partial u_\phi}{\partial x} + \frac{1}{1+z/R_\phi} \left(\frac{1}{A_\phi} \frac{\partial u_x}{\partial \phi} - \frac{u_\phi}{A_\phi} \frac{\partial A_\phi}{\partial x} \right), \\ \epsilon_{xz} &= \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}, \\ \epsilon_{\phi z} &= \frac{\partial u_\phi}{\partial z} + \frac{1}{1+z/R_\phi} \left(\frac{1}{A_\phi} \frac{\partial u_z}{\partial \phi} - \frac{u_\phi}{R_\phi} \right) = \\ &= \frac{\partial u_\phi}{\partial z} + \frac{R_\phi}{R_\phi + z} \left(\frac{1}{A_\phi} \frac{\partial u_z}{\partial \phi} - \frac{u_\phi}{R_\phi} \right) \end{aligned} \quad (3)$$

Для опису переміщень тонкостінної конструкції використовується теорія зсуву високого порядку у роботах [22, 23]:

$$\begin{aligned} u_x(x, \phi, t, z) &= u + z\psi_x + z^2\theta_x + z^3\gamma_x, \\ u_\phi(x, \phi, t, z) &= \left(1 + \frac{z}{R_\phi} \right) v + z\psi_\phi + z^2\theta_\phi + z^3\gamma_\phi, \\ u_z(x, \phi, t, z) &= w, \end{aligned} \quad (4)$$

де u, v, w — проєкції переміщень точок серединної поверхні на координатні осі x, ϕ, z ; ψ_x, ψ_ϕ — кути обертання нормалі до серединної поверхні відносно осей ϕ та x відповідно; $\theta_x, \gamma_x, \theta_\phi, \gamma_\phi$ — невідомі вирази, які можна знайти з граничних умов

$$\epsilon_{xz} \Big|_{z=\pm h/2} = 0, \quad \epsilon_{\phi z} \Big|_{z=\pm h/2} = 0. \quad (5)$$

Підстановка виразів (3) та (4) у (5) дозволяє отримати систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно $\theta_x, \gamma_x, \theta_\phi, \gamma_\phi$, розв'язання якої дозволяє отримати означені функції.

Підстановка (4) в (3) дозволяє розділити змінні x, ϕ, t та z у виразах для деформацій оболонки, отримавши наступні представлення:

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \epsilon_{xx}^{(0)} + z\epsilon_{xx}^{(1)} + z^2\epsilon_{xx}^{(2)} + z^3\epsilon_{xx}^{(3)}, \\ \epsilon_{\phi\phi} &= \epsilon_{\phi\phi}^{(0)} + z\epsilon_{\phi\phi}^{(1)} + z^2\epsilon_{\phi\phi}^{(2)} + z^3\epsilon_{\phi\phi}^{(3)}, \\ \epsilon_{x\phi} &= \epsilon_{x\phi}^{(0)} + z\epsilon_{x\phi}^{(1)} + z^2\epsilon_{x\phi}^{(2)} + z^3\epsilon_{x\phi}^{(3)}, \\ \epsilon_{xz} &= \epsilon_{xz}^{(0)} + z\epsilon_{xz}^{(1)} + z^2\epsilon_{xz}^{(2)} + z^3\epsilon_{xz}^{(3)}, \\ \epsilon_{\phi z} &= \epsilon_{\phi z}^{(0)} + z\epsilon_{\phi z}^{(1)} + z^2\epsilon_{\phi z}^{(2)} + z^3\epsilon_{\phi z}^{(3)}, \end{aligned} \quad (6)$$

де $\epsilon_{xx}^{(i)}, \epsilon_{\phi\phi}^{(i)}, \epsilon_{x\phi}^{(i)}, \epsilon_{xz}^{(i)}, \epsilon_{\phi z}^{(i)}, i = 0, \dots, 3$ — диференціальні вирази відносно $u, v, w, \psi_x, \psi_\phi$.

Кінетична енергія конструкції обчислюється наступним чином:

$$T = 0.5 \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_{-0.5h}^{0.5h} \rho(z) (\dot{u}_x^2 + \dot{u}_y^2 + \dot{u}_z^2) \left(1 + \frac{z}{R_\phi(x)} \right) dz d\phi dx. \quad (7)$$

де $\rho(z)$ — питома маса матеріалу оболонки; $L = H_C / \cos\alpha + H_T - H_C$ — довжина твірної всієї конструкції. Параметри H_T, H_C, α наведено на рис. 1.

Підстановка розкладень (4) в кінетичну енергію (10) дозволяє провести інтегрування за змінною z та перейти до подвійного інтегралу замість потрійного:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi} (r_0 T_0 + r_1 T_1 + \dots + r_5 T_5) d\phi dx, \quad (8)$$

де

$$r_i = \int_{-0.5h}^{0.5h} z^i \rho(z) dz,$$

$T_i (i = 0, \dots, 5)$ — квадратичні форми відносно $\dot{u}, \dot{v}, \dot{w}, \dot{\psi}_x, \dot{\psi}_\phi$.

Потенціальна енергія оболонки обчислюється таким чином:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_{-0.5h}^{0.5h} (\sigma_{xx} \varepsilon_{xx} + \sigma_{\phi\phi} \varepsilon_{\phi\phi} + \sigma_{\phi z} \varepsilon_{\phi z} + \sigma_{xz} \varepsilon_{xz} + \sigma_{x\phi} \varepsilon_{x\phi}) \left(1 + \frac{z}{R_\phi} \right) dz d\phi A_\phi dx. \quad (9)$$

З урахуванням (1) потенціальна енергія дорівнюватиме

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_{-0.5h}^{0.5h} (Q_{11} \varepsilon_{xx}^2 + 2Q_{12} \varepsilon_{\phi\phi} \varepsilon_{xx} + Q_{22} \varepsilon_{\phi\phi}^2 + G_{23} \varepsilon_{\phi z}^2 + G_{13} \varepsilon_{xz}^2 + G_{12} \varepsilon_{x\phi}^2) \left(1 + \frac{z}{R_\phi} \right) dz d\phi A_\phi dx. \quad (10)$$

Завдяки представленням (6) у виразі (10) змінну z можна виділити та виконати інтегрування за цією змінною. Вираз для потенціальної енергії набуває вигляду

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi} \sum_{i=0}^5 \Pi_i d\phi A_\phi dx, \quad (11)$$

де Π_i — квадратичні вирази відносно $u, v, w, \Psi_x, \Psi_\phi$.

ЛІНІЙНІ КОЛИВАННЯ ТОНКОСТІННИХ КОНСТРУКЦІЙ

Дослідження руху оболонки у взаємодії з газовим потоком провадиться методом заданих форм. При цьому її рух розкладається за формами вільних коливань, тому їхній аналіз є важливою задачею для дослідження динамічної втрати стійкості конструкції.

Для визначеності будемо розглядати конструкцію, яку консольно закріплено на колі $x = = L$. Точку оболонки $x = 0$ будемо вважати вільною. Граничні умови при цьому мають вигляд:

$$u(L, \phi, t) = v(L, \phi, t) = w(L, \phi, t) = \Psi_x(L, \phi, t) = \Psi_\phi(L, \phi, t) = 0. \quad (12)$$

Умови неперервності переміщень на колі точки стикування конуса та циліндра мають вигляд

$$\begin{aligned} u(x_s - 0, \phi, t) &= u(x_s + 0, \phi, t) \cos \alpha + w(x_s + 0, \phi, t) \sin \alpha, \\ w(x_s - 0, \phi, t) &= -u(x_s + 0, \phi, t) \sin \alpha + w(x_s + 0, \phi, t) \cos \alpha, \\ \Psi_\phi(x_s - 0, \phi, t) &= \Psi_\phi(x_s + 0, \phi, t). \end{aligned} \quad (13)$$

Значення $x = x_s - 0$ відповідає колу серединної поверхні конуса нескінченно близько до стику оболонок. Значення $x = x_s + 0$ відповідає розрізу циліндра нескінченно близько до стику оболонок.

Для розв'язання задачі аналізу вільних коливань оболонки розділимо змінні x, ϕ, t шляхом обрання представлення переміщень $u(x, \phi, t), v(x, \phi, t), w(x, \phi, t), \Psi_x(x, \phi, t), \Psi_\phi(x, \phi, t)$:

$$\begin{aligned} u(x, \phi, t) &= \tilde{u}(x) \cos(n\phi) \cos(\omega t), \\ v(x, \phi, t) &= \tilde{v}(x) \sin(n\phi) \cos(\omega t), \\ w(x, \phi, t) &= \tilde{w}(x) \cos(n\phi) \cos(\omega t), \\ \Psi_x(x, \phi, t) &= \tilde{\Psi}_x(x) \cos(n\phi) \cos(\omega t), \\ \Psi_\phi(x, \phi, t) &= \tilde{\Psi}_\phi(x) \sin(n\phi) \cos(\omega t), \end{aligned} \quad (14)$$

де n — кількість хвиль по окружній координаті; ω — частота власних коливань; функції $\tilde{u}(x), \tilde{v}(x), \tilde{w}(x), \tilde{\Psi}_x(x), \tilde{\Psi}_\phi(x)$ обираються таким чином, щоб задовольнити умови (13):

$$\begin{aligned} \tilde{u}(x) &= \begin{cases} U(x) \cos \alpha + W(x) \sin \alpha & x < x_s, \\ U(x) & x \geq x_s, \end{cases} \\ \tilde{w}(x) &= \begin{cases} -U(x) \sin \alpha + W(x) \cos \alpha & x < x_s, \\ U(x) & x \geq x_s, \end{cases} \\ \tilde{v}(x) &= V(x), \quad \tilde{\Psi}_x(x) = X(x), \\ \tilde{\Psi}_\phi(x) &= \begin{cases} \Phi(x) & x < x_s, \\ \Phi(x) \cos \alpha & x \geq x_s. \end{cases} \end{aligned} \quad (15)$$

У свою чергу функції $U(x), W(x), V(x), X(x), \Phi(x)$ розшукуються у формі розкладень з невідомими коефіцієнтами за заданими базисними функціями $P_i(x)$:

$$\begin{aligned} U(x) &= \sum_{i=1}^{N_U} A_i P_i(x), \quad V(x) = \sum_{i=1}^{N_V} A_{i+N_U} P_i(x), \\ W(x) &= \sum_{i=1}^{N_W} A_{i+N_U+N_V} P_i(x), \\ X(x) &= \sum_{i=1}^{N_X} A_{i+N_U+N_V+N_W} P_i(x), \\ \Phi(x) &= \sum_{i=1}^{N_\Phi} A_{i+N_U+N_V+N_W+N_X} P_i(x), \end{aligned} \quad (16)$$

де базисні функції $P_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots$) задовольняють граничні умови (12): $P_i(L) = 0, \mathbf{A} = [A_1, \dots,$

A_{N_Σ}], $N_\Sigma = N_U + N_V + N_W + N_X + N_\Phi$ — невідомі параметри.

Аналіз вільних коливань тонкостінної конструкції можна виконати методом Релея — Рітца [6, 24, 27]. Рух оболонки визначається мінімумом функціоналу дії:

$$\int_0^{2\pi/\omega} (T - \Pi) dt \rightarrow \min. \quad (17)$$

Використання розкладень (14)–(16) у виразах (10), (8) дозволяє провести інтегрування та записати кінетичну та потенціальну енергії у вигляді

$$\begin{aligned} T &= \omega^2 \sin^2(\omega t) \tilde{T}(A_1, \dots, A_{N_\Sigma}), \\ \Pi &= \omega^2 \cos^2(\omega t) \tilde{\Pi}(A_1, \dots, A_{N_\Sigma}), \end{aligned} \quad (18)$$

де $\tilde{T}(A_1, \dots, A_{N_\Sigma})$, $\tilde{\Pi}(A_1, \dots, A_{N_\Sigma})$ — квадратичні форми параметрів A_1, \dots, A_{N_Σ} . Таким чином, задачу мінімізації функціоналу дії (17) зведено до задачі мінімізації квадратичної форми відносно цих параметрів:

$$\int_0^{2\pi/\omega} (T - \Pi) dt = \frac{\pi}{\omega} [\tilde{\Pi}(A_1, \dots, A_{N_\Sigma}) - \omega^2 \tilde{T}(A_1, \dots, A_{N_\Sigma})] \rightarrow \min. \quad (19)$$

Функціонал дії є мінімальним, якщо виконуються співвідношення

$$\frac{\partial}{\partial A_i} [\tilde{\Pi}(A_1, \dots, A_{N_\Sigma}) - \omega^2 \tilde{T}(A_1, \dots, A_{N_\Sigma})] = 0, \quad (20)$$

$$i = 1, \dots, N_\Sigma.$$

Рівняння (20) є еквівалентними проблемі власних значень:

$$[\mathbf{C} - \omega^2 \mathbf{M}] \mathbf{A} = 0, \quad (21)$$

де \mathbf{C} — матриця жорсткості; \mathbf{M} — матриця мас, які відповідають матрицям Гессе функцій $\tilde{\Pi}(A_1, \dots, A_{N_\Sigma})$ та $\tilde{T}(A_1, \dots, A_{N_\Sigma})$. Власні значення цієї задачі відповідають квадратам кругових частот коливань оболонки, а власні вектори — формам коливань.

ДИНАМІЧНА СИСТЕМА ЗІ СКІНЧЕННОЮ КІЛЬКІСТЮ СТУПЕНІВ СВОБОДИ

Для аналізу динамічної втрати стійкості конструкцією побудуємо лінійну динамічну систему зі скінченною кількістю ступенів свободи, яка описує рух оболонки. Її конструювання

здійснюється методом заданих форм [19]. Коливання конструкції розкладаються за формами власних коливань $\tilde{u}_j(x)$, $\tilde{v}_j(x)$, $\tilde{w}_j(x)$, $\tilde{\psi}_{x,j}(x)$, $\tilde{\psi}_{\phi,j}(x)$, $j = 1, 2, \dots$, які знаходяться з рівняння (21) та визначаються співвідношеннями (15), (16). Переміщення та кути повороту нормалі подаються у вигляді

$$\begin{aligned} u(x, \phi, t) &= \\ &= \sum_{j=1}^{L_U} \tilde{u}_j(x) [q_j(t) \cos(n\phi) + q_{j+L_U}(t) \sin(n\phi)], \\ v(x, \phi, t) &= \\ &= \sum_{j=1}^{L_V} \tilde{v}_j(x) [q_{j+2L_U}(t) \cos(n\phi) + q_{j+L_V+2L_U}(t) \sin(n\phi)], \\ w(x, \phi, t) &= \sum_{j=1}^{L_W} \tilde{w}_j(x) [q_{j+2L_V+2L_U}(t) \cos(n\phi) + \\ &+ q_{j+L_W+2L_V+2L_U}(t) \sin(n\phi)], \quad (22) \\ \psi_x(x, \phi, t) &= \sum_{j=1}^{L_X} \tilde{\psi}_{x,j}(x) [q_{j+2L_W+2L_V+2L_U}(t) \cos(n\phi) + \\ &+ q_{j+L_X+2L_W+2L_V+2L_U}(t) \sin(n\phi)], \\ \psi_\phi(x, \phi, t) &= \\ &= \sum_{j=1}^{L_\Phi} \tilde{\psi}_{\phi,j}(x) [q_{j+2L_X+2L_W+2L_V+2L_U}(t) \cos(n\phi) + \\ &+ q_{j+L_\Phi+2L_X+2L_W+2L_V+2L_U}(t) \sin(n\phi)], \end{aligned}$$

де $L_* = L_\Phi + 2L_X + 2L_W + 2L_V + 2L_U$ — кількість ступенів свободи конструкції; $\mathbf{q} = [q_1, \dots, q_{L_*}]$ — вектор узагальнених координат конструкції; n — кількість хвиль по окружній координаті. Для аналізу динамічної втрати стійкості оболонкою в розкладеннях (22) враховуються зв'язані форми коливань [4].

Підстановка (22) у вирази для потенціальної та кінетичної енергій (11), (8) та здійснення необхідного інтегрування дозволяє представити потенціальну енергію як квадратичну форму узагальнених координат q_1, \dots, q_{L_*} , а кінетичну — як квадратичну форму узагальнених швидкостей $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_{L_*}$.

Надзвуковий потік, який рухається паралельно осі симетрії конструкції, описується поршне-

вою теорією [3, 12, 17]:

$$p = -\frac{\gamma p_\infty M_*^2}{\sqrt{M_*^2 - 1}} \times \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{M_*^2 - 2}{M_* a_\infty (M_*^2 - 1)} \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{w}{2A_\phi \sqrt{M_*^2 - 1}} \right), \quad (23)$$

де p — тиск газу, який діє на тонкостінну конструкцію, γ — адиабатична експонента, p_∞ — статичний тиск вільного потоку, M_* — число Маха, a_∞ — швидкість звуку вільного потоку.

Віртуальна робота тиску (23) дорівнює

$$\delta A = -\frac{\gamma p_\infty M_*^2}{\sqrt{M_*^2 - 1}} \int_0^L \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{M_*^2 - 2}{M_* a_\infty (M_*^2 - 1)} \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{w}{2A_\phi \sqrt{M_*^2 - 1}} \right) \delta w dx R_\phi d\phi, \quad (24)$$

де δw — варіація радіального переміщення. З урахуванням (22) узагальнені сили $\mathbf{Q} = [Q_1, \dots, Q_{L_*}]^T$ можна тривіально вивести з виразу (24) як лінійні функції узагальнених координат та узагальнених швидкостей:

$$\mathbf{Q} = \Lambda \mathbf{q} + \mathbf{H} \dot{\mathbf{q}}, \quad (25)$$

де Λ , \mathbf{H} — матриці розмірностей $L_* \times L_*$.

Рівняння руху оболонки в газовому потоці можна отримати у формі рівнянь Лагранжа II типу. Використовуючи вирази для потенціальної та кінетичної енергій та вектор узагальнених сил (25), рівняння руху можна записати у формі

$$\mathbf{M}^{(f)} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}^{(f)} \dot{\mathbf{q}} = \Lambda \mathbf{q} + \mathbf{H} \dot{\mathbf{q}}, \quad (26)$$

де $\mathbf{M}^{(f)}$ та $\mathbf{C}^{(f)}$ — матриці мас та жорсткостей конструкції.

Властивості стану рівноваги $\mathbf{q} = \mathbf{0}$ динамічної системи (26) та властивості стану рівноваги тонкостінної конструкції (рис. 1) в надзвуковому газовому потоці є однаковими. Нестійкість стану рівноваги системи (26) характеризує динамічну втрату стійкості тонкостінною конструкцією. Для дослідження останньої дослідимо стійкість стану рівноваги системи (26). Для цього система (26) представляється у формі задачі Коші. Введемо вектор узагальнених швидкостей $\mathbf{g} = \dot{\mathbf{q}}$.

Система (26) відносно координат $[\mathbf{q}, \mathbf{g}]$ набуває вигляду задачі Коші:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{g} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{E} \\ \tilde{\Lambda} & \tilde{\mathbf{H}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{g} \end{bmatrix}, \quad (27)$$

де

$$\tilde{\Lambda} = \mathbf{M}^{(f)-1} (\Lambda - \mathbf{C}^{(f)}), \quad \tilde{\mathbf{H}} = \mathbf{M}^{(f)-1} \mathbf{H},$$

\mathbf{E} — одинична матриця.

Аналіз стійкості тривіального положення рівноваги системи (27) зводиться до розв'язання задачі пошуку власних значень λ матриці

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{E} \\ \tilde{\Lambda} & \tilde{\mathbf{H}} \end{bmatrix}.$$

Власні значення відповідають характеристичним показникам системи (34), за знаком дійсної частини яких можна судити про стійкість положення рівноваги.

ЧИСЕЛЬНИЙ АНАЛІЗ ЛІНІЙНИХ КОЛИВАНЬ

Коливання тонкостінної оболонкової конструкції, зображеної на рис. 1, досліджувались при таких значеннях її параметрів:

$$H_T = 10.10 \text{ м}, H_C = 4.04 \text{ м}, R = 1.2 \text{ м}, \quad (28)$$

$$\alpha = 16.53^\circ, h = 5 \text{ мм}.$$

Оболонку виготовлено з нанокompозитного матеріалу з полімерною матрицею PmPV, яку армовано одношаровими ВНТ, орієнтованими вздовж твірної лінії оболонки. Об'ємна частка ВНТ становить $V_{CNT} = 0.28$. Характеристики нанокompозитного матеріалу такі [18]:

$$E_{xx}(z) = 7.91 \cdot 10^{11} V_{CNT}(z) + 2.50 \cdot 10^9,$$

$$E_{\phi\phi}(z) = \frac{1.585 \cdot 10^{10}}{4(1 - V_{CNT}(z))},$$

$$G_{x\phi}(z) = G_{xz}(z) = G_{\phi z}(z) = \frac{1.11 \cdot 10^9}{1.07(1 - V_{CNT}(z))},$$

$$\mu_{x\phi}(z) = -0.17 V_{CNT}(z) + 0.34,$$

$$\rho(z) = 250.00 V_{CNT}(z) + 1150.00.$$

Розрахунок вільних коливань методом Релея — Рітца було здійснено за допомогою тригонометричних базисних функцій у розкладенні

(16), які задовольняють граничні умови (12):

$$P_i(x) = \cos\left(\frac{(2i-1)\pi}{L}x\right), \quad i = 1, 2, \dots$$

Аналіз збіжності перших 30 власних частот коливань оболонки свідчить, що доцільною кількістю базисних функцій (16) є $N_U = N_V = N_W = N_X = N_\Phi = 35$. Порівняння деяких з цих частот з результатами скінченно-елементного моделювання в середовищі ANSYS наведено в табл. 2. Тут i — номер частоти, n — кількість хвиль у окружному напрямку на відповідній формі, ω_i — результати розрахунку власних частот методом Релея — Рітца; графа ω_p , ANSYS — результати модального аналізу методом скінченних елементів, δ — відносна похибка результатів за методом Релея — Рітца у порівнянні з методом скінченних елементів. З даних табл. 2 видно, що запропонований метод дозволяє точно оцінити власні частоти коливань складеної оболонки. Перша частота коливань оболонки відповідає значенню $n = 6$.

На рис. 2 показано дві власні форми коливань оболонки, що відповідають значенням $n = 6$, які розраховано методом скінченних елементів. Видно еволюцію власних форм коливань. Обидві форми (рис. 2, а та б) локалізовані в циліндричній частині оболонки та відповідають власним формам оболонки 1, 10 в загальному переліку. Конічна частина конструкції є жорсткішою, ніж циліндрична, тому їй відповідають власні форми з більшою власною частотою.

Власні частоти та форми коливань було розраховано для трьох видів наноармування: UD, FGX, FGO (табл. 1). Було досліджено власні

Таблиця 2. Порівняння частот вільних коливань конструкції з результатами скінченно-елементного аналізу

i	n	ω_p , Гц	ω_i , Гц ANSYS	δ
1	6	17.787	17.582	0.01
4	4	20.764	20.362	0.019
7	9	28.360	28.719	0.012
10	6	31.603	31.064	0.017
13	2	35.655	34.014	0.048
16	10	38.037	38.499	0.012
19	11	41.174	42.186	0.023

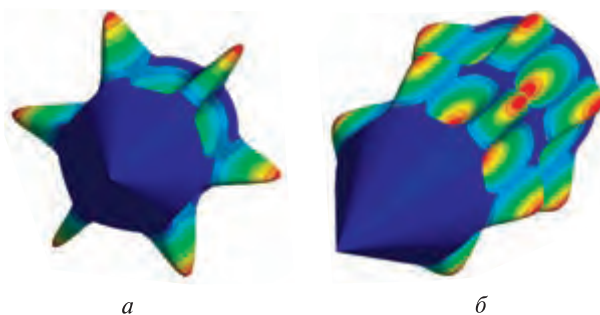


Рис. 2. Форми власних коливань конструкції з $n=6$ хвилями в окружному напрямку, що відповідають номерам власних частот: а — 1, б — 10

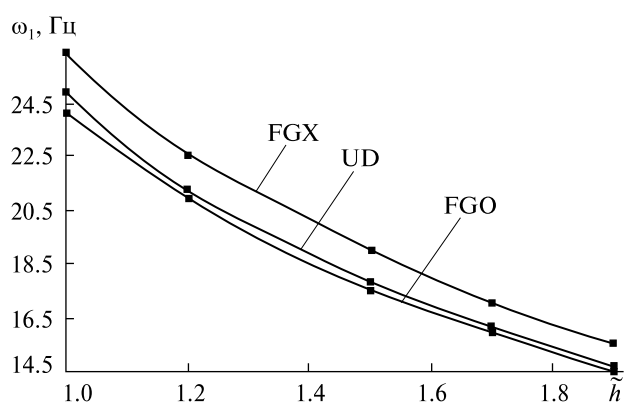


Рис. 3. Залежність першої власної частоти від \tilde{h} для різних типів наноармування

коливання для різних значень співвідношення висоти циліндричної та конічної оболонок $\tilde{h} = (H_T - H_C) / H_C$. Результати розрахунку першої власної частоти для різних видів армування ВНТ наведено на рис. 3. При проведенні розрахунків довжина конуса H_C та кут α були фіксовані ($H_C = 4.04$ м, $\alpha = 16.53^\circ$), а довжина циліндра $H_T - H_C$ варіювалась. З цих залежностей видно, що перша власна частота зменшується при підвищенні висоти циліндричної частини при фіксованих розмірах конічної. Аналогічні залежності спостерігаються для інших власних частот. Найбільші власні частоти спостерігаються при використанні FGX-армування, а найменші — при FGO-наноармуванні.

АНАЛІЗ ДИНАМІЧНОЇ ВТРАТИ СТІЙКОСТІ

Дослідимо динамічну втрату стійкості складеною оболонковою конструкцією, яку розгляну-

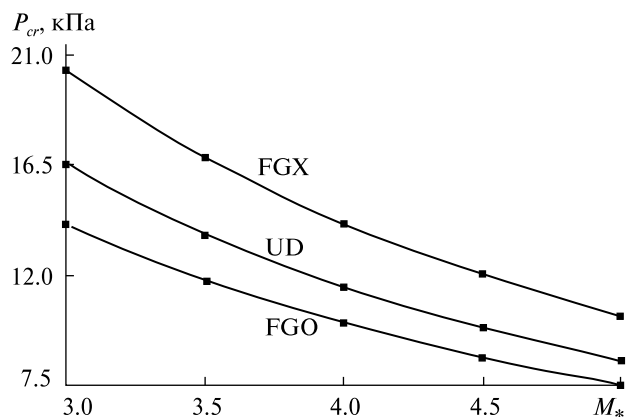


Рис. 4. Залежність критичного тиску від числа Маха для різних видів наноармування

Таблиця 3. Значення критичного тиску для складеної нанокомпозитної оболонки

M_*	Тип нанокомпозиту					
	UD		FGX		FGO	
	n	p_{cr} , кПа	n	p_{cr} , кПа	n	p_{cr} , кПа
3	14	16.552	13	20.343	16	14.038
3.5	14	13.606	13	16.772	16	11.739
4	15	11.516	14	14.122	15	10.049
4.5	15	9.893	14	12.132	16	8.613
5	13	8.456	12	10.297	16	7.516

то у попередньому розділі при її взаємодії з надзвуковим газовим потоком. В розкладенні (22) використано власні форми коливань, які отримано раніше. Всі розкладення (22) включають однакове число взаємодіючих форм $L_U = L_V = L_W = L_X = L_\Phi$.

Для дослідження втрати стійкості досліджується залежність характеристичних показників λ від параметрів потоку p_∞ , M_* та розшукується така комбінація параметрів, при якій відбувається зміна стійкого тривіального стану рівноваги системи (27) на нестійкий. Така зміна відбувається в точці біфуркації Хопфа, коли спостерігається пара комплексно-сполучених характеристичних показників з нульовою дійсною частиною: $\lambda_{1,2} = \pm i\Omega$, де i — уявна одиниця. Параметри надзвукового потоку в точці біфуркації називаються критичними.

Критичне значення тиску p_∞ позначається p_{cr} . Для його визначення провадився пошук $\hat{p}_{crn} = p_\infty$, $\exists \lambda_k, \lambda_l: \text{Re}(\lambda_k) = 0, \lambda_l = -\lambda_k, n = 2 \dots 30$. Після того як для всіх значень n з заданого діапазону буде визначено критичний тиск \hat{p}_{crn} , величина p_{cr} визначається як $p_{cr} = \min(\hat{p}_{crn})$. Ця процедура проводиться для різних значень числа Маха.

Результати аналізу динамічної втрати стійкості наведено в табл. 3 для різних типів наноармування. Слід зазначити, що кількість хвиль за окружною координатою, при яких відбувається втрата стійкості, є досить високим — від 12 до 16. Таким чином, при аналізі складених оболонок необхідно проводити розрахунки для широкого діапазону параметру n .

На рис. 4 наведено залежності $p_{cr}(M_*)$ для різних типів наноармування. Найбільше значення критичного тиску є характерним для FGX-наноармування, тоді як FGO-композитна оболонка втрачає стійкість при найменшому значенні тиску. При цьому тип наноармування має великий вплив на значення критичного тиску (до 1.5 разів). Аналогічна залежність між типом наноармування та власними частотами є значно менш вираженою. Крім того, критичний тиск дуже зменшується при підвищенні швидкості потоку: при підвищенні числа Маха з 3 до 5 він зменшується майже удвічі.

ВИСНОВКИ

Запропоновано математичну модель динамічної поведінки складеної оболонкової конструкції з функціонально-градієнтного нанокомпозитного матеріалу в надзвуковому газовому потоці на базі теорії зсуву високого порядку. Для отримання рівнянь руху використано метод заданих форм, при якому рух системи розкладається за формами вільних коливань конструкції. Для отримання форм вільних коливань складеної конструкції використано метод Релея — Рітца з новою системою кускових базисних функцій.

Динамічна втрата стійкості конструкції відбувається внаслідок біфуркації Хопфа, для пошуку якої розраховано характеристичні показники.

Проведено порівняння результатів розрахунку методом Релея — Рітца з власними частотами та формами, які отримано МСЕ.

Для розглянутих параметрів виявлено незначну залежність власних частот від типу нанокompозиту.

Проведений аналіз динамічної втрати стійкості дозволяє стверджувати, що критичний тиск великою мірою залежить від типу нанокompозиту матеріалу. Зокрема раціональний вибір

такого нанокompозиту може запобігти виникненню автоколивань в конструкції, які є наслідком втрати нею стійкості. Значення критичного тиску залежить від швидкості потоку.

Це дослідження частково фінансувалося Національним фондом досліджень України (грант 2020.02/128).

REFERENCES

- Amabili M. (2015). Non-linearities in rotation and thickness deformation in a new third-order thickness deformation theory for static and dynamic analysis of isotropic and laminated doubly curved shells. *Int. J. Non-Linear Mechanics*, **69**, 109–128 [in English].
- Asadi H. (2018). Numerical simulation of the fluid-solid interaction for CNT reinforced functionally graded cylindrical shells in thermal environments. *Acta Astronaut.*, **138**, 214–224 [in English].
- Avramov K. V., Chernobryvko M. V., Kazachenko O., Batutina T. J. (2016). Dynamic instability of parabolic shells in supersonic gas stream. *Meccanica*, **51**, 939–950 [in English].
- Avramov K V., Chernobryvko M., Uspensky B., Seitkazenova K. K., Myrzaliyev D. (2019). Self-sustained vibrations of functionally graded carbon nanotubes-reinforced composite cylindrical shells in supersonic flow. *Nonlinear Dynamics*, **98** (3), 1853–1876 [in English].
- Caresta M., Kessissoglou N. (2010). Free vibrational characteristics of isotropic coupled cylindrical–conical shells. *J. Sound and Vib.*, **329** (6), 733–751 [in English].
- Chernobryvko M. V., Avramov K. V., Romanenko V. N., Batutina T. J., Tonkonogenko A. M. (2014). Free linear vibrations of parabolic shells. *Meccanica*, **49** (8), 14–21 [in English].
- Chwał M., Muc A. (2019). Buckling and free vibrations of nanoplates-comparison of nonlocal strain and stress approaches. *Appl. Sci.*, **9**, 1409 [in English].
- Hoff N. J. (1951). The dynamics of the buckling of elastic columns. *Proc. of the Soc. for Exper. Stress analysis*, **9** (1), 68–74 [in English].
- Hu W. C. L., Raney J. P. (1965). Experimental and analytical study of vibrations of joined shells. *AIAA J.*, **5**(5), 976–980 [in English].
- Irie T., Yamada G., Myramoto Y. (1984). Free vibration of joined conical–cylindrical shells. *J. Sound and Vib.*, **95**(1), 31–39 [in English].
- García-Macías E., Rodríguez-Tembleque L., Sáez A. (2018). Bending and free vibration analysis of functionally graded graphene vs. carbon nanotube reinforced composite plates. *Composite Struct.*, **186**, 123–138 [in English].
- Krumhaar Hans (1963). The accuracy of linear piston theory when applied to cylindrical shells. *AIAA J.*, **1** (6), 1448–1449 [in English].
- Lashkari M., Weingarten V. I. (1973). Vibrations of segmented shells. *Exp. Mech.*, **13**(3), 120–125 [in English].
- Lei Z. X., Zhang L. W., Liew K. W. (2016). Buckling analysis of CNT reinforced functionally graded laminated composite plates. *Composite Struct.*, **152**, 62–73 [in English].
- Liu Y. J., Chen X. L. (2003). Evaluations of the effective material properties of carbon nanotube-based composites using a nanoscale representative volume element. *Mechanics of Materials*, **35**, 69–81 [in English].
- Mehar K., Panda S. K., Mahapatra T. R. (2017). Theoretical and experimental investigation of vibration characteristic of carbon nanotube reinforced polymer composite structure. *Int. J. mech. Sci.*, **133**, 319–329 [in English].
- Mehri M., Asadi H., Kouchakzadeh M. A. (2017). Computationally efficient model for flow-induced instability of CNT reinforced functionally graded truncated conical curved panels subjected to axial compression. *Comput. Methods Appl. Mech. Energ.*, **318**, 957–980 [in English].
- Mehri M., Asadi H.; Wang Q. (2016). On dynamic instability of a pressurized functionally graded carbon nanotube reinforced truncated conical shell subjected to yawed supersonic airflow. *Composite Struct.*, **153**, 938–951 [in English].
- Meirovitch L. (1998). *Elements of vibration analysis*. New York: McGraw-Hill Publishing Company, 560 p [in English].
- Moradi-Dastjerdi R., Foroutan M., Pourasghar A. (2013). Dynamic analysis of functionally graded nanocomposite cylinders reinforced by carbon nanotube by a mesh-free method. *Materials and Design*, **44**, 256–266 [in English].
- Odegard G. M., Gates T. S., Wise K. E., Park C., Siochi E. J. (2003). Constitutive modeling of nanotube-reinforced polymer composites. *Composites Science and Technology*, **63**, 1671–1687 [in English].

22. Reddy J. N. (1984). A simple higher-order theory for laminated composite plates. *ASME J. Applied Mechanics*, **51**, 745–752 [in English].
23. Reddy J. N. (1984). A refined nonlinear theory of plates with transverse shear deformation. *Int. J. Solids and Structures*, **20** (9/10), 881–896 [in English].
24. Ritz W. (1909). Über eine Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der mathematischen Physik. *J. für die reine und angewandte Mathematik*. Bd 135, Heft 1, 61 S. [in Deutsch].
25. Seidel G. D., Lagoudas D. C. (2006). Micromechanical analysis of the effective elastic properties of carbon nanotube reinforced composites. *Mechanics of Materials*, **38**, 884–907 [in English].
26. Sivadas K. R., Ganesan N. (1990). Free vibration of cantilever conical shells with variable thickness. *Comput. Struct.*, **36**(3), 559–566 [in English].
27. Strutt J. W. (Rayleigh) The theory of sound. 2nd edition. London and New York, McMillan and Co, (1894) V. 1, 480 p.; (1896) V. 2, 504 p. [in English].
28. Wang A., Chen H., Hao Y., Zhang W. (2018). Vibration and bending behavior of functionally graded nanocomposite doubly-curved shallow shells reinforced by graphene nanoplatelets. *Results in Phys.*, **9**, 550–559 [in English].
29. Zhang L. W., Lei Z. X., Liew K. M., Yu J. L. (2014). Static and dynamic of carbon nanotube reinforced functionally graded cylindrical panels. *Composite Struct.*, **111**, 205–212 [in English].
30. Zhang L. W., Song Z. G., Liew K. M. (2017). Modeling aerothermoelastic properties and active flutter control of nanocomposite cylindrical shells in supersonic airflow under thermal environments. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, **325**, 416–433 [in English].

Стаття надійшла до редакції 09.11.2020

Після доопрацювання 30.09.2021

Прийнято до друку 11.10.2021

Received 09.11.2020

Revised 30.09.2021

Accepted 11.10.2021

N. H. Sakhno, Postgraduate student at the National Technical University «Kharkiv Polytechnical Institute», Leading Engineer

ORCID: 0000-0003-4179-5316

K. V. Avramov, Head of Department, Dr. Sci. in Tech., Professor

ORCID: 0000-0002-8740-693X

B. V. Uspensky, Senior Researcher, Ph.D. in Tech.

ORCID: 0000-0001-6360-7430

E-mail: Uspensky.kubes@gmail.com

A. Pidhorneyi Institute of Mechanical Engineering Problems of the NAS of Ukraine

2/10 Pozharsky Str., Kharkiv, 61064 Ukraine

DYNAMIC INSTABILITY OF A COMPOUND NANOCOMPOSITE SHELL

Free oscillations and dynamic instability due to supersonic airflow pressure are investigated in a functional-gradient compound composite conical-cylindrical shell made of a carbon nanotubes-reinforced material. Nanocomposite materials with a linear distribution of the volumetric fraction of nanotubes over the thickness are considered. Extended mixture rule is used to estimate nanocomposite's mechanical characteristics. A high-order shear deformation theory is used to represent the shell deformation. The assumed-mode technique, along with a Rayleigh-Ritz method, is applied to obtain the equations of the structure motion. To analyze the compound structure dynamics, a new system of piecewise basic functions is suggested. The pressure of a supersonic flow on the shell is obtained by using the piston theory.

An example of the dynamic analysis of a nanocomposite conical-cylindrical shell in the supersonic gas flow is considered. The results of its modal analysis using the Rayleigh-Ritz technique are close to the natural frequencies of the shell obtained by finite element analysis. In this case, finite element analysis can only be used for shells made of material with a uniform distribution of nanotubes over the thickness. The dependence of the natural frequencies of a compound shell on the ratio of the lengths of the conical and cylindrical parts is studied. The dependence of the critical pressure of a supersonic flow on the Mach numbers and the type of carbon nanotubes reinforcement is investigated. Shells with a concentration of nanotubes predominantly near the outer and inner surfaces are characterized by higher values of natural frequencies and critical pressure than the shells with a uniform distribution of nanotubes or with a predominant concentration of nanotubes inside the shell.

Keywords: joined conical-cylindrical shell in supersonic flow, functionally graded carbon nanotubes-reinforced composite, dynamic instability, assumed-mode method.