https://doi.org/10.15407/knit2023.04.067
УДК 551.511.31, 534.015.1

О. Н. КРИШТАЛЬ, пров. наук. співроб., д-р фіз.-мат. наук
https://orcid.org/0000-0003-1683-677X
E-mail: alexandr.kryshtal@gmail.com
А. Д. ВОЙЦЕХОВСЬКА, старш. наук. співроб., канд. фіз.-мат. наук
https://orcid.org/0000-0002-4255-3792
E-mail: voitsekhovska.anna@gmail.com
О. К. ЧЕРЕМНИХ, чл.-кор. НАН України, зав. відділу, д-р фіз.-мат. наук
https://orcid.org/0000-0001-6789-3382
E-mail: oleg.cheremnykh@gmail.com
С. О. ЧЕРЕМНИХ, старш. наук. співроб., канд. фіз.-мат. наук
https://orcid.org/0000-0003-2685-5325
E-mail: ikdchereremnykh@gmail.com

Інститут космічних досліджень Національної академії наук України та Державного космічного агентства України
просп. Академіка Глушкова 40, к. 4/1, Київ-187, Україна, 03680

ДОСЛІДЖЕННЯ ДИСПЕРСІЙНОГО РІВНЯННЯ ДЛЯ ШИРОТНИХ АКУСТИКО-ГРАВІТАЦІЙНИХ ХВИЛЬ

Акустико-гравітаційні хвилі є прикладом процесів, які значною мірою визначають динаміку земної атмосфери. Пов’язано це з тим, що джерела цих хвиль розташовані по всій висоті атмосфери, — від самого «низу», де діють землетруси, вулканічні викиди, цунамі, торнадо тощо, і до самого «верху», де діють збурення сонячного вітру, магнітні бурі і висипання часток у високих широтах. Відбувається активний обмін енергією між всіма шарами атмосфери Землі і взаємодія хвильових збурень суттєво різних масштабів — від кількох тисяч кілометрів до сотень метрів, та поява і розвинення процесів конвекції і турбулізації в середовищі. Здавалося, що у таких умовах повинні домінувати тільки нелінійні процеси. Значною мірою так воно і є, але разом з тим спостереження вказують на те, що у процесі поширення акустико-гравітаційних хвиль (АГХ) у багатьох випадках визначальними виявляються ефекти, які можуть бути вичерпно описані в рамках лінійного наближення теорії збурень і добре розвиненої теорії коливань. При цьому при створенні моделей процесів виявилося доцільним використовувати достатньо обґрунтовані фізичні наближення, такі як ізотермічність атмосфери, її необмеженість в горизонтальному напрямку і стисливість у вертикальному. Враховуючи реальні масштаби АГХ, ми знехтували кривизною земної поверхні і в будь якій точці поверхні вважали її локально пласкою, та користувалися в розрахунках декартовою системою координат X, Y, Z. Для опису середовища є сенс використовувати бездисипативну гідродинаміку, а в рівноважному стані — рівняння гідростатичної рівноваги і барометричне рівняння. Наведені вище наближення та математичний апарат теорії коливань і теорії диференційних рівнянь дозволяють при дослідженні початкової системи рівнянь, що описують динаміку АГХ, в результаті отримати дисперсійне рівняння у вигляді полінома четвертого степеня відносно кутової частоти обертання ω *як функції нормованого хвильового вектора збурення* $\vec{k}$ *(АГХ). Отримання спектру АГХ як спектру власних коливань атмосфери у вигляді* $\omega = \omega(\vec{k})$ *і його дослідження можна вважати остаточним розв’язком початкової*

Цитування: Кришталь О. Н., Войцеховська А. Д., Черемних О. К., Черемних С. О. Дослідження дисперсійного рівняння для широтних акустико-гравітаційних хвиль. *Космічна наука і технологія*. 2023. **29**, № 4 (143). С. 67—77. https://doi.org/10.15407/knit2023.04.067

проблеми, якщо знехтувати очевидним впливом на спектр АГХ кутової частоти обертання атмосфери Ω, яка неодмінно повинна бути наявною в дисперсійному рівнянні внаслідок впливу сили Коріоліса. Формальним приводом для відсутності у дисперсійному рівнянні (ДР) складових вектора $\vec{\Omega}$ є той факт, що $|\vec{\Omega}|$ мінімум на два порядки величини менша за характерну частоту ω_0 обертання атмосфери, що дорівнює частоті акустичної відсічки. Разом з тим вдосконалення сучасної апаратури атмосферних спостережень висуває підвищені вимоги до точності модельних розв'язків ДР. У цьому сенсі розв'язок ДР в роботі [Cheremnykh O. K. et al. Kinematics and Phys. Celestial Bodies. 2020. **36***, № 2. P. 64—78] можна розглядати як розв'язок «нульового порядку» за малим параметром $\alpha = |\vec{\Omega}|/\omega_0$. До того ж за методом отримання цей розв'язок є наближеним. За означенням точнішим є розв'язок, що його отримано з врахуванням доданків з $\alpha \neq 0$ у модифікованому ДР, в роботі [Cheremnykh O. K. et al. Kinematics and Phys. Celestial Bodies, 2022.* **38***, № 3. P. 121—131]. Але і він є наближеним.*

В даній роботі детально досліджується дисперсійне рівняння для широтних АГХ. Необхідність такого розгляду є наслідком структури цього рівняння, а саме наявності в ньому лінійного доданку, пропорційного частоті. Попередній аналіз показав, що наявні математичні методи не дають однозначного розв'язку цього рівняння. Це наводить на думку про дослідження можливих розв'язків рівняння щодо їхнього збігу з отриманими раніше для деяких часткових випадків. Таке дослідження дозволяє нам відібрати правильне рішення. Показано, що метод Ейлера — Лагранжа дозволяє за певних додаткових умов отримати точний розв'язок модифікованого рівняння для АГХ у замкненому аналітичному вигляді.

***Ключові слова**: акустико-гравітаційні хвилі, атмосфера Землі, метод Ейлера — Лагранжа, дисперсійне рівняння.*

ВСТУП

Акустико-гравітаційні хвилі (АГХ) є унікальним природним явищем в атмосферах Сонця, Землі та інших планет, яке значною мірою визначає динаміку атмосфер цих космічних об'єктів [12, 19, 21]. Джерелами АГХ в земній атмосфері є землетруси, вулканічні викиди, торнадо, грози, сонячні затемнення, рухи сонячного термінатора, висипання заряджених часток та дисипація струмів у полярних областях, магнітосферні бурі, суббурі, потужні наземні вибухи та запуски ракет [6, 17]. Результати численних теоретичних та експериментальних досліджень показали, що АГХ дають значний внесок у динаміку та енергетику атмосфери Землі, забезпечуючи ефективну взаємодію між різними висотними рівнями [4, 15]. Значну роль ці хвилі відіграють у формуванні атмосферної конвекції та турбулентності. Вони також суттєво впливають на формування погодних систем та інші атмосферні процеси [20]. У теперішній час для дослідження АГХ удосконалюються наземні та супутникові методи спостереження атмосфери Землі та Сонця, ускладнюються теоретичні моделі, покращуються програми чисельних розрахунків, ставляться завдання врахування нелінійних ефектів. Незважаючи на те що останнім часом були відкриті і досліджені дуже цікаві ефекти, пов'язані з нелінійністю АГХ [23, 25, 27, 28], ще й досі залишаються нерозв'язаними і актуальними проблеми АГХ, які можна описати в рамках лінійного наближення теорії збурень і за допомогою добре відомої теорії коливань [11, 16, 30, 31]. До того ж для їхнього розв'язування, як показують дані спостережень [18], можуть бути використані змістовні фізичні наближення, як от: локальна однорідність атмосфери у певному напрямку, нехтування впливом магнітного поля, відносно проста початкова система рівнянь гідродинаміки тощо. На відміну від хвиль, що поширюються в іоносфері та магнітосфері, існування яких суттєво залежить від стану навколоземної плазми [14], геометрії магнітного поля Землі [10] та зовнішніх космічних джерел збурення, АГХ реалізуються в слабоіонізованому середовищі, і при їхньому розгляді можна знехтувати впливом заряджених частинок та магнітного поля. Все це дозволяє використовувати у процесі розв'язування формалізм дисперсійного рівняння і отримати дисперсійні співвідношення для АГХ у вигляді $\omega = \omega(\vec{k})$, де ω — кутова частота лінійного збурення середовища (тобто АГХ), а $\vec{k}$ — хвильовий вектор АГХ.

У недавніх роботах [9, 13] було розглянуто вплив обертання атмосфери Землі на спектр акустико-гравітаційних хвиль. У багатьох роботах з дослідження хвильових збурень у атмосфері Землі, що обертається, використовують так зване «традиційне» наближення [7]. У рамках цього наближення враховується лише вертикальний компонент параметра Коріоліса $2\Omega\sin\phi$, де Ω — кутова частота обертання атмосфери, а ϕ —

широта місця поширення хвилі. Такий розгляд зазвичай обґрунтовують тим [13, 22, 35], що для високоширотних областей атмосфери ($\phi \approx \pi/2$), можна не враховувати горизонтальний компонент параметра Коріоліса $2\Omega\cos\phi$. У роботі [9] було запропоновано новий математичний підхід, що дозволяє вивчити вплив як горизонтального, так і вертикального компонента частоти обертання Землі на спектр акустико-гравітаційних хвиль. Зокрема в роботі [9] було показано, що є два випадки реалізації АГХ з урахуванням обертання атмосфери. У першому випадку хвилі поширюються вздовж широти, тоді як у другому — вздовж довготи. У роботі [9] основна увага приділялася хвилям, що поширюються по довготі. У цій роботі ми проаналізуємо хвилі, що поширюються по широті і порівняємо наші результати з результатами роботи [9]. Зазначимо, що нас цікавитиме насамперед поведінка хвильових збурень на різних широтах поблизу частот порядку Ω, де, як ми очікуємо, відбуватиметься помітна деформація спектра хвиль, що розглядаються. Акустико-гравітаційні хвилі з частотами порядку частоти обертання Землі лежать у тому ж частотному діапазоні, як і добре відомі хвилі Россбі [26]. Останні відіграють важливу роль у динаміці атмосфери та океану Землі [16, 27]. Тому дослідження акустико-гравітаційних хвиль із частотами порядку частоти обертання Землі є актуальним геофізичним напрямком.

ДИСПЕРСІЙНЕ РІВНЯННЯ ДЛЯ ШИРОТНИХ АКУСТИКО-ГРАВІТАЦІЙНИХ ХВИЛЬ

Як і в роботах [9, 13], ми розглядатимемо вільні акустичні і гравітаційні хвилі в атмосфері з довжинами хвиль, набагато меншими від радіуса Землі. Тому кривизною атмосфери Землі можна знехтувати і, як у роботах [13, 23], розглянути акустико-гравітаційні хвилі на площині, що стикається зі сферичним газовим шаром в деякій точці A. На цій площині зручно ввести декартову систему координат (x, y, z) таким чином, щоб вісь z була спрямована назовні до площини, так що $\vec{g} = -g\vec{e}_z$, вісь x спрямована із заходу на схід, а вісь y — з півдня на північ. Якщо географічна широта точки A дорівнює ϕ, то $\Omega_x = 0$, $\Omega_y = \Omega\cos\phi$, $\Omega_z = \Omega\sin\phi$, так що $\vec{\Omega} = \Omega_y \vec{e}_y + \Omega_z \vec{e}_z$. Тут g — прискорення вільного падіння.

Крім того, ми обмежимося розглядом збурень в ізотермічній атмосфері (термосфері), яка в незбуреному стані передбачається статично рівноважною ($\vec{\upsilon} = 0$). У такій атмосфері рівноважні щільність та тиск задовольняють умови гідростатичної рівноваги та барометричної стратифікації:

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g, \quad \frac{p(z)}{p(0)} = \frac{\rho(z)}{\rho(0)} = \mathrm{e}^{-z/H}, \qquad H = \frac{C_s^2}{\gamma g}, \tag{1}$$

де H — приведена висота атмосфери, γ — показник адіабати, p і ρ — тиск та щільність газового середовища, g — прискорення вільного падіння, C_s — швидкість звуку.

Після лінеаризації рівнянь динаміки ідеального газу з урахуванням (1), що перебуває у полі тяжіння [5, 24, 29], щодо стану рівноваги, диференціювання отриманих рівнянь по часу і виключення збурених щільності і тиску, отримуємо систему рівнянь малих коливань, у якій із збурених величин залишаються лише швидкості:

$$\rho\frac{\partial^2 \upsilon_x}{\partial t^2} + 2\rho\Omega_y \frac{\partial \upsilon_z}{\partial t} - 2\rho\Omega_z \frac{\partial \upsilon_y}{\partial t} = = \frac{\partial}{\partial x}(\rho C_s^2 \mathrm{div}\vec{\upsilon}) - \rho g \frac{\partial \upsilon_z}{\partial x},$$

$$\rho\frac{\partial^2 \upsilon_y}{\partial t^2} + 2\rho\Omega_z \frac{\partial \upsilon_x}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y}(\rho C_s^2 \mathrm{div}\vec{\upsilon}) - \rho g \frac{\partial \upsilon_z}{\partial y}, \tag{2}$$

$$\rho\frac{\partial^2 \upsilon_z}{\partial t^2} - 2\rho\Omega_y \frac{\partial \upsilon_x}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}(\rho C_s^2 \mathrm{div}\vec{\upsilon}) + \rho g \,\mathrm{div}_\perp \vec{\upsilon}.$$

Тут $\vec{\upsilon}$ — збурена швидкість. Інші позначення такі:

$$\nabla_\perp = \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y},$$

$$\nabla = \nabla_\perp + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z},$$

$$\mathrm{div}_\perp \vec{\upsilon} = \frac{\partial \upsilon_x}{\partial x} + \frac{\partial \upsilon_y}{\partial y},$$

$$\mathrm{div}\vec{\upsilon} = \mathrm{div}_\perp \vec{\upsilon} + \frac{\partial \upsilon_z}{\partial z}.$$

Нас цікавлять АГХ, що поширюються вздовж широти ($\partial / \partial y = 0$). Для аналізу таких хвиль, згідно із [19], збурені швидкості візьмемо у вигляді

$$\upsilon_{x,y,z} \sim \exp\left(\frac{z}{2H} - ik_x x - ik_z z \right). \quad (3)$$

Рівняння малих коливань в такому випадку дають дисперсійне рівняння

$$k_z^2 C_s^2 (\omega^2 - 4\Omega_z^2) =$$
$$= \omega^4 - \omega^2 \left[4(\Omega_y^2 + \Omega_z^2) + C_s^2 \left(k_x^2 + \frac{1}{4H^2} \right) \right] +$$
$$+ \omega k_x g \Omega_y (4 - 2\gamma) + k_x^2 g^2 (\gamma - 1) + \frac{\Omega_z^2 C_s^2}{H^2}. \quad (4)$$

Видно, що частоти власних хвильових збурень ω неперервно змінюються при неперервній зміні хвильового вектора k_z. Тому граничні частоти визначаються умовами $k_z^2 = 0$ і $k_z^2 \to \infty$. Перша умова визначає граничні частоти ω_1, ω_2, які є розв'язком рівняння

$$\omega^4 - \omega^2 \left[4(\Omega_y^2 + \Omega_z^2) + C_s^2 \left(k_x^2 + \frac{1}{4H^2} \right) \right] +$$
$$+ \omega k_x g \Omega_y (4 - 2\gamma) + k_x^2 g^2 (\gamma - 1) + \frac{\Omega_z^2 C_s^2}{H^2} = 0. \quad (5)$$

Друга умова дає граничні частоти

$$\omega^2 \to 4\Omega_z^2 + 0, \qquad \omega^2 \to k_z^2 C_s^2. \quad (6)$$

Таким чином, ми маємо дві області частот широтних АГХ, що лежать в інтервалах

$$\omega_1^2 \le \omega^2 < k_z^2 C_S{}^2,$$
$$4\Omega_z^2 \le \omega^2 < \omega_2^2. \quad (7)$$

Для знаходження ω_1^2 і ω_2^2 приведемо рівняння (5) до безрозмірного вигляду, враховуючи, що кутова частота обертання атмосфери Ω набагато менша (приблизно на два порядки), ніж характерна частота, якою є частота акустичної відсічки $\omega_a = C_s / 2H = \gamma g / 2C_s$.

Розділимо (5) на ω_a^4 і запишемо отримане рівняння у вигляді

$$\hat{\omega}^4 - \hat{\omega}^2 [4(\hat{\Omega}_y^2 + \hat{\Omega}_z^2) + 1 + 4\hat{k}_x^2] +$$
$$+ 16\hat{\omega}\hat{k}_x\hat{\Omega}_y (1 - \gamma/2)/\gamma + 16\hat{k}_x^2(\gamma - 1)/\gamma^2 + 4\hat{\Omega}_z^2 = 0, \quad (8)$$

де

$$\hat{\kappa}_x = \kappa_x H, \quad \hat{\kappa}_z = \kappa_z H, \quad \hat{\omega} = \omega / \omega_a,$$
$$\hat{\Omega}_y = \Omega_y / \omega_a, \ \hat{\Omega}_z = \Omega_z / \omega_a.$$

Для введених безрозмірних частот $\hat{\Omega}_y$, $\hat{\Omega}_z$ справедливі нерівності $\hat{\Omega}_y$, $\hat{\Omega}_z << 1$.

Рівняння (8) є вихідним для подальшого аналізу. Ефективним методом знаходження рішень цього рівняння є метод Ейлера — Лагранжа. Однак до використання цього методу доцільно отримати деякі оцінки для частот, використовуючи малість величин $\hat{\Omega}_y$, $\hat{\Omega}_z$.

МЕТОД ЕЙЛЕРА — ЛАГРАНЖА

Для отримання розв'язку рівняння (4) в аналітичній формі в даній роботі був використаний метод Ейлера — Лагранжа [1]. Відповідно до цього методу із рівняння, яке в загальному вигляді можна записати у формі

$$\hat{\omega}^4 + p\hat{\omega}^2 + q\hat{\omega} + r = 0, \quad (9)$$

можна отримати так зване «резольвентне» рівняння, корені якого дозволяють отримати корені рівняння (5):

$$z^3 + 2pz^2 + (p^2 - 4r)z + q^2 = 0, \quad (10)$$

[1, 3]. Вирази для коефіцієнтів у рівнянні (9) можна взяти безпосередньо із рівнянь (4) і (8). Для рівняння (9) є також альтернативна форма резольвентного рівняння, алгоритм отримання якого повністю аналогічний алгоритму отримання рівняння (10) (див. [2]):

$$z^3 + \frac{p}{2} z^2 + \frac{(p^2 - 4r)}{16} z + \frac{q^2}{64} = 0. \quad (11)$$

Неважко перевірити, що рівняння (11) з точністю до числового множника збігається з рівнянням (10). Далі наведемо алгоритм побудови резольвентного рівняння (10), виходячи з рівняння

$$y^4 + cy^2 + dy + e = 0. \quad (12)$$

Введемо позначення

$$p = -\frac{3}{8} b^2 + c = c,$$
$$q = -\frac{b}{8} (b^2 - 4c)^2 + d,$$
$$r = -\frac{3}{256} b^4 + \frac{b}{18} (bc - 4d) + 2.$$

Якщо $c<0$, то рівняння (12) можна записати у вигляді

$$y^4 - py^2 + qy + r = 0. \tag{13}$$

Рівняння (13) можна переписати у вигляді добутку двох квадратних тричленів

$$(y^2 + p_1 y + q_1)(y^2 + p_2 y + q_2) = 0 .$$

Після їхнього перемноження прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях *y*. У результаті отримуємо систему рівнянь:

$$\begin{aligned} p_1 + p_2 &= 0 , \\ q_1 + q_2 + p_1 p_2 &= p , \\ p_1 q_2 + p_2 q_1 &= q , \\ q_1 q_2 &= r . \end{aligned} \tag{14}$$

Звідси отримуємо

$$p = p_1 = -p_2 .$$

Із другого і четвертого рівнянь (14) отримуємо для q_1, q_2 квадратне рівняння

$$q_{1,2}{}^2 - (p + p_1^2) q_{1,2} + r = 0 .$$

Використовуючи третє рівняння із системи (14), отримуємо

$$p_1^2 [(p_1^2 + p)^2 - 4r] = q^2 .$$

Введемо позначення $z = -p_1^2$ і отримаємо кубічне рівняння відносно *z*, яке і буде шуканим резольвентним рівнянням:

$$z^3 - 2pz^2 + (p^2 - 4r)z + q^2 = 0 . \tag{15}$$

Безпосередньо із рівняння (15) можна отримати вирази для всіх чотирьох коренів рівняння (13) за допомогою метода Декарта — Ейлера [1], а саме:

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{1}{2}(\sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} + \sqrt{z_3}) , \\ y_2 &= \frac{1}{2}(\sqrt{z_1} - \sqrt{z_2} - \sqrt{z_3}) , \\ y_3 &= \frac{1}{2}(-\sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} - \sqrt{z_3}) , \\ y_4 &= \frac{1}{2}(-\sqrt{z_1} - \sqrt{z_2} + \sqrt{z_3}) . \end{aligned} \tag{16}$$

Співвідношення (16) можна легко отримати, використовуючи раніше введені позначення і теорему Вієта. Якщо вважати, що всі три корені (15) відомі, то можна одразу записати просту систему рівнянь:

$$\begin{aligned} (y_1 + y_4)^2 &= -z_1 , \\ (y_2 + y_4)^2 &= -z_2 , \\ (y_2 + y_3)^2 &= -z_3 , \\ y_1 + y_2 + y_3 + y_4 &= 0 , \end{aligned}$$

яка розв'язується підстановкою і застосуванням теореми Вієта для коефіцієнта *q* (див. [3]):

$$y_1 y_2 y_3 + y_1 y_2 y_4 + y_1 y_3 y_4 + y_2 y_3 y_4 = -q .$$

Але треба враховувати, що отримання точного розв'язку рівняння резольвенти (15) в компактному аналітичному вигляді потребує додаткових перетворень і необхідних спрощень.

Надалі в тексті рівняння (10) будемо позначати як РРІ, а рівняння (11) — РРІІ. Саме через корені РРІ або РРІІ виражаються корені початкового рівняння (9) за правилом

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{1}{2}(\sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} + \sqrt{z_3}) , \\ \omega_2 &= \frac{1}{2}(\sqrt{z_1} - \sqrt{z_2} - \sqrt{z_3}) , \\ \omega_3 &= \frac{1}{2}(\sqrt{z_2} - \sqrt{z_1} - \sqrt{z_3}) , \\ \omega_4 &= \frac{1}{2}(\sqrt{z_3} - \sqrt{z_1} - \sqrt{z_2}) . \end{aligned} \tag{17}$$

Із початкового рівняння (8) видно, що лінійний за частотою $\hat{\omega}$ член на декілька порядків менший за інші. Звідси очевидний можливий спосіб розв'язку цього рівняння. Він відповідає випадку $\hat{k}_x \to 0$ і відповідно $q \to 0$. З фізичної точки зору це можна назвати довгохвильовим наближенням АГХ-збурень. У цьому випадку розв'язок рівняння (8) можна отримати безпосередньо із РР. Це ж стосується і випадку $\hat{k}_x^2 >> \hat{\Omega}^2$ (при тому, що і $\hat{k}_x^2 << 1$, і $\hat{\Omega}^2 << 1$). Високий ступінь малості лінійного члена *q* в (9) дає можливість використовувати наближення $q \to 0$ у випадку $\hat{k}_x^2 >> \hat{\Omega}^2$ та дозволяє тим не менше отримати фізично розумні розв'язки дисперсійного рівняння, які будуть підтверджені результатами робіт [9, 13]. РРІ або РРІІ за допомогою заміни змінних

$$x = z + \frac{2}{3}p \quad \text{або} \quad x = z + \frac{2}{6}p \tag{18}$$

з врахуванням

$$\frac{C_s^2}{4H^2} >> \Omega_x^2,\ \Omega_y^2\,, \tag{19}$$

$$1<\gamma<2, \quad k_z>0\,,\ \ \frac{C_s^2}{\gamma g}=H$$

зводиться до «неповного» кубічного рівняння

$$x^3+Rx+Q=0\,, \tag{20}$$

де використані позначення

$$R=-\frac{p^2}{3}-4r\,,$$

$$Q=-q^2-\frac{2}{3}p\left(\frac{p^2}{9}-4r\right). \tag{21}$$

Три корені кубічного рівняння (20) мають вигляд

$$x_m=2\sqrt{-\frac{R}{3}}\cos\left(\frac{\phi+2\pi m}{3}\right),\ m=1,2,3\,. \tag{22}$$

При цьому мінімальний кут $\phi_{(\min)}$ задовольняє рівняння

$$\cos\phi_{(\min)}=-\frac{Q}{2}\sqrt{-\left(\frac{3}{R}\right)^3}\,. \tag{23}$$

Корені рівняння РР можна отримати за допомогою заміни змінних, оберненої до заміни (18), а корені початкового дисперсійного рівняння (5) обчислюються за правилом (17). Далі ми розглянемо два граничних випадки: короткохвильове та довгохвильове збурення. Для цих випадків відомі апробовані рішення, з якими ми порівняємо наші результати.

У двох вищезгаданих граничних випадках $Z_0\equiv k_xH<<1$ і $Z_0>>1$ використаний метод Ейлера — Лагранжа дозволяє отримати розв'язки дисперсійного рівняння в найбільш компактній аналітичній формі. Оскільки компоненти вектора $\vec{\Omega}$ в середньому на два порядки менші за частоту акустичної відсічки

$$\omega_a=\frac{1}{2}\omega_0\,,\ \text{де}\ \ \omega_0=\sqrt{\frac{g\gamma}{H}}\,,$$

то в розрахунках вважалося, що

$$\Omega_y,\ \Omega_z=\alpha\omega_\alpha\,, \tag{24}$$

де $\alpha=10^{-2}$, як в випадку $Z_0=10^{-2}<<1$, так і в випадку $Z_0=100>>1$.

КОРОТКОХВИЛЬОВЕ НАБЛИЖЕННЯ ($k_xH>>1$)

Розглянемо розв'язок рівняння (10) і (11) в короткохвильовому наближенні. При

$$Z_0=k_xH=10^2\ \text{ і }\ 10^{-3}\le\alpha\le10^{-2}\,,\ 1\le\gamma\le2$$

коефіцієнти рівняння РРІ і РРІІ мають однаковий вигляд, а саме

$$p=-\omega_0^2Z_0^2\left(1+2\frac{\alpha^2}{Z_0^2}\right),$$

$$q^{\,2}=4\omega_0^6Z_0^2\left(\frac{2}{\gamma}-1\right)^2\alpha^2\,, \tag{25}$$

$$r=\omega_0^4\left[\frac{\gamma-1}{\gamma^2}Z_0^2+\frac{\alpha^2}{4}\right].$$

У способі розв'язку, що ми його розглядаємо, $q\to0$. І РРІ виглядає таким чином:

$$z^3+2pz^2+(p^2-4r)z+q^2_{\to0}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow z^3+2pz^2+(p^2-4r)z=0. \tag{26}$$

Очевидно, що перший корінь $z_1=0$, а два інших корені визначаються із квадратного рівняння і дорівнюють

$$z_{2,3}=-p\pm\sqrt{p^2-p^2+4r}=-p\pm2\sqrt{r}\,. \tag{27}$$

Корінь z_2 має вигляд з точністю до вищого порядку малості, тобто до $O(10^{-8})$ і вище:

$$z_2=-p+2\sqrt{r}=\omega_0^2Z_0^2\left(1+2\frac{\alpha^2}{Z_0^2}\right)+$$

$$+2\omega_0^2Z_0^2\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma^2}\frac{1}{Z_0^2}+\frac{\alpha^2}{4Z_0^4}}\approx\omega_0^2Z_0^2\left[1+2\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma^2}\frac{1}{Z_0}}\right],$$

звідси випливає

$$\sqrt{z_2}=\omega_0Z_0\sqrt{1+2\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma^2}}\frac{1}{Z_0}}\approx$$

$$\approx\omega_0Z_0\left[1+\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma^2}}\frac{1}{Z_0}\right]=$$

$$=\omega_0Z_0+\omega_0\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma^2}}=$$

$$=\ k_xC_s+\sqrt{\frac{g(\gamma-1)}{\gamma H}}=k_xC_s+\omega_{БВ}.$$

Тут

$$\omega_{БВ} = \sqrt{\frac{g(\gamma-1)}{\gamma H}}$$

— частота Брента — Вяйсяля.

Аналогічно для кореня z_3 отримуємо

$$\sqrt{z_3} = k_x C_s - \omega_{БВ}.$$

Тоді

$$\omega_1 = \frac{1}{2}(\sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} + \sqrt{z_3}) =$$

$$= \frac{1}{2}(0 + k_x C_s + \omega_{БВ} + k_x C_s - \omega_{БВ}) = k_x C_s,$$

$$\omega_2 = \frac{1}{2}(\sqrt{z_1} - \sqrt{z_2} - \sqrt{z_3}) =$$

$$= \frac{1}{2}(0 - k_x C_s - \omega_{БВ} - k_x C_s + \omega_{БВ}) = -k_x C_s, \quad (28)$$

$$\omega_3 = \frac{1}{2}(-\sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} - \sqrt{z_3}) =$$

$$= \frac{1}{2}(0 + k_x C_s + \omega_{БВ} - k_x C_s + \omega_{БВ}) = \omega_{БВ},$$

$$\omega_4 = \frac{1}{2}(\sqrt{z_1} - \sqrt{z_2} - \sqrt{z_3}) =$$

$$= \frac{1}{2}(0 + k_x C_s - \omega_{БВ} - k_x C_s - \omega_{БВ}) = -\omega_{БВ}.$$

ДОВГОХВИЛЬОВЕ НАБЛИЖЕННЯ ($k_x H << 1$)

В даному розділі ми розглянемо довгохвильові широтні акустико-гравітаційні хвилі. Поклавши $10^{-3} \le Z_0 \le 5\cdot 10^{-3}$ і $10^{-3} \le \alpha \le 10^{-2}$, а γ = 5/3, отримаємо, що коефіцієнти рівнянь РРІ і РРІІ мають однаковий вигляд, а саме

$$p = -\omega_0^2\left(\frac{1}{4} + 8\alpha^2\right),$$

$$q^2 = 4\omega_0^6 Z_0^2\left(\frac{2}{\gamma} - 1\right)^2 \alpha^2, \quad (29)$$

$$r = \omega_0^4\left[\frac{\gamma-1}{\gamma^2} Z_0^2 + \alpha^2\right].$$

У тих же самих раніше використаних наближеннях для коренів РРІ маємо

$$z_1 = 0 \text{ і } z_{2,3} = -p \pm 2\sqrt{r},$$

де p і r описуються формулами (29).

Нехай

$$z_2 = -p + 2\sqrt{r} =$$

$$= \frac{\omega_0^2}{4}(1 + 32\alpha^2) + 2\sqrt{\omega_0^4\left(\frac{\gamma-1}{\gamma^2} Z_0^2 + \alpha^2\right)}.$$

Враховуючи те, що $(Z_0)_{\max} = 5\cdot 10^{-3}$, а

$$\frac{\gamma-1}{\gamma^2} = 0.24$$

для $\gamma = 5/3$ і при тому, що $(\alpha^2)_{\max} = 10^{-4}$, можна вважати, що

$$\alpha^2 >> \frac{\gamma-1}{\gamma^2} Z_0^2.$$

У такому випадку

$$z_2 \cong \omega_a^2(1 + 32\alpha^2) + 8\alpha\omega_a^2 =$$

$$= \omega_a^2(1 + 8\alpha + 32\alpha^2) \approx \omega_a^2(1 + 8\alpha),$$

якщо виконується умова $8\alpha >> 32\alpha^2$, або $4\alpha << 1$. При $\alpha = 10^{-2}$ ця умова виконується з хорошою точністю. Отже,

$$\sqrt{z_2} = \omega_a\sqrt{1 + 8\alpha} \approx \omega_\alpha(1 + 4\alpha).$$

Аналогічно

$$\sqrt{z_3} \cong \omega_a(1 - 4\alpha).$$

Тоді для коренів початкового дисперсійного рівняння з (10) отримуємо:

$$\omega_1 = \frac{1}{2}(\sqrt{z_3} + \sqrt{z_2} + \sqrt{z_1}) =$$

$$= \frac{1}{2}(0 + \omega_a + 4\omega_a\alpha + \omega_a - 4\omega_a\alpha) = +\omega_a,$$

$$\omega_2 = \frac{1}{2}(\sqrt{z_1} - \sqrt{z_2} - \sqrt{z_3}) =$$

$$= \frac{1}{2}(0 - \omega_a - 4\omega_a\alpha - \omega_a + 4\omega_a\alpha) = -\omega_a,$$

$$\omega_3 = \frac{1}{2}(-\sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} - \sqrt{z_3}) =$$

$$= \frac{1}{2}(0 + \omega_a + 4\omega_a\alpha - \omega_a + 4\omega_a\alpha) =$$

$$= 4\omega_a\alpha = 4\omega_a\frac{\Omega_z}{\omega_0} = +2\Omega_z,$$

$$\omega_4 = \frac{1}{2}(0 + \omega_a - 4\omega_a\alpha - \omega_a - 4\omega_a\alpha) =$$

$$= -4\omega_a\frac{\Omega_z}{\omega_0} = -2\Omega_z.$$

Таким чином, РР (10) дає точні результати для $k_x H << 1$ та $k_x H >> 1$, а тому може бути використано для подальшого аналізу розглянутих хвиль.

Аналіз результатів розповсюдження АГХ уздовж широти і уздовж довготи показав, що в обох випадках виходить майже однаковий результат.

ВИСНОВКИ

В даній роботі ми зосередили свою увагу на вивченні впливу горизонтального і вертикального компонентів частоти обертання Землі на спектр акустико-гравітаційних хвиль, що поширюються по широті.

Встановлено, що коректний розв'язок дає резольвентне рівняння (10), яке в граничних випадках $k_x H << 1$ і $k_x H >> 1$ збігається з раніше отриманими результатами робіт [9, 13].

Знайдено, що власні частоти розглянутих хвиль визначаються рівняннями (10), (18), (22) і (23).

Показано, що мінімальні частоти широтних акустико-гравітаційних хвиль у атмосфері, що обертається, обмежені знизу частотою $2\Omega\sin\phi$, де Ω — кутова частота обертання атмосфери, а ϕ — широта місця, що відповідає вертикальному компоненту параметра Коріоліса. Максимальні частоти розглянутих хвиль несуттєво модифікуються обертанням атмосфери. Встановлено, що горизонтальний компонент параметра Коріоліса $2\Omega\cos\phi$ призводить до малої модифікації граничних частот широтних акустико-гравітаційних хвиль. Цей результат повністю відповідають результатам роботи [9].

Раніше в роботі [13] було показано, що під нижньою межею гравітаційних хвиль та між областями акустичних та гравітаційних хвиль розташовані неперервні спектри еванесцентних хвиль. З проведеного розгляду випливає, що область еванесцентних хвиль, що лежить нижче під гравітаційною областю, відсутня на екваторі, із зростанням широти збільшується і досягає максимального значення на полюсі.

Ми проаналізували поширення акустико-гравітаційних хвиль уздовж широти і показали, що рівняння малих коливань у цьому випадку відрізняється від рівняння малих коливань для довготних акустико-гравітаційних хвиль. Було встановлено, що, незважаючи на деякі розбіжності, обидва рівняння для значень частоти обертання Землі, близьких до реальних, призводять до однакових кінцевих результатів. Цей результат свідчить про те, що поширення акустико-гравітаційних хвиль в атмосфері з врахуванням обертання Землі в горизонтальній площині можна вважати квазіізотропним, що узгоджується з наведеним вище висновком про необхідність урахування тільки вертикального компонента параметра Коріоліса.

Роботу виконано при фінансовій підтримці Національного фонду досліджень України, проєкт 2020.02/0015 «Теоретичні і експериментальні дослідження глобальних збурень природного і техногенного походження в системі Земля — атмосфера — іоносфера» і гранта № 97742 of the Volkswagen Foundation («VW-Stifting»).

ЛІТЕРАТУРА

1. Ван-дер-Варден Б. Л. *Алгебра*. М.: Мир, 1930. 48 с.
2. Корн Г., Корн. Т. *Справочник по математике для научных работников и инженеров: определения, теоремы, формулы*. М.: Наука, 1968. 720 с.
3. Мишина А. П., Проскуряков И. В. *Высшая алгебра*. М.: ГИФМЛ, Сер.: Справочная математическая библиотека, 1962. 300 с.
4. Alexander M. J., Pfister L. Gravity wave momentum flux in the stratosphere over convection. *Geophys. Res. Lett*. 1995. **22**. P. 2029.
5. Batchelor G. K. *An introduction to fluid dynamics.* Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2000. 615 p.
6. Beer T. *Atmospheric Waves.* New York: John Wiley, 1974. 300 p.
7. Brekhovskikh L. M., Goncharov V. V. *Introductions are the mechanics of continuous media.* Moscow: Nauka, 1982. 335 p.
8. Cheremnykh O. K., Kryuchkov E. I., Fedorenko A. K., Cheremnykh S. O. Two-frequency propagation mode of acoustic-gravity waves in the Earth's atmosphere. *Kinematics and Phys. Celestial Bodies*. 2020. **36**, № 2. P. 64—78.

9. Cheremnykh O. K., Cheremnykh S. O., Vlasov D. I. Influence of the Earth's atmosphere rotation on the spectrum of acoustic-gravity waves. *Kinematics and Phys. Celestial Bodies*. 2022. **38** , № 3. P. 121—131.
10. Cheremnykh O. K. Tranversally small-scale perturbations in arbitrary plasma configurations with magnetic surfaces. *Plasma Phys. and Controlled Fusion*. 2010. **52**, № 9. P. 095006.
11. Cheremnykh O. K., Fedorenko A. K., Kryuchkov E. I., Selivanov Y. A. Evanescent acoustic-gravity modes in the isothermal atmosphere: systematization and applications to the Earth and solar atmospheres. *Ann. Geophys*. 2019. **37**. P. 401—415.
12. Cheremnykh O. K., Fedorenko A. K., Selivanov Y. A., Cheremnykh S. O. Continuous spectrum of evanescent acoustic-gravity waves in an isothermal atmosphere. *Mon. Notic. Roy. Astron. Soc*. 2021. **503**, № 4. P. 5545—5553. DOI:10.1093/mnras/st.ab845.
13. Cheremnykh O., Kaladze T., Selivanov Y., Cheremnykh S. Evanescent acoustic-gravity waves in a rotating stratified atmosphere. *Adv. Space Res*. 2022. **69**, № 3. P. 1272—1280.
14. Cheremnykh O. K., Parnowski A. S. Influence of ionospheric conductivity on the ballooning modes in the inner magnetosphere of the Earth. *Adv. Space Res*. 2006. **37**, № 3. P. 599—603.
15. Ebel A. Contributions of gravity waves to the momentum, heat and turbulent energy budget of the upper mesosphere and lower thermosphere. *J. Atmos. and Solar-Terrestrial Phys*. 1984. **46**. P. 727—737.
16. Fedorenko A. K., Kryuchkov E. I., Cheremnykh O. K., Klymenko Yu. O., Yampolski Yu. M. Pecularities of acoustic-gravity waves in inhomogeneous flows of the polar thermosphere. *J. Atmos. and Solar-Terrestrial Phys*. 2018. **178**. P. 17—23.
17. Francis S. H. Global propagation of atmospheric gravity waves: A review. *J. Atmos. and Terrestrial Phys*. 1975. **37**. P. 1011—1054.
18. Gossard E. E., Hooke W. H. *Waves in the Atmosphere: Atmospheric Infrasound and Gravity Waves: Their Generation and Propagation*. Elsevier Scientific Publishing Company, 1975. 456 p.
19. Hines C. O. Internal gravity waves at ionospheric heights. *Can. J. Phys*. 1960. **38.** P. 1441—1481.
20. Hooke W. H. Ionospheric irregularities produced by internal atmospheric gravity waves. *J. Atmos. and Solar-Terrestrial Phys*. 1968. **30**, № 5. P. 795—823.
21. Jones W. L. Non-divergent oscillations in the Solar Atmosphere. *Solar Phys*. 1969. **7**. P. 204—209.
22. Kaladze T. D., Pokhotelov O. A., Shan H. A., Shan M. I., Stenflo L. Acoustic-gravity waves in the Earth ionosphere. *J. Atmos. and Solar-Terrestrial Phys*. 2008. **70**. P. 1607—1616.
23. Longuet-Higgins M. S. Planetary waves on a rotating sphere. P. 1. *Proc. Roy. Soc. A*. 1964. **279**. P. 446—473.
24. McWilliams J. C. *Fundamentals of Geophysical Fluid Dynamics*. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2011. 272 p.
25. Pokhotelov O. A., Kaladze T. D., Shukla P. K., Stenflo L. Three-dimensional solitary vortex structures in the upper atmosphere. *Phys. Scripta*. 2001. **64**. P. 245—252.
26. Rossby C.-G. Planetary flow patterns in the atmosphere. *Quart. J. Roy. Meteorol. Soc*. 1940. **66**. P. 68—87.
27. Simkhada D. B., Snively J. B., Tayler M. J., Franke S. J. Analysis and modeling of ducted and avanescent gravity waves observed in the Havaiian airglow. *Ann. Geophys*. 2009. **27**. P. 3213—3224.
28. Stenflo L., Shukla P. K. Nonlinear acoustic gravity wave. *J. Plasma Phys*. 2009. **75**. P. 841—847. doi. org/10. 1017/S0022377809007892.
29. Tolstoy I. *Wave propagation*. N. Y.: Mc. Grow – Hill, 1973. 468 p.
30. Vadas S. L., Fritts D. C. Termosphere responses to gravity waves: Influences of incrising viscosity and thermal diffusivity. *J. Geophys. Res*. 2005. **110** D**.** 15103. doi: 10.1029/2004 JD 005574.
31. Waltercheid R. L., Hecht J. H. A reexamination of evanescent acoustic-gravity waves: Special properties and aeronomical significance. *J. Geophys. Res*. 2003. **108(**D11**)**. P. 4340. doi:10. 1029/2002JD002421.

REFERENCES

1. Van-der-Varden B. L. (1930). *Algebra*. Moscow: Mir, 48 p. [in Russian].
2. Korn G., Korn T. (1968). *Spravochnik po matematike dlya nauchnyh rabotnikov i injenerov: opredeleniya, teoremy, formuly*. Moscow: Nauka, 720 p. [in Russian].
3. Mishina A. P., Proskuryakov I. V. (1962). Vysshaya algebra. Seria: Spravochnaya matematicheskaya biblioteka. M.: GIFML, 300 p. [in Russian].
4. Alexander M. J., Pfister L. (1995). Gravity wave momentum flux in the stratosphere over convection. *Geophys. Res. Lett.,* **22,** 2029.
5. Batchelor G. K. (2000). *An introduction to fluid dynamics*. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 615 p.
6. Beer T. (1974). *Atmospheric Waves*. New York: John Wiley, 300 p.
7. Brekhovskikh L. M., Goncharov V. V. (1982). *Introductions are the mechanics of continuous media*. Moscow: Nauka, 335 p.
8. Cheremnykh O. K., Kryuchkov E. I., Fedorenko A. K., Cheremnykh S. O. (2020). Two-Frequency Propagation Mode of Acoustic-Gravity Waves in the Earth's Atmosphere. *Kinematics and Physics of Celestial Bodies*, **36**(2), 64—78.

9. Cheremnykh O. K., Cheremnykh S. O., Vlasov D. I. (2022). Influence of the Earth's atmosphere rotation on the spectrum of acoustic-gravity waves. *Kinematics and Physics of Celestial Bodies,* **38**(3), 121—131.
10. Cheremnykh O. K. (2010). Tranversally small-scale perturbations in arbitrary plasma configurations with magnetic surfaces. *Plasma Phys. and Controlled Fusion,* **52**(9), 095006.
11. Cheremnykh O. K., Fedorenko A. K., Kryuchkov E. I., Selivanov Y. A. (2019). Evanescent acoustic-gravity modes in the isothermal atmosphere: systematization and applications to the Earth and solar atmospheres. *Ann. Geophys.,* **37**, 401—415.
12. Cheremnykh O. K., Fedorenko A. K., Selivanov Y. A., Cheremnykh S. O. (2021). Continuous spectrum of evanescent acoustic-gravity waves in an isothermal atmosphere. *Mon. Notic. Roy. Astron. Soc.,* **503**(4), 5545—5553. doi:10.1093/mnras/st.ab845.
13. Cheremnykh O., Kaladze T., Selivanov Y., Cheremnykh Serhiy. (2022). Evanescent acoustic-gravity waves in a rotating stratified atmosphere. *Adv. Space Res.*, **69** (3), 1272—1280.
14. Cheremnykh O. K., Parnowski A. S. (2006). Influence of ionospheric conductivity on the ballooning modes in the inner magnetosphere of the Earth. *Adv. Space Res.,* **37**(3), 599—603.
15. Ebel A. (1984). Contributions of gravity waves to the momentum, heat and turbulent energy budget of the upper mesosphere and lower thermosphere. *J. Atmos. and Solar-Terrestrial Phys*., **46**, 727—737.
16. Fedorenko A. K., Kryuchkov E. I., Cheremnykh O. K., Klymenko Yu. O., Yampolski Yu. M. (2018). Pecularities of acoustic-gravity waves in inhomogeneous flows of the polar thermosphere. *J. Atmos. and Solar-Terrestrial Phys.,* **178**, 17—23.
17. Francis S. H. (1975). Global propagation of atmospheric gravity waves: A review. *J. Atmos. and Terrestrial Phys.,* **37,** 1011—1054.
18. Gossard, E. E., Hooke, W. H. (1975). *Waves in the Atmosphere: Atmospheric Infrasound and Gravity Waves: Their Generation and Propagation.* Elsevier Scientific Publishing Company, 456 p.
19. Hines C. O. (1960). Internal gravity waves at ionospheric heights. *Can. J. Phys.,* **38**, 1441—1481.
20. Hooke W. H. (1968). Ionospheric irregularities produced by internal atmospheric gravity waves. *J. Atmos. and Solar-Terrestrial Phys.,* **30**(5), 795—823.
21. Jones W. L. (1969). Non-divergent oscillations in the Solar Atmosphere. *Solar Phys.,* **7**, 204—209.
22. Kaladze T. D., Pokhotelov O. A., Shan H. A., Shan M. I., Stenflo L. (2008). Acoustic-gravity waves in the Earth ionosphere. *J. Atmos. and Solar-Terrestrial Phys.,* **70**, 1607—1616.
23. Longuet-Higgins M. S. (1964). Planetary waves on a rotating sphere. P. 1. *Proc. Roy. Soc. A.*, **279**, 446—473.
24. McWilliams J. C. (2011). *Fundamentals of Geophysical Fluid Dynamics.* Cambridge: Cambridge University Press, 272 p.
25. Pokhotelov O. A., Kaladze T. D., Shukla P. K., Stenflo L. (2001). Three-dimensional solitary vortex structures in the upper atmosphere. *Phys. Scripta,* **64,** 245—252.
26. Rossby C.-G. (1940). Planetary flow patterns in the atmosphere. *Quart. J. Roy. Meteorol. Soc.,* **66**, 68—87.
27. Simkhada D. B., Snively J. B., Tayler M. J., Franke S. J. (2009). Analysis and modeling of ducted and avanescent gravity waves observed in the Havaiian airglow. *Ann. Geophys.,* **27**, 3213—3224.
28. Stenflo L., Shukla P. K. (2009). Nonlinear acoustic gravity wave. *J. Plasma Phys.,* **75***,* 841—847. doi. org/10. 1017/S0022377809007892.
29. Tolstoy I. (1973). *Wave propagation*. New York: Mc. Grow - Hill, 468 p.
30. Vadas S. L., Fritts D. C. (2005). Termosphere responses to gravity waves: Influences of incrising viscosity and thermal diffusivity. *J. Geophys. Res.,* **110(**D), 15103. doi: 10.1029/2004 JD 005574.
31. Waltercheid R. L., Hecht J. H. (2003). A reexamination of evanescent acoustic-gravity waves: Special properties and aeronomical significance. *J. Geophys. Res.,* **108** (D11), 4340. doi:10. 1029/2002JD002421.

Стаття надійшла до редакції 07.02.2023 *Received 07.02.2023*
Після доопрацювання 20.04.2023 *Revised 20.04.2023*
Прийнято до друку 21.04.2023 *Accepted 21.04.2023*

O. N. Kryshtal, Leading Researcher, Dr.Sci. in Phys&Math
https://orcid.org/0000-0003-1683-677X
E-mail: alexandr.kryshtal@gmail.com
A. D. Voitsekhovska, Senior Researcher, Ph.D. in Phys&Math
https://orcid.org/0000-0002-4255-3792
E-mail: voitsekhovska.anna@gmail.com
O. K. Cheremnykh, Corespondent Member of NAS of Ukraine, Head of Department, Dr.Sci. in Phys&Math
https://orcid.org/0000-0001-6789-3382
E-mail: oleg.cheremnykh@gmail.com
S. O. Cheremnykh, Senior Researcher, Ph.D. in Phys&Math
https://orcid.org/0000-0003-2685-5325
E-mail: ikdchereremnykh@gmail.com

Space Research Institute of the National Academy of Sciences of Ukraine and the State Space Agency of Ukraine
40, Acad. Glushkov Ave., building. 4/1, Kyiv-187, 03680 Ukraine

ABOUT ONE PROPERTY OF THE DISPERSION EQUATION FOR LATITUDINAL ACOUSTIC-GRAVITATIONAL WAVES

Acoustic-gravity waves are an example of processes that largely determine the dynamics of the Earth's atmosphere. This is due to the fact that the sources of these waves are located throughout the height of the atmosphere, from the very "bottom", where earthquakes, volcanic emissions, tsunamis, tornadoes, etc., occur, and to the very "top", where perturbations of the solar wind, magnetic storms, and precipitation of particles in high latitudes are active. All these phenomena lead to the active energy exchange between all layers of the Earth's atmosphere and the interaction of wave disturbances of significantly different scales — from several thousand kilometers to several hundred meters, and this — to the appearance and development of processes of convection and turbulence in the environment. It seems that only nonlinear processes should dominate under such conditions. To a large extent, it is true, but at the same time, observations indicate that in many cases in the process of propagation of acoustic-gravity waves (AGW), the effects can be comprehensively described within the framework of the linear approximation of perturbation theory and well-developed theory of oscillations. At the same time, when creating models of the process, it turned out to be appropriate to use sufficiently justified physical approximations, such as isothermality of the atmosphere, its unlimitedness in the horizontal direction and compressibility in the vertical direction.

Taking into account the real scales of the AGW, it is possible to neglect the curvature of the Earth's surface and consider it locally flat at any point of the surface and use the Cartesian coordinate system X, Y, Z in the calculations. To describe the environment, it makes sense to use non-dissipative hydrodynamics and in an equilibrium state — the hydrostatic equilibrium equation and barometric equation. The above-mentioned approximations and the mathematical apparatus of the theory of oscillations and the theory of differential equations allow when studying the initial system of equations describing the dynamics of AGW, to obtain a dispersion equation in the form of a polynomial of the fourth degree relative to the angular frequency of rotation as a function of the normalized wave vector of disturbance $\vec{k}$ (AGW). AGW spectrum is a spectrum of the atmosphere's own oscillations in the form $\omega = \omega(\vec{k})$, and its obtaining can be considered as the final solution to the initial problem if we ignore the obvious influence on the AGW spectrum of the angular frequency of rotation of the atmosphere Ω, which must necessarily be present in the dispersion equation due to the influence of the Coriolis force. The formal reason for the absence of the components of the vector Ω in the dispersion equation (DE) is the fact that the $|\vec{\Omega}|$ is a minimum of two orders of magnitude smaller than the characteristic rotation frequency of the atmosphere ω_0, which is equal to the acoustic cutoff frequency. At the same time, the improvement of modern atmospheric observation equipment places increases the requirements for the accuracy of DE model solutions. In this sense, the resolution of DE in the work [Cheremnykh O. K. et al. Kinematics and Phys. Celestial Bodies. 2020. **36**, № 2. P. 64—78] can be considered as a "zero-order" solution with a small parameter $\alpha = |\vec{\Omega}|/\omega_0$. In addition, according to the method of obtaining, this solution is approximate. By definition, the solution obtained in the work [Cheremnykh O. K. et al. Kinematics and Phys. Celestial Bodies, 2022. 38, № 3. P. 121—131] by taking into account terms $\alpha \neq 0$ in the modified DE is more accurate. But it is also approximate, although more accurate.

In this work, we study in detail the dispersion equation for latitudinal AGW. The need for such consideration, as will be shown, is a consequence of the structure of this equation, namely the presence of a linear frequency term in it. Preliminary analysis showed that existing mathematical methods do not provide an unambiguous solution to this equation. This suggests the need to study possible solutions of the equation in terms of their coincidence with previously obtained ones for some partial cases. Such research allows us to choose the right decision. In the proposed study, we have shown that the Euler-Lagrange method allows, under certain additional conditions, to obtain an exact solution of the modified equation for AGW in closed analytical form.

Keywords: acoustic-gravity waves, Earth's atmosphere, Euler-Lagrange method, dispersion equation.