Наука та інновації. 2011. Т. 7. № 3. С. 5—13.

Я.В. Шевчук

Інститут регіональних досліджень НАН України, Львів

ФРАКТАЛЬНИЙ АНАЛІЗ ТРАНСПОРТНИХ МЕРЕЖ

Розглянуто новий метод фрактального аналізу транспортних мереж (зокрема, міської), який дозволяє оцінити ступінь їх самоорганізації. Встановлено, що реальна фрактальна розмірність транспортних мереж, яка самоорганізовується рухом транспортних засобів, дорівнює 1,22 і характерна для сплутаних полімерних волокон, каналів, що утворюються при просочуванні рідини крізь пористі матеріали.

Ключові слова: складні транспортні мережі, фрактальна розмірність, фрактальний аналіз.

Тенденції розвитку існуючих на сьогодні зв'язаних і розподілених мереж свідчать про необхідність розробки ефективних методів моделювання і оптимізації мереж великих розмірів. Можливості застосування до складних мереж з безперервним розширенням і динамічними характеристиками звичайних методів моделювання істотно обмежені. Нині для цієї мети почали використовувати так званий *фрактальний аналіз*.

Фрактальні аналізи приросту міст та міського землекористування відомі ще з середини 1980-х років [1], однак застосування цих аналізів для транспортних мереж (ТМ), в тому числі інформаційних (Інтернет) і біологічних (артеріальні системи), почали використовувати дещо пізніше — у 1990—2000 роках [2—7].

Сьогодні фрактальні дослідження ТМ поділяють на два основних класи: *визначення фрактальної розмірності мереж*, що само по собі є важливою метою досліджень, і *дослідження фрактальних властивостей ТМ як функції розвитку міст взагалі*, зокрема для дослідження взаємозв'язку транспортних мереж і концентрації населення.

Відомо, що властивості складних мереж залежать головним чином від геометрії або топології [8]. При цьому однією з фундаментальних характеристик є їхня фрактальна розмірність D_c, тому велика кількість властивостей ТМ залежать від розмірності D_c. Цю залежність можна виразити функціональним співвідношенням *властивість мережі* = $f(D_c)$. Після підрахунку фрактальної розмірності мережі D_c можна кількісно виразити, наприклад, системні властивості ТМ і знайти загальні закономірності руху потоків даних як функцію $f(D_c)$.

Розмірність топології складних систем і мереж не можна обчислити, використовуючи звичайну розмірність Евкліда, що має лише цілочисельні значення. Ця обставина змушує користуватися методом визначення розмірності топології, заснованим на самоподібності, яка властива фракталам. Результати антропогенної діяльності, як показують багаточисельні дослідження, дійсно має фрактальний характер. Це, зокрема, відноситься до ТМ метро [9], розвитку деяких мегаполісів [10], мереж труб різного призначення. Всі ці мережі нагадують кровоносну мережу артерій живого організму. Аналіз, заснований на методах фрактальної геометрії, дозволяє здійснювати кількісне порівняння і синтез складних мереж, в тому числі ТМ.

Оскільки фрактальний аналіз є відносно новим і маловідомим серед вітчизняних і зарубіжних (судячи по малочисельності публіка-

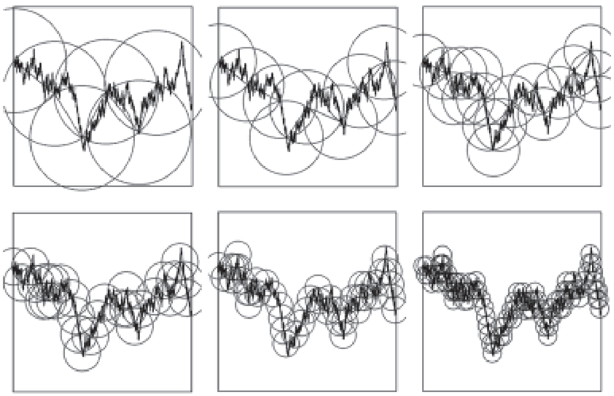

Рис. 1. Хаусдорфове покриття одної і тої самої множини кульками різного діаметру

цій практичного спрямування) економістів і проектувальників, як і саме поняття «*фрактал*», то ми вважаємо актуальним ознайомлення широкої наукової спільноти з методом фрактального аналізу зазначених мереж.

Термін «фрактал» (від лат. *frangere* — «ламати» і *fractus* — «дробний») був введений в 1975 р. *Бенуа Мандельбротом* і заснований на теорії фрактальної (дробної) розмірності *Хаусдорфа*, запропонованої в 1919 році. Як зазначає Б. Мандельброт [12], «*фракталом називається множина, хаусдорфова розмірність якої строго більша від її топологічної розмірності*».

Сама ідея фрактальності виникла у Б. Мандельброта ще в 1967 р. при визначенні довжини берегової лінії Британії: ця довжина змінювалась залежно від обраної масштабної одиниці (чим менший масштаб, тим довшою була берегова лінія) [11]. Расходження довжини при збільшенні масштабу виміру пов'язане з неправильною уявою про цю криву як про одновимірний об'єкт. Насправді, берегова лінія має вищу, дробову розмірність — проміжну між розмірністю прямої і площини.

Існує два принципово різних підходи до поняття розмірності. За першим розмірність геометричної фігури — це мінімальна кількість координат, необхідних для її опису як множини точок зі збереженням структури природної близкості. Наприклад, для опису лінії достатньо одної координати, для опису поверхні — двох, для опису тіла — трьох. Оскільки ця розмірність є топологічним інваріантом (тобто зберігається при взаємно однозначному і безперервному в обидва боки відображенні), то її називають *топологічною* розмірністю і позначають D_T. Цей підхід відображений у відомих роботах *Пуанкаре, Брауера, Менгера, Урисона, Лебега* тощо. Вершиною розвитку цього методу стала гомологічна теорія розмірності *П. Александрова* [13].

Згідно з другим підходом *розмірність — це число D, яке виражає зв'язок природної міри геометричної фігури* (наприклад, довжини, площі або об'єму) з величиною (в даному випадку довжиною), що покладена в основу вихідної метричної системи. Якщо метричний еталон такої величини, який прийнятий за одиницю, збільшити (зменшити) в b разів, то зазначена міра зменшиться (збільшиться) в b^D разів. Цю розмірність називають *метричною*. Джерелом такого визначення є такий вираз для звичайної міри M (довжини, площі або об'єму) довільної геометричної кривої, поверхні або тіла:

$$M = \lim_{\delta \to 0} [N(\delta)\delta^D], (D = 1, 2, 3), \qquad (1)$$

де $N(\delta)$ — число симплексів (відрізків, клітин або кубів) з геометричним фактором (лінійним розміром) δ, що визначає апроксимацію вихідної множини.

На основі саме цього виразу Хаусдорф у 1919 р. запропонував визначення розмірності для випадку компактної множини у довільному метричному просторі [14]:

$$D = \lim_{\delta \to 0} [\ln N(\delta) / \ln(1/\delta)], \qquad (2)$$

де $N(\delta)$ — мінімальна кількість куль радіусом δ, що покривають цю множину. На рис. 1 показано покриття множини кульками різного діаметра.

Для звичайних регулярних геометричних фігур $D = D_T$. Однак для більш екзотичних множин (а саме фракталів) $D > D_T$. Зазначимо, що якщо вихідну множину занурено в евклідовий простір, то у визначенні Хаусдорфа замість покрить цієї множини кулями можна брати будь-які інші апроксимації іншими простими фігурами (наприклад, квадратами, трикутниками тощо) з геометричним фактором *ti*.

Першими відкритими фракталами були так звані *детерміновані* (або класичні, геометричні, лінійні, регулярні) фрактали. В усіх детермінованих фракталах самоподібність проявляється на всіх рівнях. Це означає, що незалежно від того, наскільки ви наближаєте фрактал, можна бачити один і той же візерунок. Детерміністські фрактали утворюються в процесі ітерації, в якому застосовують основний рисунок до ініціатора, після чого його застосовують до результата тощо. Зазвичай проводять 5—7 ітерацій, щоб одержати чітку картину з певним естетичним характером. Ці фрактали лінійні, оскільки при кожній ітерації щось видаляється або додається у формі прямих ліній. Один з багатьох прикладів — *крива Хельге фон Коха* (рис. 2).

Всі модельні фрактали будуються як послідовності деяких комплексів (*передфракталів*). Для обчислювання розмірності кривої Коха як послідовності апроксимації користуються її уявою на n-му кроці ітерації (передфракталом n-го покоління). В цьому випадку вона буде апроксимована 4^n відрізками, зменшеними в 3^n разів. І хоча такі апроксимації не є покриттями (оскільки не є кулями, квадратами тощо, а є прямими відрізками), однак саме вони для даного об'єкта є найбільш природними. Якщо тепер взяти $\delta = (1/3)^n$, то $N(\delta) = 4^n$. Оскільки в цьому масштабі усі степеневі функції є лінійними, то фрактальна розмірність D визначається як тангенс кута нахилу відповідної прямої (рис. 3).

Очевидно, що при $\delta = (1/3)^n$ усі дані для наведеного прикладу (крива Коха) будуть знаходитись на одній прямій (нижня пряма). Якщо для обчислення застосовувати інші апроксимації із використанням інших симплексів, то одержимо залежність, яка лише асимптотично наближається до прямої (верхня крива). При цьому якщо апроксимації обрані невдало, то

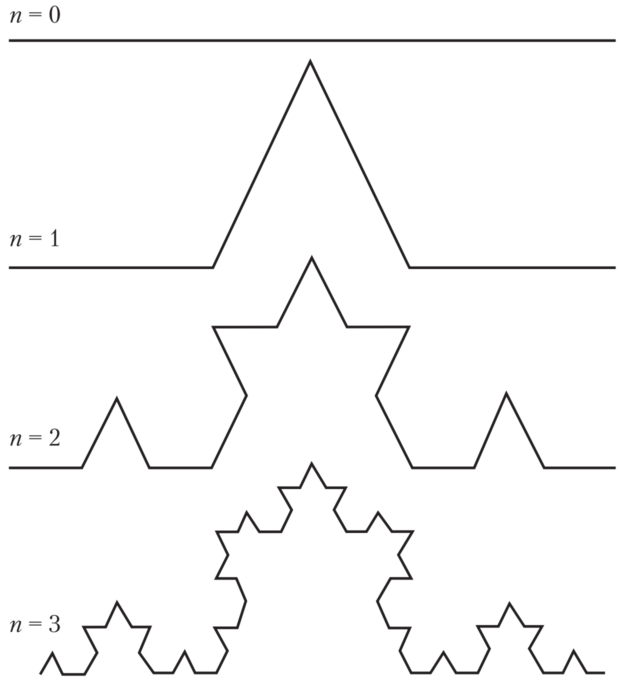

Рис. 2. Крива Коха на 3-х кроках ітерації

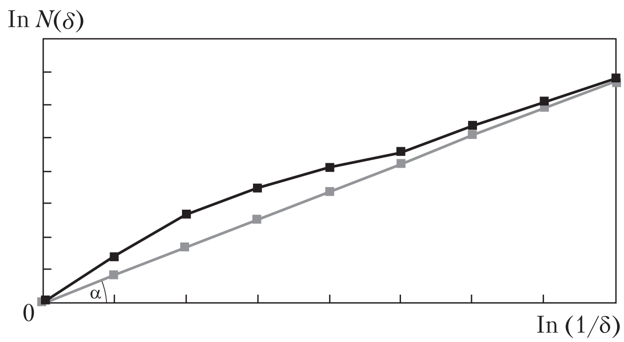

Рис. 3. Залежність у подвійному логарифмічному масштабі кількості числа симплексів $N(\delta)$, що складають апроксимацію, від характерного симплекса δ (якщо такі апроксимації є передфракталами, то така залежність лінійна; інакше ця залежність буде лише наближатись до лінійної в асимптотиці при $\delta \to 0$)

таке наближення може бути вельми повільним. Переходячи до границі за $n \to \infty$, одержуємо $D = \ln 4 / \ln 3 \approx 1{,}26$.

Зазначимо, що ріки і хмари мають також фрактальну структуру; для рік $D = 1{,}2...1{,}4$, для хмар $D = 1{,}37...1{,}41$. На рис. 4 показано приклади регулярних фракталів.

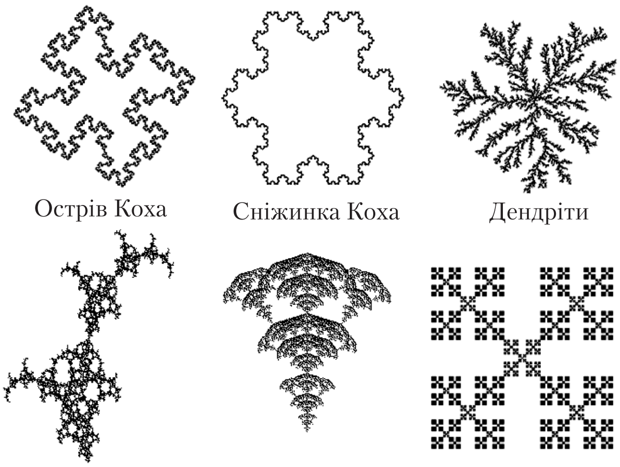

Рис. 4. Приклади регулярних фракталів

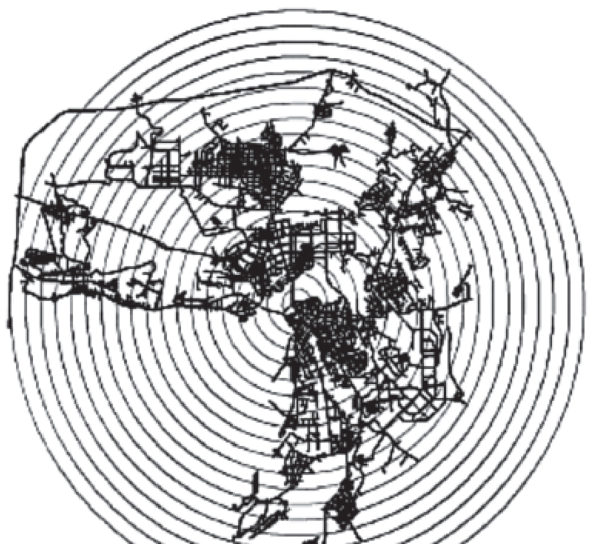

Рис. 5. Топологія транспортної мережі м. Казані (РФ)

Як відомо, фрактали оточують нас з усіх боків. Деякі з них безперервно змінюються, вони подібні до полум'я, що мерехтить, або до хмаринок, які постійно змінюють свою форму, у той час як інші (напр., дерева або судинні системи) зберігають структуру, придбану в процесі еволюції. При цьому реальний діапазон розмірів, на яких можуть спостерігатись фрактальні структури, простирається від відстаней, характерних для молекул в полімерах, до відстаней між галактиками. Можна сказати, що всі нерегулярності в природі намагаються організувати самоподібну (фрактальну) структуру як енергетично вигіднішу. Відомості про теорію фракталів, її математичне наповнення можна знайти в [15—17].

Практично використовують два методи визначення ФР: метод *підрахунку комірок* (квадратів, прямокутників, трикутників тощо), які покривають об'єкт (*box-counting method*), і метод, що ґрунтується на *вимірюванні об'єкта* (виражається, наприклад, числом комірок) у порівнянні з його радіусом (*mass-radius method*).

Для визначення D (згідно з першим класичним методом) площину, на якій розташований об'єкт, розбивають на клітини розміром δ і визначають число клітин $N(\delta)$, де знаходиться хоча б одна точка цього об'єкта. Потім за різних δ в подвійному логарифмічному масштабі будують графік функції, яка апроксимується прямою, наприклад, за допомогою методу найменших квадратів (МНК). Тоді D, як зазначалось вище, визначається як тангенс кута нахилу цієї прямої (див. рис. 3).

Основним недоліком такого методу є те, що вихід на степеневу асимптотику функції $N(\delta)$ при $\delta \to 0$ відбувається дуже повільно. Саме тому для застосування цього методу використовують комп'ютерну техніку. Наприклад, у дослідженнях методом фрактального аналізу метотранспортної мережі Монреаля використовувався пакет програм HarFA (Harmonic and Fractal Image Analysis) [18, 19]. Відомо застосування і інших пакетів програм, зокрема Mac OS-X з графікою OPENGL і інтерфейсом GLUT, які були популярними на початку 1990-х років [20]. Подальші удосконалення МНК наведено в роботах [21, 22].

У роботі [8] використовувся мас-радіус-метод, згідно з яким підраховувалося число $N(R)$ вузлів мережі, розташованих усередині кіл радіусом R з центром у Казанському Кремлі, що є географічним центром міста Казані (РФ) (рис. 5). Автор зауважує, що при компактному просторовому розподілі вузлів мережі, тобто якщо щільність вузлів (число на одиницю площі) постійна, значення $N(R)$ буде пропорційним R^2. При фрактальному розподілі значення $N(R)$ буде пропорційним R^{D_c}, де D_c — фрактальна розмірність комунікаційної мережі. Це означає, що щільність числа вузлів зменшується із зростанням R.

Для кола радіусом R і площею, пропорціоною R^2, щільність $\rho(R)$ дорівнює

$$\rho(R) \approx N(R)/R^2 \approx R^{D_c-2}. \tag{3}$$

Із формули (3) випливає, що густина вузлів мережі при збільшенні радіальної відстані зменшується за степеневим законом.

Саму фрактальну розмірність визначали як *кореляційну розмірність* залежності $D_c(l/l_{\max})$, де $l/l_{\max}$ — відносна відстань. Кореляційну розмірність визаначали за рівнянням [16]

$$D_c = \lim \frac{\ln C(\varepsilon)}{\ln \varepsilon}, \ \varepsilon \to 0, \tag{4}$$

де $C(\varepsilon)$ — кореляційна функція, яку розраховують як відношення числа точок n, попарні відстані між якими менші від ε, до квадрату загальної кількості точок N.

Дещо інакше розглядається вимірювання ФР міської транспортної мережі (МТМ) в роботі [23]. У цій роботі вимірювалося збільшення загальної довжини доріг $L(R)$ залежно від збільшення радіуса R:

$$D(L_i) = \frac{\log\,[L(R_i)/L(R_{i-1})]}{\log\,[R_i/R_{i-1}]}, \tag{5}$$

де R_i — радіус за шкалою i, $L(R_i)$ — довжина доріг за шкалою i, R_{i-1} — радіус за шкалою $i-1$, $L(R_{i-1})$ — довжина доріг за шкалою $i-1$.

Однак і (10), і (11) не враховують ієрархічності транспортних зв’язків, тобто всі вузли або дороги в моделях є однаковими, що не відповідає дійсності.

Міська транспортна мережа є неоднорідним фрактальним об’єктом, тобто є *мультифракталом*. Мультифрактал — комплексний фрактал, який може детермінуватися не одним єдиним алгоритмом побудови, а декількома алгоритмами, що послідовно змінюють один одного. Кожен з них генерує патерн зі своєю фрактальною розмірністю. Для опису мультифрактала обчислюють мультифрактальный спектр, що включає низку фрактальних розмірностей, які властиві елементам даного мультифрактала. Інакше кажучи, мультифрактал — це вихідна множина точок, яка представляється у вигляді об’єднання різних однорідних фрактальних множин, кожне з яких має своє власне значення фрактальної розмірності.

Враховуючи вищесказане, для повної характеристики МТМ потрібно розраховувати узагальнені фрактальні розмірності D_q і мультифрактальний спектр $f(a)$. Це є необхідним етапом, оскільки, як показано в роботах [8] і [24], МТМ є неоднорідними і мультифрактальними. Конкретну техніку роботи з визначення узагальненої фрактальної розмірності і мультфрактального спектра наведено в роботі [8].

Одною з перших практичних робіт, присвячених фрактальним дослідженням міських транспортних мереж, була робота *Л.Бенгігі* і *М. Дауда*, в якій аналізувалися мережі метрополітену і приміської залізниці Парижа [5]. У цій роботі, можливо вперше, автори дійшли висновку, що обидві мережі мають фрактальний характер, причому для метрополітену $D_c = 1{,}8$, а для приміської залізниці $D_c = 1{,}5$.

У 2003 р. розпочалися дослідження транспортної мережі Монреаля (Канада) методом фрактального аналізу. Проміжні результати цих досліджень представлені в роботі [18]. Предметами вивчення були рухливість транспорту у місті, оцінка міського землекористування, контроль демографічної і економічної потенції і оцінка ролі МТМ. При цьому використовували мапи геоінформаційної системи (ГІС) і обидва методи для розрахунку D_c. Було розраховано, що D_c транспортної мережі Монреаля дорівнює 1,7392. Автори не зробили узагальнюючих висновків, оскільки вважали виконану роботу лише початком досліджень.

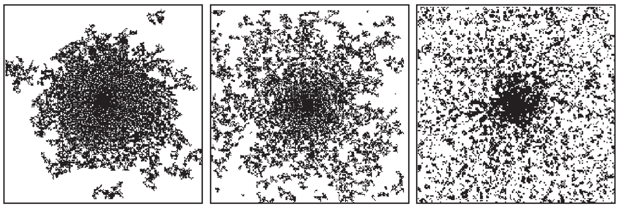

Рис. 6. Результати фрактального моделювання розвитку міста за умови різних коефіцієнтів дифузії і випадковості [25]

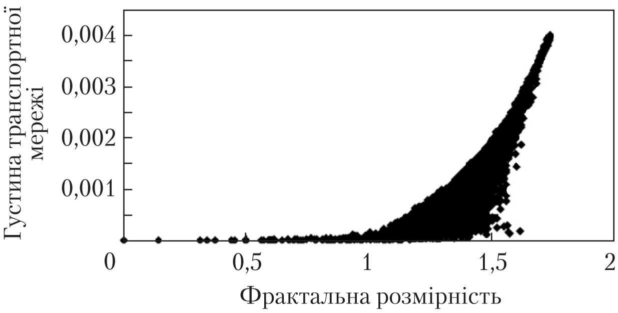

Рис. 7. Залежність фрактальної розмірності МТМ м. Даляня (КНДР) від її густини [24]

У роботі [23] на прикладі м. Сан Антоніо (округ Бейхар, Техас, США) зроблено оцінку співвідношення фрактальної розмірності транспортної мережі і фрактальної розмірності густини населення залежно від радіуса МТМ. Як і очікувалось, ці фрактальні розмірності зменшуються зі збільшенням радіуса, однак при цьому співвідношення розмінностей практично не змінюється. Існування градієнта фрактальної розмірності залежно від радіуса наочно показане в роботі *Л. Апостолоса* [25], у якій досліджувався фрактальний розвиток міста (рис. 6).

У роботі [24] досліджувалася фрактальна структура транспортної мережі м. Далянь (Китай). Це невелике за китайськими масштабами районне місто (площа району — 13,2 тис. км^2 (приблизно половина Львівської області), площа старої частини міста — 2,4 тис. км^2, кількість мешканців — 6,2 млн.) обрано для аналізу як одне з найрозвиненіших з економічного погляду, і таке, що вже має розвинену ТМ, що складається з 223 вулиць загальною протяжністю 585,8 км. Для МТМ Даляня визначено, що середнє значення D_c = 1,497. Однак важливою особливістю досліджень є те, що була знайдена емпірична залежність D_c від густини транспортних зв'язків у різних районах міста (км/км^2) (рис. 7). Це вказує, що фрактальність МТМ не є простою величиною.

Саме це зазначається в одній з найбільш ґрунтовних робіт [8], присвячених фрактальному аналізу МТМ. Встановлено, *по-перше*, що для транспортної мережі Казані D_c = 1,32; *по-друге*, зв'язок густини і ФР визначається математичною залежністю (3); *по-третє*, МТМ є мультфрактальною з узагальненою розмірністю $D_q = f(q)$, при цьому $D_{\min}$ = 1,22, $D_{\max}$ = 1,5.

У роботі [8] на модельній спрощеній автотранспортній мережі м. Казані визначався також час затримки «повідомлень», який є одним з основних факторів, що визначає продуктивність мережі і має теоретичний і практичний інтерес. Тут під «затримкою повідомлень» розуміється час, за який «повідомлення» проходить шлях від його джерела через мережу до місця призначення, тобто час перебування «повідомлення» у мережі. Було висунуто припущення, що час $T_{сер}$, який проводить «повідомлення» в мережі, залежить від фрактальної розмірності мережі D_c таким чином:

$$T_{сер} = \alpha N^{Dc}, \qquad (6)$$

де α — коефіцієнт, що має розмірність часу; N — кількість вузлів мережі.

Виявилось, що $T_{сер}$ нелінійно залежить також від інтенсивності потоку «повідомлень» λ. Ця нелінійність нагадує гіперболічну залежність, яку використовують для опису катастрофічних подій [26].

У роботі [27] час затримки визначався і експериментально. Автори зазначають складність таких експериментів, однак проведене дослідження показало, що коли значення інтенсивності вхідного потоку малі, то інтенсивність інформаційного потоку в мережі і зайнятість вузлів незначні, час доставлення повідомлень в основному визначається топологією мережі.

Із збільшенням інтенсивності вхідного потоку незважаючи на множину маршрутів, доставлення повідомлень до одержувача та навантаження мережі зростає, і суттєвими стають такі мережеві параметри, як час входу в мережу, довжина повідомлень, шляхи, якими проходять ці повідомлення по мережі (враховуючи черги, що утворюються ними відповідно до прийнятої дисципліни черги, коли це необхідно) тощо.

Подібну роботу з визначення пропускної здатності в мультисервісних телекомунікаційних мережах за допомогою методу фрактального аналізу виконано в НУ «Львівська політехніка» [28]. У роботі використано показник Херста H, який для гауссових процесів пов'язаний з D співвідношенням $H = 2 - D$. Проте для надійного обчислення H потрібен, *по-перше*, дуже великий репрезентативний масштаб, що містить декілька тисяч даних [29]; *по-друге*, оскільки телекомунікаційні мережі різко відрізняються від МТМ, тому методологія [28] не може бути прямо перенесеною на розрахунок ФР МТМ.

На нашу думку, все вищесказане (зрозуміло, з використанням ієрархічності вузлів) може стати підґрунтям розробки практичної методики для прогнозування виникнення заторів на міських вулицях.

Авторами роботи [30] на прикладі топології російських залізничних доріг проведено аналіз системних властивостей великих комунікаційних мереж; визначена залежність системних властивостей мереж від їх геометрії або топології; дано додаток методів фрактальної геометрії для визначення часу затримок в розподілених в топологічному сенсі мережах.

Одним з незвичайних результатів фрактального аналізу ТМ останнього часу було встановлення факту, що оптимальні шляхи в МТМ можуть існувати за умови $D_c \approx 1{,}22$ у двовимірному просторі [31]. Але ще більш дивним фактом є те, що ця розмірність характерна для переплутаних полімерних молекул ($D_c \approx 1{,}2$) [32], для пасом каналів, утворюваних у перколяційній структурі, по яких просочується рідина ($D_c \approx 1{,}22 \pm 0{,}01$) [33], для мінімальних шляхів по гілках дерев ($D_c \approx 1{,}22 \pm \pm 0{,}01$) [34]. Це дало підставу говорити про універсальність розмірності $D_c \approx 1{,}22$, пояснення якої потрібно шукати методами статистичної фізики [35].

Фрактальна розмірність $D_c \approx 1{,}22$ означає, що транспортні засоби самі знаходять собі оптимальні шляхи у складній дорожній мережі з розмірністю $D_c > 1{,}2$, утворюючи «власну» і більш оптимальну із зазначеною розмірністю транспортну мережу, залишаючи поза увагою можливі варіанти маршрутів внаслідок існування факторів, які не можна врахувати при проектуванні вулиць (погане покриття дороги; дорога занадто вузька, має багато поворотів; є можливість попасти в затор або надовго зупинитися перед світлофором; на дорозі проводяться ремонтні роботи тощо).

Спроби проектувальників додати до мережі нові зв'язки, які, на їх думку, повинні покращити мережу, іноді приводять до збільшення вартості проїзду і, вже на думку власників транспортних засобів, краще було б не додавати цих зв'язків (*парадокс Бресса* [36]). Це потрібно брати до уваги при створенні нових або реконструкції старих транспортних мереж.

На закінчення можна зробити такі висновки:

1. Фрактальний аналіз МТМ, який відображає природну автомодельність розвитку економічних структур, — це новий метод регіональних досліджень, який заслуговує всілякої підтримки з боку відповідних наукових, проектувальних і адміністративних служб.

2. Незважаючи на позитивні якості і можливості та на досить глибоку теоретичну проробку, цей метод поки що не знайшов поширення у світовій економічній практиці.

3. Фрактальний аналіз МТМ може стати інструментом для дослідження динаміки руху транспортних засобів і основою для створення нових методик економічних розрахунків, зокрема для визначення продуктивності мережі, прогнозування можливості виникнення заторів тощо.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Batty M., Longley P., Fotheringham A.* Urban growth and form: scaling, fractal geometry, and diffusion-limited aggregation // Environment and Planning. — 1989. — A 21. — P. 1447—1472.
2. *Chen Y., Luo, J.* The fractal features of the transport network of Henan Province // J. of Xinyang Teachers College. — 1998. — V. 11, No 2. — P. 172—177.
3. *Rodin V., Rodina E.* The fractal dimension of Tokyo's streets // Fractals. — 2000. — V. 8. — P. 413—418.
4. *Shen G.* A fractal dimension analysis of urban transportation networks // Geographical and Environmental Modelling. — 1997. — V. 1. — P. 221—236.
5. *Benguigui L., Daoud M.* Is the Suburban Railway System a Fractal? // Geographical Analysis. — 1991. — V. 23. — P. 363—368.
6. *Song C., Havlin S., Makse H.A.* Self-similarity of complex networks // Nature (London). — 2005. — V. 433. — P. 392—395.
7. *Song C., Havlin S., Makse H.A.* Origins of fractality in the growth of complex networks // Nature Physics. — 2006. — V. 2. — P. 275—281.
8. *Шахтурин Д.В.* Моделирование информационных данных в больших сетях // Электроника и информационные технологии (Электронный журнал) — 2009. — № 2(7). — зарегистрировано 14.01.2010 под номером 0420900067/0113. — fetmag.mrsu.ru/.../pdf/information_data_flow.pdf.
9. *Benguigui L., Daoud M.* Is the Suburban Railway System a Fractal? // Geographical Analysis. — 1991. — V. 23, № 4. — P. 362—368.
10. *Batty M.* Cities as Fractals: Simulating Growth and Form // Fractal and Chaos / Ed. By A.Grilly, R Earnashaw, H. Jones. — N.Y.: Springer, 1991. — P. 43—69.
11. *Mandelbrot B.* How long is the coast of Britain? Statistical self-similarity and fractional dimension // Science. — 1967. — 156. — P. 636—638.
12. *Цит.* по: Дубовиков М.М., Крянев А.В., Старченко Н.В. Размерность минимального покрытия и локальный анализ фрактальных временных рядов // Вестник РУДН Т3. — 2004. — № 1. — С. 81—95.
13. *Александров П.С., Пасынков Б.А.* Введение в теорию размерности. — М.: Наука, 1973. — 560 с.
14. Hausdorff F. Dimesion und Ausseres Mass // Matematishe Annalen. — 1919. — V. 79. — P. 157—179.
15. *Кроновер Р.М.* Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории. — М.: Постмаркет, 2000. — 352 с.
16. *Федер Е.* Фракталы: Пер. с англ. — М.: Мир, 1991. — 254 с.
17. *Кравченко О.В., Масюк В.М.* Компьютерное моделирование физических процессов на основе фрактальных функций // Электронное научно-техническое издание «Наука и образование». — 2005. — № 2. — http://technomag.edu.ru/doc/49299.html.
18. *Morency C., Chapleau R.* Fractal geometry for the characterisation of urban-related states: Greater Montreal Case // HarFA — Harmonic and Fractal Image Analysis (e-journal). — 2003. — P. 30—34. — http://www.fch.vutbr.cz/lectures/imagesci (www.fch.vutbr.cz/lectures/imagesci/download_ejournal/09...).
19. *HARFA*, Harmonic and Fractal Image Analyser, Software for the Determination of Fractal Dimension, www.fch.vutbr.cz/lectures/imagesci.
20. *Bourke P.* Fractal Dimension Calculator. — local.wasp.uwa.edu.au/~pbourke/fractals/fracdi.
21. *Roy A., Perfect E., Dunne W. M., McKay L. D.* (2007), Fractal characterization of fracture networks: An improved box-counting technique, J. Geophys. Res., 112, B12201, doi:10.1029/2006JB004582.
22. *Lu Y, Tang J.* Fractal dimension of a transportation network and its relationship with urban growth: a study of the Dallas — Fort Worth area // Environment and Planning B: Planning and Design. — 2004. — V. 31, № 6. — P. 895—911.
23. *Tang J.* Evaluating the relationship between urban road pattern and population using fractal geometry. — www.ucgis.org/summer03/studentpapers/junmeitang.pdf.
24. *Sun Z., Jia P., Kato H., Hayashi Y.* Distributive Continuous Fractal Analysis for Urban Transportation Network // Proceedings of the Eastern Asia Society for Transportation Studies. — 2007. — Vol. 6. — P. 1519—1531. — www.unagoya-u.ac.jp/sustain/paper/2007/kokusai/...
25. *Apostolos L.* Simulating Urban Growth through Cellular Automata: A New Way of Exploring the Fractal Nature of Urban Systems. — http://users.auth.gr/~alagaria/SIMULATION.pdf.
26. *Малинецкий Г.Г.* Новая реальность и будущее глазами синергетики. — http://www.smi-svoi.ru/content/?fl= 590&sn=1469.
27. *Евдокимов Ю.К., Шахтурин Д.В.* Исследование информационных потоков данных в телекоммуникационных сетях. — fetmag.mrsu.ru/.../pdf/Information_data_flow.pdf.
28. *Стрихалюк Б.М.* Фрактальний спосіб прогнозування потоків у мультисервісних мережах // Радіоелектроніка та телекомунікації. Вісник НУ «Львівська політехніка». — 2009. — № 645. — С. 88—95.
29. *Старченко В.Н.* Эконофизика и анализ финансовых временных рядов. — http://am.intrast.ru/analytics.php?id_analitika=13...
30. *Евдокимов Ю.К., Шахтурин Д.В.* Анализ системных свойств больших коммуникационных сетей на примере топологии российских железнодорожных дорог // Журнал «Нелинейный мир». — 2010. — № 5. — С. 297—301.

31. *Cieplak M., Maritan A., Banavar J.* Optimal paths and domain walls in the strong disorder limit // Phys. Rev. Lett. — 1994. — V. 72. — P. 2320—2324.
32. *Cieplak M., Maritan A., Banavar J.* Optimal paths and domain walls in the strong disorder limit // Phys. Rev. Lett. — 1994. — V. 72. — P. 2320—2324.
33. *Cieplak M., Maritan A., Banavar J.* Invasion percolation and Eden growth: Geometry and universality // Phys. Rev. Lett. — 1996. — V. 76. — P. 3754—3757.
34. *Dobrin R., Duxbury P.M.* Minimum Spanning Trees on Random Networks // Phys. Rev. Lett. — 2001. — V. 86. — P. 5076.
35. *Andrade J.S., Saulo Jr., Reis D.S., et all.* Ubiquitous fractal dimension of optimal paths // Computing in Science and Engineering. — 2011. — V. 13, No. 1. — P. 74—81. — www.comphys.ethz.ch/hans/p/528.pdf.
36. *Braess's* paradox. — en.wikipedia.org/wiki/Braess%27_paradox.

Я.В. Шевчук

ФРАКТАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ
ТРАНСПОРТНЫХ СЕТЕЙ

Рассмотрен новый метод фрактального анализа транспортных сетей (в частности, городской), который позволяет оценить степень их самоорганизации. Установлено, что реальна фрактальная размерность транспортных сетей, которая самоорганизуется движением транспортных средств, равняется 1,22 и характерна для спутанных полимерных волокон, каналов, образующихся при движении жидкости сквозь пористые материалы.

Ключевые слова: сложная транспортная сеть, фрактальная размерность, фрактальный анализ.

Ya.V. Shevchuk

FRACTAL ANALYSIS
OF TRANSPORT NETWORKS

The new method of fractal analysis of transport networks (in particular city), which provides an estimation of their self-organization degree, is considered. It is established that real fractal dimension of transport networks, which is self-organized by transport vehicles, equals 1,2 and is typical for disordered polymeric fibers and channels formed by fluid flow through porous materials.

Key words: complex transport network, fractal dimension, fractal analysis.

Надійшла до редакції 14.02.11