https://doi.org/10.15407/intechsys.2026.02.018
UDC 519.6

**Є.В. ВОДОЛАЗСЬКИЙ,** канд. техн. наук, старш. наук. співроб.,
Інститут інформаційних технологій та систем НАН України,
просп. Акад. Глушкова, 40, м. Київ, 03187, Україна
https://orcid.org/0000-0003-3906-256X
waterlaz@gmail.com

# ВЛАСТИВОСТІ ФУНДАМЕНТАЛЬНОЇ МАТРИЦІ В РАЗІ РЕКТИФІКАЦІЇ СТЕРЕОПАРИ ЗОБРАЖЕНЬ

*У роботі досліджено задачу ректифікації стереопари зображень на основі заданої фундаментальної матриці, що описує епіполярну геометрію між двома проєкціями сцени. Запропоновано аналітичний підхід до побудови перетворень, які приводять фундаментальну матрицю до канонічного вигляду, що відповідає ідеально вирівняній стереопарі з горизонтальними епіполярними лініями. Показано, що задача ректифікації може бути зведена до знаходження двох матриць повороту, для яких отримано спрощені умови існування. Запропонований підхід не потребує знання внутрішніх параметрів камер і може бути застосований у задачах 3D-реконструкції та комп'ютерного зору.*

***Ключові слова**: ректифікація зображень, фундаментальна матриця, епіполярні обмеження, проєктивна геометрія.*

## Вступ

Ректифікація — це процес геометричного перетворення двох зображень (стереопари), отриманих із різних положень камер, таким чином, щоб епіполярні лінії на обох зображеннях стали паралельними та горизонтальними. Іншими словами, ректифікація вирівнює зображення так, що відповідні точки на лівому та правому зображеннях знаходяться на одному горизонтальному рівні так, ніби пара зображень була знята такими двома камерами, розташованими на одній горизонтальній лінії, які дивляться прямо в одному напрямку. Це

Цитування: Водолазський Є.В. Властивості фундаментальної матриці в разі ректифікації стереопари зображень. I*nformation Technologies and Systems*. 2 (8). 2026. 18—24. https://doi.org/10.15407/intechsys.2026.02.018

спрощує пошук відповідностей між точками на лівому і правому зображеннях, що є ключовим етапом під час побудови карти глибини або відновлення 3*D*-сцени [1, 2].

Фундаментальна матриця [1, 3] $F$ рангу 2 розміром 3×3 пов'язує точки двох зображень, отримані під час фотографування статичної сцени двома камерами з різних положень та, можливо, з різними внутрішніми параметрами. Якщо деяка точка простору проєктується на зображенні лівої камери з координатами $(x_l, y_l) \in \mathbb{R}^2$, а на зображенні правої камери з координатами $(x_r, y_r) \in \mathbb{R}^2$, то вони пов'язані співвідношенням:

$$(x_l, y_l, 1) F \begin{pmatrix} x_r \\ y_r \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Відомо, що фундаментальна матриця має ранг 2 та має таку форму:

$$F = K_l^{-T} R_l^{-T} \left[\vec{d}\right]_\times R_r^{-1} K_r^{-1},$$

де $K_l$ та $K_r$ — калібрувальні матриці лівої та правої камери (залежать від їх внутрішніх параметрів), $R_l$ та $R_r$ — матриці повороту, що описують орієнтацію камер у просторі, $\left[\vec{d}\right]_\times$ — матриця рангу 2, яка виражає векторну операцію перехресного добутку і кодує відстань (базу) між центрами камер.

Калібрувальні матриці $K_l$ та $K_r$ мають такий вигляд:

$$K_l = \begin{pmatrix} f_l & 0 & p_{xl} \\ 0 & f_l & p_{yl} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad K_r = \begin{pmatrix} f_r & 0 & p_{xr} \\ 0 & f_r & p_{yr} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

де $f_l$ та $f_r$ — фокусні відстані лівої та правої камер; $(p_{xl}, p_{yl})$ та $(p_{xr}, p_{yr})$ — центри проєктування лівої та правої камер.

Застосування пари лінійних перетворень $H_l$ та $H_r$ до пари зображень змінює координати точок $(x_l, y_l)$ та $(x_r, y_r)$ на $(x_l, y_l)$ та $(x_r, y_r)$ на зображеннях за правилами:

$$(\alpha_l x_{l'}, \alpha_l y_{l'}, \alpha_l)^T = H_l (x_l, y_l, 1)^T,$$
$$(\alpha_r x_{r'}, \alpha_r y_{r'}, \alpha_r)^T = H_r (x_r, y_r, 1)^T,$$

для деяких $\alpha_l$ та $\alpha_r$. Фундаментальна матриця для нової пари зображень в цьому разі набуває вигляду:

$$F' = H_l^{-T} F H_r^{-1}.$$

Задача ректифікації полягає в тому, щоб за фундаментальною матрицею $F$ знайти таку пару лінійних перетворень $H_l$ та $H_r$, яка трансформує пару зображень на таку, що знята парою однакових камер з однаковою орієнтацією. Крім того, напрям знімання має бути перпендикулярним до прямої, що проходить через обидві камери. У термінах фундаментальної матриці це виражається як

$$F' \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

де символ хвиляста риска позначає рівність з точністю до множника.

## Результати

Зазвичай задачу ректифікації розв'язують методом пошуку будь-якої пари лінійних перетворень $H_l$ та $H_r$, що перетворюють $F$ до бажаного вигляду [3–6]. Однак, відомо, що шукані перетворення мають вигляд:

$$H^{-1} = K \cdot R = \begin{pmatrix} f & 0 & p_x \\ 0 & f & p_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix},$$

де $K$ — деяка калібрувальна матриця, а $R$ — матриця повороту.

Оскільки матриця $F$ має ранг 2, то існує [1] такий вектор $\left(e_x, e_y, 1\right)$, що

$$F \cdot (e_x, e_y, 1)^T = (0,0,0)^T. \tag{1}$$

Оскільки після ректифікації епіполяри мають бути спрямовані в напрямку осі $x$, а матриця $F'$ має нульовий перший стовпчик, то

$$F' \cdot (1,0,0)^T = (0,0,0)^T. \tag{2}$$

Для того, щоб матриця $H$ задовольняла умовам для необхідного перетворення зображення, вона має перетворювати вектор $(1,0,0)^T$ на вектор епіполяра $(e_x, e_y, 1)^T$, а отже, має виконуватись співвідношення $K \cdot R \cdot (1,0,0)^T \sim (e_x, e_y, 1)^T$. Звідси випливає, що $K \cdot (r_{11}, r_{21}, r_{31})^T \sim$ $\sim (e_x, e_y, 1)^T$, а отже

$$(fr_{11} + p_x, fr_{21} + p_y, r_{31})^T \sim (e_x, e_y, 1)^T,$$

що означає

$$(fr_{11} + p_x, fr_{21} + p_y, r_{31})^T = (e_x r_{31}, e_y r_{31}, r_{31})^T,$$

звідки випливає співвідношення:

$$\begin{cases} p_x = e_x - f \dfrac{r_{11}}{r_{31}}, \\ p_y = e_y - f \dfrac{r_{21}}{r_{31}}. \end{cases}$$

Користуючись співвідношенням (1) та (3), маємо:

$$F\cdot K=F\cdot\begin{pmatrix} f & 0 & p_x\\ 0 & f & p_y\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=F\cdot\begin{pmatrix} f & 0 & e_x-f\dfrac{r_{11}}{r_{31}}\\ 0 & f & e_y-f\dfrac{r_{21}}{r_{31}}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=$$

$$=F\cdot\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & e_x\\ 0 & 0 & e_y\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} f & 0 & -f\dfrac{r_{11}}{r_{31}}\\ 0 & f & -f\dfrac{r_{21}}{r_{31}}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\right)=F\cdot\begin{pmatrix} f & 0 & -f\dfrac{r_{11}}{r_{31}}\\ 0 & f & -f\dfrac{r_{21}}{r_{31}}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\sim F\cdot\begin{pmatrix} r_{31} & 0 & -r_{11}\\ 0 & r_{31} & -r_{21}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Оскільки $R$ — є матрицею повороту і складається з ортонормованої трійки векторів, маємо:

$$\begin{pmatrix} r_{11}\\ r_{12}\\ r_{13}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} r_{21}\\ r_{22}\\ r_{23}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} r_{31}\\ r_{32}\\ r_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} r_{22}r_{33}-r_{23}r_{32}\\ r_{23}r_{31}-r_{21}r_{33}\\ r_{21}r_{32}-r_{22}r_{31}\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} r_{31}\\ r_{32}\\ r_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} r_{11}\\ r_{12}\\ r_{13}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} r_{21}\\ r_{22}\\ r_{23}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} r_{12}r_{23}-r_{13}r_{22}\\ r_{13}r_{21}-r_{11}r_{23}\\ r_{11}r_{22}-r_{12}r_{21}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_{21}\\ r_{22}\\ r_{23}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} r_{31}\\ r_{32}\\ r_{33}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} r_{11}\\ r_{12}\\ r_{13}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} r_{32}r_{13}-r_{33}r_{12}\\ r_{33}r_{11}-r_{31}r_{13}\\ r_{31}r_{12}-r_{32}r_{11}\end{pmatrix}.$$

А отже, для матриці $F\cdot K\cdot R$ справедливим є співвідношення:

$$F\cdot K\cdot R\sim F\cdot\begin{pmatrix} r_{31} & 0 & -r_{11}\\ 0 & r_{31} & -r_{21}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13}\\ r_{21} & r_{22} & r_{23}\\ r_{31} & r_{32} & r_{33}\end{pmatrix}\sim$$

$$\sim F\cdot\begin{pmatrix} 0 & r_{31}r_{12}-r_{32}r_{11} & r_{31}r_{13}-r_{33}r_{11}\\ 0 & r_{31}r_{22}-r_{32}r_{21} & r_{31}r_{23}-r_{33}r_{21}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\sim F\cdot\begin{pmatrix} 0 & r_{23} & -r_{22}\\ 0 & -r_{13} & r_{12}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Подібні міркування справедливі для перетворень лівої камери:

$$R_l^T\cdot K_l^T\cdot F\sim\begin{pmatrix} 0 & \rho_{23} & -\rho_{22}\\ 0 & -\rho_{13} & \rho_{12}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}^T\cdot F.$$

Таким чином, задача ректифікації спрощується до пошуку таких двох матриць повороту, що:

$$\begin{pmatrix} 0 & \rho_{23} & -\rho_{22} \\ 0 & -\rho_{13} & \rho_{12} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T \cdot F \cdot \begin{pmatrix} 0 & r_{23} & -r_{22} \\ 0 & -r_{13} & r_{12} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

що значно простіше за початкову умову:

$$R_l^T \cdot K_l^T \cdot F \cdot K_r \cdot R_r \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

## Висновки

У статті детально розглянуто задачу ректифікації стереопари за заданою фундаментальною матрицею, яка повністю визначає епіполярну геометрію між двома зображеннями сцени. Запропонований підхід базується на аналітичному дослідженні властивостей фундаментальної матриці та дозволяє перейти від загальної постановки задачі до значно простішої конструкції шуканих перетворень.

Основним результатом роботи є встановлення того факту, що задачу ректифікації можна звести до знаходження двох матриць повороту, які задовольняють певним узгодженим умовам, що випливають із структури фундаментальної матриці. На відміну від класичних підходів, які передбачають пошук довільних проєктивних перетворень, отримана редукція істотно зменшує кількість ступенів свободи задачі та спрощує і теоретичний аналіз, і практичну реалізацію алгоритмів ректифікації.

Важливою перевагою запропонованого підходу є те, що він не потребує знання внутрішніх параметрів камер. Це робить метод придатним для широкого класу прикладних задач, зокрема у випадках, коли калібрування камер є неточним або взагалі недоступним. Таким чином, результати роботи можуть бути безпосередньо застосовані у задачах комп'ютерного зору, таких як побудова карти глибини, відновлення тривимірної структури сцени, а також у системах стереозору в реальному часі. Отримані співвідношення дають більш глибоке розуміння геометричної природи ректифікації та ролі фундаментальної матриці у цьому процесі.

Перспективним напрямом подальших досліджень є розробка чисельно стійких алгоритмів знаходження відповідних матриць повороту, а також аналіз впливу похибок оцінки фундаментальної матриці на якість ректифікації.

***ПОВІДОМЛЕННЯ***

***Декларація про конфлікт інтересів.*** Автор не повідомляє про жодний потенційний конфлікт інтересів.

***Фінансування.*** Автор заявляє, що під час підготовки цього рукопису не отримував жодних коштів, грантів чи іншої підтримки.

***Використання штучного інтелекту.*** Автор заявляє, що інструменти за допомогою штучного інтелекту не використовувалися при написанні статті.

ЛІТЕРАТУРА / REFERENCES

1. Hartley R, Zisserman A. *Multiple View Geometry in Computer Vision.* Cambridge University Press, 2-nd ed., 2004, 655 p. https://doi.org/10.1017/CBO9780511811685
2. Longuet-Higgins H. A computer algorithm for reconstructing a scene from two projections. *Nature*, 1981, Vol. 293, 133–135. https://doi.org/10.1038/293133a0
3. Hartley R.I. Theory and Practice of Projective Rectification. *International Journal of Computer Vision,* 1999, Vol. 35, 115–127. https://doi.org/10.1023/A:1008115206617
4. Fusiello A., Trucco E., Verri A. A compact algorithm for rectification of stereo pairs. *Machine Vision and Applications,* 2000, Vol. 12, 16–22. https://doi.org/10.1007/s001380050120
5. Zhou A., Wei R., Li Z., Pu J., Yu J. A Fast Epipolar Rectification Method Based on Fundamental Matrix. *2021 International Conference on Communications, Information System and Computer Engineering (CISCE)*, Beijing, China, 2021, 381–386. https://doi.org/10.1109/CISCE52179.2021.9445944
6. Monasse P., Morel J-M., Tang Z. Three-step image rectification. *British Machine Vision Conference, BMVC 2010,* Article 89*,* 1–10. http://doi.org/10.5244/C.24.89

Отримано / Received 19.03.2026
Прийнято / Accepted 05.05.2026
Опубліковано / Published 01.06.2026

Ye.V. VODOLAZSKYI, PhD (Engineering), Senior Researcher,
Institute of Information Technologies and Systems of the NAS of Ukraine,
40, Hlushkova Akad. ave., Kyiv, 03187, Ukraine
https://orcid.org/0000-0003-3906-256X
waterlaz@gmail.com

PROPERTIES OF THE FUNDAMENTAL MATRIX
IN THE RECTIFICATION OF STEREO PAIRS OF IMAGES

**Introduction.** This paper addresses the problem of stereo pair rectification based on a given fundamental matrix, which encodes the epipolar geometry between two images of a static scene acquired from different viewpoints. Rectification is a key preprocessing step, as it transforms the images in such a way that corresponding points lie on the same horizontal scanlines, which significantly simplifies the correspondence search and subsequent depth estimation in many computer vision tasks. Unlike classical approaches that construct rectifying transformations through general linear transformations, we exploit the intrinsic structure of the fundamental matrix. The conditions are explored under which the fundamental matrix can be transformed into a canonical form corresponding to a perfectly rectified stereo configuration with horizontal epipolar lines.

**The Purpose of the paper** is to investigate the problem of rectification of a stereo pair of images based on a given fundamental matrix describing the epipolar geometry between two projections of the scene.

**Methods**. An analytical approach is proposed to construct transformations that bring the fundamental matrix to a canonical form corresponding to a perfectly aligned stereo pair with horizontal epipolar lines.

**Results.** The main contribution of the paper is the reduction of the rectification problem to the problem of finding two rotation matrices satisfying a set of constraints

derived from the properties of the fundamental matrix. As a result, the original problem of determining arbitrary projective transformations is replaced by a more tractable problem with significantly fewer degrees of freedom.

**Conclusions.** An important feature of the proposed approach is that it does not require knowledge of the intrinsic calibration parameters of the cameras. This makes the method applicable in uncalibrated settings, where only the fundamental matrix is available. Such scenarios frequently arise in practical applications, including structure-from-motion pipelines, stereo vision systems, and 3D scene reconstruction from image pairs. The proposed framework can serve as a basis for developing efficient numerical algorithms for stereo rectification. Future work may include the study of numerical stability, robustness to noise in the estimation of the fundamental matrix, and extensions to multi-view settings.

***Keywords:*** *stereo image rectification, fundamental matrix, epipolar constraints, projective geometry.*