



УДК 517.946

<http://dx.doi.org/10.15407/dopovidi2016.04.035>

Академик НАН Украины Ю. Г. Кривонос¹, И. Т. Селезов²

¹Институт кибернетики им. В. М. Глушкова НАН Украины, Киев

²Институт гидромеханики НАН Украины, Киев

E-mail: selezov@yandex.ru

Моделирование распространения сигнала в реальных системах с конечным интервалом и поглощением

Исследуется распространение волн на основе обобщенного гиперболического уравнения с учетом диссипации, описывающего распространение волн с конечной скоростью. Анализируется распространение гармонических волн и начально-краевая задача о распространении импульса от входа на конечном интервале с полным поглощением на выходе на основе преобразования Лапласа и численного обращения.

Ключевые слова: распространение волн, конечный интервал, поглощение, преобразование Лапласа.

В реальных системах конечной длины сигнал от входа распространяется вдоль системы, приходит в конечную область интервала, где может отражаться или поглощаться частично или полностью в зависимости от задания стратегии функционирования системы. В данном сообщении рассматривается случай полного поглощения.

Необходимо отметить, что передача сигналов с полным поглощением на выходе на основе телеграфного уравнения представляет интерес как в компьютерных устройствах при обработке сигналов [1], так и в биологических, включая мозговую, при передаче сигналов синапсами [2]. Некоторые частные задачи для телеграфного уравнения исследованы аналитически, а в последние годы компьютерным моделированием [3, 4]. Так, решение задачи в полубесконечной области без учета диссипативного члена получено в [5]. Телеграфное уравнение как частный случай общего гиперболического уравнения анализировалось также в работе [6] с применением функций Римана. Сингулярное вырождение уравнения и построение обобщенных решений исследовалось в [7].

В реальных системах любое возмущение распространяется с конечной скоростью [8–15].

Максвелл проводил исследования по теории газов на основе кинетической теории газов и показал, что волны в газах тоже распространяются с конечной скоростью (1867) в отличие от традиционной теории, предсказывающей бесконечную скорость распространения, т. е. обобщил параболическую модель в гиперболическую. Начиная от Максвелла, Каттанео (1948) было записано транспортное уравнение, дополненное членом с временной релаксацией η_1 , и в результате это привело к обобщению параболического уравнения в гиперболическое телеграфное уравнение.

Рассмотрим уравнение для функции $T(x, y, t)$, описывающей состояние системы при его резком изменении (неравновесная термодинамика, движение частиц в среде, седиментация и др.):

$$\nabla^2 T - \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} - \frac{1}{k_1} \frac{\partial T}{\partial t} = 0, \quad (1)$$

где c_1 – скорость распространения возмущения, которая определяется как $c_1 = \sqrt{k_1/\eta_1}$; η_1 – параметр релаксации; k_1 – коэффициент диффузии; x и y – пространственные координаты; t – время; ∇^2 – лапласиан. Это гиперболическое уравнение с диссипацией. Вклад гиперболического и параболического операторов определяется решением уравнения (1). При мгновенном включении сигнала его передача в начальный момент времени описывается гиперболическим оператором. А потом проявляются диффузионные эффекты.

Все последующие обобщения параболических моделей основаны на таком обобщенном транспортном уравнении. В результате было предложено много моделей, обобщающих параболические.

В данном сообщении в связи с вышеуказанным рассматривается распространение гармонических волн на основе обобщенного уравнения, а также начально-краевая задача на конечном интервале, когда на входе задан импульс, а на выходе имеет место полное поглощение.

В дальнейшем, принимая в качестве исходных характерных величин η_1 (с) и k_1 (м²/с), получаем

$$x^* = \frac{x}{\sqrt{\eta_1 k_1}}, \quad t^* = \frac{t}{\eta_1}, \quad T^* = \frac{T}{T_0}, \quad c_1^* = 1, \quad k_1^* = 1. \quad (2)$$

Уравнение (1) в одномерном случае с учетом (2) принимает вид

$$\frac{\partial^2 T^*}{\partial x^{*2}} - \frac{\partial^2 T^*}{\partial t^{*2}} - \frac{\partial T^*}{\partial t^*} = 0. \quad (3)$$

В дальнейшем звездочки опускаем.

Гармонические волны. Для исследования распространения свободных гармонических волн на основе (3) задаем возмущения в виде бегущих волн

$$T(x, t) = e^{i(kx - \omega t)}, \quad (4)$$

где $k = 2\pi/\lambda$ – волновое число; λ – длина волны; $\lambda^* = \lambda/\sqrt{\eta_1 k_1}$; $\omega = kc_p$ – круговая частота; c_p – фазовая скорость; $c_p^* = c_p \sqrt{\eta_1/k_1}$.

После подстановки (4) в (3) получаем условие разрешимости в виде дисперсионного уравнения и записываем (4) так:

$$e^{ik(x-(\operatorname{Re} c_p)t)} e^{k(\operatorname{Im} c_p)t}. \quad (5)$$

Величины $\operatorname{Re} c_p$ и $\operatorname{Im} c_p$ находятся из дисперсионного уравнения в явном виде

$$\operatorname{Re} c_p = \sqrt{1 - \frac{1}{4} \left(\frac{\lambda}{2\pi} \right)^2}, \quad \operatorname{Im} c_p = -\frac{1}{2} \frac{\lambda}{2\pi} \quad (6)$$

и второй множитель в (6) равен $\exp(-t/4)$.

Из (5) и (6) видно, что предельный переход $\lambda \rightarrow 0$ соответствует выходу на характеристику $\operatorname{Re} c_p = 1$, а с увеличением длины волны λ вклад гиперболичности убывает.

Начально-краевая задача. Исследуем распространение волн от мгновенно включаемого источника на конечном интервале. При мгновенном включении сигнала его передача в начальный момент времени описывается гиперболическим оператором. А потом проявляются диффузионные эффекты.

Начально-краевая задача для функции $T(x, t)$ на основе уравнения (3) формулируется в виде

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} - \frac{\partial T}{\partial t} = 0, \quad x \in (0, l_1), \quad t \in (0, T_1) \quad (7)$$

с граничными условиями

$$T(x, t)|_{x=0} = H(t), \quad T(x, t)|_{x=l_1} = H\left(t - \frac{l_1}{c_1}\right), \quad (8)$$

где $H(t)$ — функция Хевисайда, и начальными условиями

$$T(x, t)|_{t=0} = 0, \quad T_t(x, t)|_{t=0} = 0. \quad (9)$$

Для решения задачи (7)–(9) применяем преобразование Лапласа

$$T^L(x, p) = \int_0^\infty T(x, t) e^{-pt} dt. \quad (10)$$

В пространстве изображений получаем из (7)–(10)

$$\frac{d^2 T^L}{dx^2} - p(p+1) T^L = 0, \quad (11)$$

$$T^L(x, p)|_{x=0} = \frac{1}{p}, \quad T^L(x, p)|_{x=l_1} = \frac{1}{p} e^{-pl_1/c_1}. \quad (12)$$

Решение уравнения (11) записывается в виде

$$T^L(x, p) = C_1 e^{\lambda x} + C_2 e^{-\lambda x}, \quad (13)$$

где

$$\lambda = \sqrt{p(p+1)}, \quad (14)$$

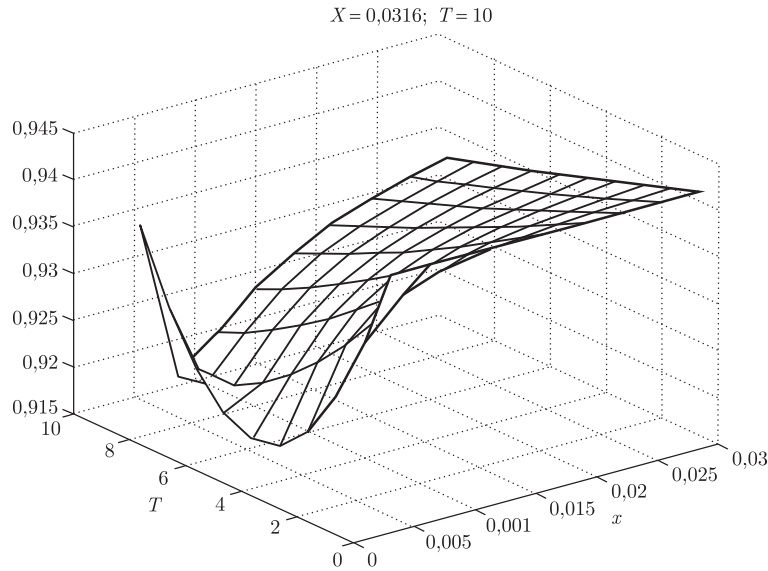


Рис. 1

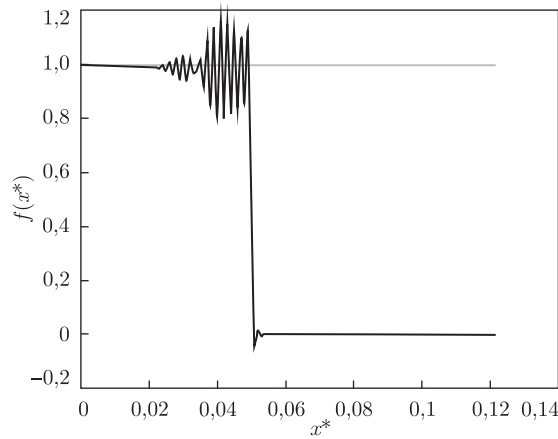


Рис. 2

а произвольные постоянные C_1 и C_2 определяются из граничных условий (12)

$$C_1 = -\frac{1}{p} \frac{e^{-\lambda l_1} - e^{-pl_1/c_1}}{e^{\lambda l_1} - e^{-\lambda l_1}}, \quad C_2 = \frac{1}{p} \frac{e^{\lambda l_1} - e^{-pl_1/c_1}}{e^{\lambda l_1} - e^{-\lambda l_1}}. \quad (15)$$

Таким образом, соотношения (13) и (15) представляют точное решение в пространстве изображений задачи (7)–(9) на конечном интервале $x \in (0, l_1)$, который соответствует входу в систему при $x = 0$ и дальнейшему распространению волн до конца интервала $x = l_1$, где имеет место полное поглощение волн. На входе при $x = 0$ задается функция Хевисайда. На выходе при $x = l_1$ задается условие полного поглощения, так что волны обратно не распространяются. Для другой входной функции решение может быть получено с помощью интеграла Дюамеля.

Необходимо отметить, что в реальном цилиндрическом нервном волокне имеет место геометрическая дисперсия волн. Здесь рассматривается уравнение, описывающее одномерную систему, в которой не учитывается дисперсия волн. Это линейная гиперболическая

диссипативная система, которая может применяться и для распространения нервного возбуждения.

Ясно, что в начальный момент времени, когда $\lambda \rightarrow 0$, проявляется гиперболичность, т.е. распространение сигнала с конечной скоростью. При увеличении λ резко возрастает влияние диссипативности и сигнал плохо распространяется в конечную точку. Синапс (в мозге) сильно диссипируется из-за нарушения миелиновой (диэлектрической) внешней оболочки и потенциал реального нервного возбуждения в конечную точку (нейрон) приходит сильно искаженный или вообще не приходит. Это приводит к заболеваниям типа рассеянного склероза — Альцгеймера, Паркинсона [2].

На основе точного решения, полученного в пространстве изображений Лапласа, построено численное решение методом Дурбина. Эволюция возмущения в пространстве и времени показана на рис. 1. Распространение импульса в момент времени $t^* = 0,05$ исследовано методом Эйлера и показано на рис. 2.

Авторы выражают благодарность А. Н. Химичу и Д. В. Баранову за проведенные расчеты.

Цитированная литература

1. Винер Н. Кибернетика или управление и связь в животном и машине. — Москва: Наука, 1983. — 403 с.
2. Селезов И. Т., Кривонос Ю. Г. Волновые задачи биогидродинамики и биофизики. — Киев: Наук. думка, 2013. — 308 с.
3. McCartin B. J. Characteristic based schemes for the hyperbolic heat conduction equations // Appl. Math. Sci. — 2009. — **3**, No 42. — P. 2055. — 2083.
4. Vabishchevich P. N. Splitting schemes for hyperbolic heat conduction equation // BIT Number Math. — 2013. — DOI 10.1007/s10543-013-0423-7.
5. Деч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа. — Москва: ГИФМЛ, 1960. — 208 с.
6. Курант Р. Уравнения с частными производными. — Москва: Мир. — 1964. — 830 с.
7. Кривонос Ю. Г., Селезов И. Т. О моделировании седиментации гиперболическим уравнением и его вырождение // Доп. НАН України. — 2014. — № 9. — С. 40–43.
8. Maxwell J. C. A dynamical theory of the electromagnetic field // Phil. Trans. Roy. Soc. — 1865. — **155**. — P. 459–512.
9. Maxwell J. C. On the dynamical theory of gases // Phil. Trans. Roy. Soc. — 1867. — **157**. — P. 49–88.
10. Cattaneo C. Sulla conduzione del calore // Atti Seminario Mat. Fis. Univ. Modena. — 1948. — **3**. — P. 83–124.
11. Vernotte P. Les paradoxes de la theorie continue de l'equation de la chaleur // C.R. Hebd. Séanc. Acad. Sci. — 1958. — **246**, No 22. — P. 3154 3155; La veritable equation de la chaleur. — 1958. — **247**, No 23. — P. 2103 2105.
12. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. Теоретическая физика. Том 2. — Москва: ГИФМЛ, 1960. — 400 с.
13. Luikov A. V. Application of irreversible thermodynamics methods to investigation of heat and mass transfer // Int. J. Heat Mass Transfer. — 1966. — **9**. — P. 139–152.
14. Селезов И. Т. Концепция гиперболичности в теории управляемых динамических систем // Кибернетика и вычисл. техника. — Киев: Наук. думка, 1969. — Вып. 1. — С. 131–137.
15. Селезов И. Т., Кривонос Ю. Г. Математические методы в задачах распространения и дифракции волн. — Киев: Наук. думка, 2012. — 232 с.

References

1. Wiener N. Cybernetics or control and communication in the animal and the machine, Cambrifge: Massachus. Institute of Techonogy, 1961.
2. Selezov I. T., Kryvonos Yu. G. Wave problems of biohydrodynamics and biophysics, Kiev: Nauk. Dumka, 2013 (in Russian).

3. *Mc Cartin B. J.* Appl. Math. Sci., 2009, **3**, No 42: 2055–2083.
4. *Vabishchevich P. N.* BIT Number Math., 2013. DOI 10.1007/s10543-013-0423-7.
5. *Doetsch G.* Anleitung zum praktischen gebrauch der Laplace-Transformation, und der Z-transformation, München: R. Oldenbourg, 1956.
6. *Courant R., Hilbert D.* Methods of mathematical physics. V. 2. New York-London: Interscience, 1962.
7. *Kryvonos Yu. G., Selezov I. T.* Dop. NAN of Ukraine. 2014, No 9: 40–43 (in Russian).
8. *Maxwell J. C.* A dynamical theory of the electromagnetic field, Phil. Trans. Roy. Soc., 1865, **155**: 459–512.
9. *Maxwell J. C.* Philos. Trans. Roy. Soc., London, 1867, **157**: 49–88.
10. *Cattaneo C.* Atti Seminario Mat. Fis. Univ. Modena, 1948, **3**: 83–124.
11. *Vernotte P. C. R.* Hebd. Séanc. Acad. Sci., 1958, **246**, No 22: 3154–3155; La veritable equation de la chaleur, 1958, **247**: No 23: 2103–2105.
12. *Landau L. D., Lifshitz E. M.* The Classical Theory of Fields of a Course of Theoretical Physics. V. 2: Pergamon Press, 1971.
13. *Luikov A. V.* Int. J. Heat Mass Transfer., 1966, **9**: 139–152.
14. *Selezov I. T.* Cybernetics and Computat. Eng. Kiev: Nauk. Dumka, 1969, Iss. 1: 31–137 (in Russian).
15. *Selezov I. T., Krivonos Yu. G.* Mathematical methods in problems of propagation and diffraction of waves, Kiev: Nauk. Dumka, 2012 (in Russian).

Поступило в редакцію 08.10.2015

Академік НАН України **Ю. Г. Кривонос¹, І. Т. Селезов²**

¹Інститут кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України, Київ

²Інститут гідромеханіки НАН України, Київ

E-mail: selezov@yandex.ru

Моделювання поширення сигналу в реальних системах з скінченим інтервалом та поглинанням

Досліджується поширення хвиль на основі узагальненого гіперболічного рівняння з дисипацією, яке описує поширення хвиль зі скінченою швидкістю. Аналізується поширення гармонічних хвиль та початково-крайова задача про поширення імпульсу від входу на скінченному інтервалі з повним поглинанням на виході на основі перетворення Лапласа і чисельного обернення.

Ключові слова: поширення хвиль, скінченний інтервал, поглинання, перетворення Лапласа.

Academician of the NAS of Ukraine **Yu. G. Kryvonos¹, I. T. Selezov²**

¹V. M. Glushkov Institute of Cybernetics of the NAS of Ukraine, Kiev

²Institute of Hydromechanics of the NAS of Ukraine, Kiev

E-mail: selezov@yandex.ru

Modeling of the signal propagation in real systems with finite interval and absorption

The wave propagation is investigated on the basis of a generalized hyperbolic equation with dissipation describing the wave propagation with finite velocity. The propagation of harmonic waves and the initial boundary-value problem of a propagation of the pulse from the input on a finite interval with full absorption are analyzed on the basis of the Laplace transformation and a numerical inverse transformation.

Keywords: wave propagation, finite interval, absorption, Laplace transform.