УДК 517.9 http://dx.doi.org/10.15407/dopovidi2016.04.020

С. М. Чуйко, Е. В. Чуйко

Донбасский государственный педагогический университет, Славянск

E-mail: chujko-slav@inbox.ru

Линейные нетеровы краевые задачи для вырожденных дифференциально-алгебраических систем с импульсным воздействием

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины А. А. Бойчуком)

Найдены достаточные условия разрешимости, а также конструкция обобщенного оператора Грина линейной нетеровой краевой задачи для вырожденной дифференциально-алгебраической системы с импульсным воздействием.

Ключевые слова: дифференциально-алгебраическая система, нетерова краевая задача, обобщенный оператор Грина, вырожденное импульсное воздействие.

1. Постановка задачи. Исследуем задачу о построении решений [1–5] $z(t) \in C^1\{[a;b]\setminus \{\tau_i\}_I\}$ вырожденной ($k \neq n$) дифференциально-алгебраической системы [6]

$$A(t)z' = B(t)z + f(t), \quad t \neq \tau_i, \quad A(t), B(t) \in \mathbb{R}^{k\times n}, \quad A(t), B(t), f(t) \in \mathbb{C}[a,b], \tag{1}$$

с импульсным воздействием [1, 2]

$$\Delta z(\tau_i) = \mathcal{S}_i z(\tau_i - 0) + a_i, \quad \mathcal{S}_i \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad \tau_i \in [a,b], \quad a_i \in \mathbb{R}^n, \quad i = 1, 2, \ldots, p, \tag{2}$$

подчиненной краевому условию [1, 7]

$$\ell z(\cdot) = \alpha, \qquad \ell z(\cdot)\colon \mathbb{C}[a,b] \to \mathbb{R}^m, \qquad \alpha \in \mathbb{R}^m. \tag{3}$$

Достаточные условия однозначной разрешимости и структура гладкого решения $z(t) \in C[a,b]$ двухточечной краевой задачи для системы (1) были получены в [8]. Условия существования и структура решений аналогичной нетеровой краевой задачи (1), (3) в общем случае ($k \neq n$) были получены в [6] с использованием понятия совершенных троек матриц. Конструктивные условия разрешимости и структура решения дифференциально-алгебраических систем (1) в случае $k = n$ найдены в [9, 10] с использованием центральной канонической формы. Более современные условия разрешимости и техника приведения системы (1) к центральной канонической форме были получены в [11]. Целью данной работы является нахождение конструктивных достаточных условий разрешимости задачи Коши и линейной нетеровой краевой задачи (1), (2), (3) с импульсным воздействием в общем случае $k \neq n$, в частности, для переопределенных $k > n$ и недоопределенных $k \leqslant n$ вырожденных дифференциально-алгебраических систем. При условии

$$P_{A^*(t)}B(t) = 0, \qquad P_{A^*(t)}f(t) = 0 \tag{4}$$

однородная часть системы (1) по меньшей мере одним способом разрешима относительно производной $z' = A^+(t)B(t)z$.

2. Достаточные условия в случае разрешимости относительно производной. Предположим, что псевдообратная матрица $A^+(t)$ непрерывна; обозначим $X_0(t)$ нормальную фундаментальную матрицу $X_0'(t) = A^+(t)B(t)X_0(t)$, $X_0(a) = I_n$ полученной системы обыкновенных ($A^+(t)B(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$) дифференциальных уравнений. При условии (4) система (1) имеет непрерывное решение вида

$$z(t,c) = X_0(t)c + K[f(s)](t), \qquad K[f(s)](t) := X_0(t)\int\limits_a^t X_0^{-1}(s)A^+(s)f(s)\,ds, \qquad c \in \mathbb{R}^n.$$

При условии $P_{A^*(t)}B(t) = 0$ фундаментальную матрицу нетривиальных решений задачи

$$z' = A^+(t)B(t)z, \qquad t \neq \tau_i, \qquad \Delta z(\tau_i) = \mathcal{S}_i z(\tau_i - 0)$$

ищем в виде

$$X(t) = \begin{cases} X_0(t)W_0, & t \in [a;\tau_1[, \\ X_0(t)W_1, & t \in [\tau_1;\tau_2[, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ X_0(t)W_p, & t \in [\tau_p;b], \end{cases} \tag{5}$$

где $W_1,\ldots,W_p$ — неизвестные постоянные $(n\times n)$-матрицы; $W_0 := I_n$. В силу невырожденности матриц $X_0(\tau_i)$ имеем $W_{i+1} = X_0^{-1}(\tau_i)(I_n + \mathcal{S}_i)X_0(\tau_i)W_i$, $i = 1,2,\ldots,p-1$. Найденная нормальная фундаментальная матрица $X(t)$ является обобщением нормальной ($X(a) = I_n$) фундаментальной матрицы $X(t)$ задачи о нахождении непрерывных решений однородной части системы (1) с импульсным воздействием $\Delta z(\tau_i) = \mathcal{S}_i z(\tau_i - 0)$. В зависимости от вырожденности или невырожденности матриц $I_n + \mathcal{S}_i$, $i = 1,2,\ldots,p$, нормальная фундаментальная матрица $X(t)$ определяет решение $z(t,c) = X(t)c$, $c \in \mathbb{R}^n$, однородной части системы (1) с вырожденным или невырожденным [12, 13] импульсным воздействием $\Delta z(\tau_i) = \mathcal{S}_i z(\tau_i - 0)$, при этом, в отличие от задач с невырожденным импульсным воздействием [1, 2], ранг найденной нормальной фундаментальной матрицы $X(t)$ становится меньше n на одном из промежутков $[\tau_1;\tau_2[,\ldots,[\tau_p;b] \subset [a;b]$. При условии (4) частное решение неоднородной дифференциально-алгебраической задачи (1), (2) ищем в виде

$$K[A^+(s)f(s);\mathcal{S}_i](t) = \begin{cases} K[A^+(s)f(s)](t), & t \in [a;\tau_1[, \\ X_0(t)\gamma_1 + K[A^+(s)f(s)](t), & t \in [\tau_1;\tau_2[, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ X_0(t)\gamma_p + K[A^+(s)f(s)](t), & t \in [\tau_p;b], \end{cases} \tag{6}$$

где

$$K[A^+(s)f(s)](t) := X_0(t)\int\limits_a^t X_0^{-1}(s)A^+(s)f(s)\,ds \; —$$

оператор Грина задачи Коши для системы (1), γ_1, γ_2, …, γ_p — неизвестные постоянные, для нахождения которых используем условие (2). В силу невырожденности матриц $X_0(\tau_i)$

имеем $\gamma_i = X_0^{-1}(\tau_i)\mathcal{S}_i K[A^+(s)f(s)](\tau_i) \in \mathbb{R}^n$. Таким образом, при условии (4) общее решение неоднородной задачи (1), (2) имеет вид $z(t,c) = X(t)c + K[A^+(s)f(s);\mathcal{S}_i](t)$, $c \in \mathbb{R}^n$, где

$$K[A^+(s)f(s);\mathcal{S}_i](t) := X_0(t)\int\limits_a^t X_0^{-1}(s)A^+(s)f(s)\,ds, \qquad i = 1,2,\ldots,p, \text{ —}$$

оператор Грина задачи Коши для дифференциально-алгебраической системы (1) с импульсным воздействием (2). В критическом случае ($P_{Q^*} \neq 0$) при условии (4) и

$$P_{Q_d^*}\{\alpha - \ell K[A^+(s)f(s)](\cdot)\} = 0 \tag{7}$$

краевая задача (1)–(3) имеет семейство решений [1]

$$z(t,c_r) = X_r(t)c_r + G[A^+(s)f(s);\mathcal{S}_i;\alpha](t), \qquad c_r \in \mathbb{R}^r,$$

где

$$G[A^+(s)f(s);\alpha](t) := X(t)Q^+\{\alpha - \ell K[A^+(s)f(s)](\cdot)\} + K[A^+(s)f(s)](t).$$

Здесь $Q := \ell X(\cdot)$ — $(m\times n)$-матрица, $\operatorname{rank} Q = n_1$, $r := n - n_1$, $d := m - n_1$, P_{Q^*} — матрица-ортопроектор $P_{Q^*}\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{N}(Q^*)$, $X_r(t) := X(t)P_{Q_r}$, P_{Q_r} — $(n\times r)$-матрица, составленная из r линейно независимых столбцов матрицы-ортопроектора $P_Q\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{N}(Q)$; $(d\times m)$ — мерная матрица $P_{Q_d^*}$ составлена из d линейно независимых строк матрицы-ортопроектора P_{Q^*}, Q^+ — псевдообратная матрица по Муру–Пенроузу [1], I_n — единичная $(n\times n)$-матрица. Таким образом, доказано следующее достаточное условие разрешимости [14, 15] вырожденной дифференциально-алгебраической задачи с импульсным воздействием (1)–(3).

Лемма. *При условии* (4) *для непрерывной матрицы* $A^+(t)$ *однородная часть вырожденной дифференциально-алгебраической системы с импульсным воздействием* (1), (2) *имеет решение* $z(t) \in C^1\{[a;b]\setminus\{\tau_i\}_I\}$ *вида* $z(t,c) = X(t)c$, $c \in \mathbb{R}^n$, *где* $X(t)$ *— нормальная фундаментальная матрица*

$$X(t) = \begin{cases} X_0(t), & t \in [a;\tau_1[,\\ X_0(t)X_0^{-1}(\tau_1)(I_n + \mathcal{S}_1)X_0(\tau_1), & t \in [\tau_1;\tau_2[,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\\ X_0(t)X_0^{-1}(\tau_p)(I_n + \mathcal{S}_p)X_0(\tau_p), & t \in [\tau_p;b]. \end{cases}$$

При условии (4) *задача Коши* $z(a) = c$ *для неоднородной дифференциально-алгебраической системы с импульсным воздействием* (1), (2) *при любом* $c \in \mathbb{R}^n$ *имеет решение вида* $z(t,c) = X(t)c + K[A^+(s)f(s)](t)$, $c \in \mathbb{R}^n$, *где*

$$K[A^+(s)f(s);\mathcal{S}_i](t) =$$

$$= \begin{cases} K[A^+(s)f(s)](t), & t \in [a;\tau_1[,\\ X_0(t)X_0^{-1}(\tau_1)\mathcal{S}_1 K[A^+(s)f(s)](\tau_1) + K[A^+(s)f(s)](t), & t \in [\tau_1;\tau_2[,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\\ X_0(t)X_0^{-1}(\tau_p)\mathcal{S}_p K[A^+(s)f(s)](\tau_p) + K[A^+(s)f(s)](t), & t \in [\tau_p;b] \end{cases} \text{ —}$$

обобщенный оператор Грина задачи Коши $z(a) = 0$ *для дифференциально-алгебраической системы с импульсным воздействием* (1), (2). *В критическом случае* ($P_{Q^*} \neq 0$) *при условиях* (4) *и* (7) *для любого вектора* $f(t) \in \mathbb{C}[a, b]$ *краевая задача* (1)–(3) *имеет семейство решений*

$$z(t, c_r) = X_r(t)c_r + G[A^+(s)f(s); \mathcal{S}_i; \alpha](t), \qquad c_r \in \mathbb{R}^r,$$

где

$$G[A^+(s)f(s); \mathcal{S}_i; \alpha](t) := X(t)Q^+\{\alpha - \ell K[A^+(s)f(s); \mathcal{S}_i](\cdot)\} + K[A^+(s)f(s); \mathcal{S}_i](t) \ -$$

обобщенный оператор Грина краевой задачи (1)–(3).

Заметим, что условие (4) может выполняться как для недоопределенных, так и для переопределенных систем вида (1). В частности, условие (4) выполняется для недоопределенной дифференциально-алгебраической системы (1) с матрицей $A(t)$ полного ранга. Для недоопределенной дифференциально-алгебраической системы (1) без импульсного воздействия с матрицей $A(t)$ полного ранга утверждение доказанной леммы эквивалентно теоремам 3.1.1 и 3.2.1, доказанным в [8].

3. Достаточные условия в случае неразрешимости дифференциально-алгебраической системы относительно производной. Предположим, что псевдообратная матрица $B^+(t)$ непрерывна, а условие $P_{A^*(t)}B(t) = 0$ не выполнено; при этом однородная часть системы (1) не разрешима относительно производной. В случае

$$P_{A^*(t)}B(t) \neq 0, \qquad P_{B^*(t)}A(t) = 0, \qquad P_{B^*(t)}f(t) = 0 \tag{8}$$

однородная часть системы (1) по меньшей мере одним способом разрешима относительно неизвестной $z = B^+(t)A(t)z'$. Предположим, что матрица $B^+(t)A(t)$ постоянного ранга $\operatorname{rank} B^+(t)A(t) = \delta$, $n - \delta := \omega$ и не имеет среди собственных чисел нулей геометрической кратности, отличной от алгебраической; при этом неособенным ($\det S(t) \neq 0$) преобразованием подобия $B^+(t)A(t) = S(t)J(t)S^{-1}(t)$ она приводится к жордановой форме

$$J(t) = \begin{pmatrix} J_\delta(t) & O \\ O & O_\omega \end{pmatrix}, \qquad J_\delta(t) \in \mathbb{R}^{\delta\times\delta}, \qquad \det J_\delta(t) \neq 0, \qquad O_\omega \in \mathbb{R}^{\omega\times\omega}.$$

При условии (8) однородная часть системы (1)

$$J(t)y' = (I_n - J(t)S^{-1}(t)S'(t))y, \qquad y(t) := S^{-1}(t)z(t) := \operatorname{col}(u(t), v(t)), \qquad u(t) \in \mathbb{R}^\delta$$

приводится к виду

$$\begin{pmatrix} J_\delta(t) & O \\ O & O_\omega \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = (I_n - J(t)S^{-1}(t)S'(t))\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \qquad v(t) \in \mathbb{R}^\omega. \tag{9}$$

Отметим, что уравнение (9), вообще говоря, не разрешимо относительно производных. Действительно, условие разрешимости уравнения (9) при произвольных функциях $u(t)$ и $v(t)$ не выполнено: $P_{J^*(t)}(I_n - J(t)S^{-1}(t)S'(t)) = P_{J^*(t)} \neq 0$; здесь ортопроектор $P_{J^*(t)}\colon \mathbb{R}^n \to \to \mathbb{N}(J^*(t))$ и матрица

$$S^{-1}(t)S'(t) = \begin{pmatrix} \mathfrak{S}_{\delta\delta}(t) & \mathfrak{S}_{\delta\omega}(t) \\ \mathfrak{S}_{\omega\delta}(t) & \mathfrak{S}_{\omega\omega}(t) \end{pmatrix}, \qquad \mathfrak{S}_{\delta\delta}(t) \in \mathbb{R}^{\delta\times\delta}, \qquad \mathfrak{S}_{\omega\omega}(t) \in \mathbb{R}^{\omega\times\omega}.$$

С другой стороны, уравнение (9) разрешимо при условии $v(t) \equiv 0$. Для нахождения первой из компонент $u(t) \in \mathbb{R}^{\delta}$ вектора $y(t)$ используем систему обыкновенных дифференциальных уравнений $u' = (J_{\delta}^{-1}(t) - \mathfrak{S}_{\delta\delta}(t))u$. Предположим, что матрица $J_{\delta}^{-1}(t) - \mathfrak{S}_{\delta\delta}(t)$ непрерывна; обозначим $Y_{\delta}(t)$ нормальную фундаментальную матрицу: $Y_{\delta}'(t) = (J_{\delta}^{-1}(t) - \mathfrak{S}_{\delta\delta}(t))Y_{\delta}(t)$, $Y_{\delta}(a) = I_{\delta}$. Однородная часть системы (1) имеет решение

$$y(t, c_{\delta}) = Y(t)c_{\delta}, \qquad c_{\delta} \in \mathbb{R}^{\delta}, \qquad Y(t) := \begin{pmatrix} Y_{\delta}(t) \\ O \end{pmatrix}.$$

Таким образом, при условии (8) однородная часть системы (1) в случае непрерывности матрицы $J_{\delta}^{-1}(t) - \mathfrak{S}_{\delta\delta}(t)$ имеет решение вида

$$z(t, c_{\delta}) = X_0(t)c_{\delta}, \qquad X_0(t) = S(t)Y(t) \in \mathbb{R}^{n\times\delta}, \qquad c_{\delta} \in \mathbb{R}^{\delta},$$

при этом задача Коши $z(a) = c$ для однородной части вырожденной дифференциально-алгебраической системы (1) разрешима для любого вектора

$$c \in \mathbb{R}(X_0(t)), \qquad \mathbb{R}^n = \mathbb{R}(X_0(t)) \oplus \mathbb{N}(X_0^*(t)), \qquad \mathbb{R}^{\delta} = \mathbb{N}(X_0(t)) \oplus \mathbb{R}(X_0^*(t)).$$

При условии (8) фундаментальную матрицу нетривиальных решений задачи с импульсным воздействием

$$A(t)z' = B(t)z, \qquad t \neq \tau_i, \qquad \Delta z(\tau_i) = \mathcal{S}_i z(\tau_i - 0)$$

ищем в виде (5), где $W_1, \ldots, W_p$ — неизвестные постоянные $(\delta \times \delta)$-матрицы, $W_0 := I_n$. Для прямоугольных $(n \times \delta)$-матриц $X_0(\tau_i)$ уравнения

$$X_0(\tau_i)W_{i+1} = (I_n + \mathcal{S}_i)X_0(\tau_i)W_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, p-1,$$

разрешимы по меньшей мере одним способом

$$W_{i+1} = X_0^{+}(\tau_i)(I_n + \mathcal{S}_i)X_0(\tau_i)W_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, p-1,$$

тогда и только тогда, когда

$$P_{X_0^*(\tau_i)}(I_n + \mathcal{S}_i)X_0(\tau_i) = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, p-1. \tag{10}$$

Таким образом, при условии (8) и (10) однородная часть системы с импульсным воздействием (1), (2) в случае непрерывности матрицы $J_{\delta}^{-1}(t) - \mathfrak{S}_{\delta\delta}(t)$ имеет решение вида $z(t, c_{\delta}) = X(t)c_{\delta}$, $c_{\delta} \in \mathbb{R}^{\delta}$, при этом задача Коши $z(a) = c$ для однородной части вырожденной дифференциально-алгебраической системы с импульсным воздействием (1), (2) разрешима для любого вектора

$$c \in \mathbb{R}(X_0(t)), \qquad \mathbb{R}^n = \mathbb{R}(X_0(t)) \oplus \mathbb{N}(X_0^*(t)), \qquad \mathbb{R}^{\delta} = \mathbb{N}(X_0(t)) \oplus \mathbb{R}(X_0^*(t)).$$

Существенным отличием однородной части вырожденной дифференциально-алгебраической системы (1) в случае $\omega \neq 0$ является прямоугольность матрицы $X_0(t)$, не позволяющая для решения неоднородной дифференциально-алгебраической системы (1) непосредственно использовать конструкцию традиционного оператора Грина задачи Коши $K[f(s)](t)$.

Кроме того, для однородной части вырожденной дифференциально-алгебраической системы (1) в случае $\omega \neq 0$ в силу прямоугольности матрицы $X_0(t)$ не существенно разделение импульсного воздействия (2) на невырожденное и вырожденное [12, 13], поскольку прямоугольность матрицы $X_0(t)$ не позволяет для решения неоднородной дифференциально-алгебраической системы (1) с импульсным воздействием (2) непосредственно использовать конструкцию традиционного оператора Грина задачи Коши [1, 2]. При условии (8) неоднородная система (1) приводится к виду

$$\begin{aligned} &J(t)y' = (I_n - J(t)S^{-1}(t)S'(t))y + S^{-1}(t)B^{+}(t)f(t), \\ &S^{-1}(t)B^{+}(t)f(t) = \mathrm{col}(\varphi(t), \psi(t)), \end{aligned} \tag{11}$$

где

$$\varphi(t) = (I_\delta O)S^{-1}(t)B^{+}(t)f(t) \in \mathbb{R}^{\delta}, \qquad \psi(t) = (OI_{n-\delta})S^{-1}(t)B^{+}(t)f(t) \in \mathbb{R}^{\omega}.$$

Система (11) расщепляется на обыкновенное дифференциальное и функциональное уравнения

$$u' = (J_\delta^{-1}(t) - \mathfrak{S}_{\delta\delta}(t))u + J_\delta^{-1}(t)\varphi(t) + \psi(t), \qquad v + \psi(t) = 0.$$

При условии $\varphi(t) \in C[a, b]$, $\mathfrak{S}_{\delta\omega}(t)\psi(t) \in C^1[a, b]$ система (11) имеет решение вида

$$y(t, c) = Y(t)c_\delta + K[\varphi(s), \psi(s)](t), \qquad c_\delta \in \mathbb{R}^{\delta},$$

где

$$K[\varphi(s), \psi(s)](t) = \begin{pmatrix} Y_\delta(t) \displaystyle\int_a^t Y_\delta^{-1}(s)(J_\delta^{-1}(s)\varphi(s) + \mathfrak{S}_{\delta\omega}(s)\psi(s))\, ds \\ -\psi(t) \end{pmatrix}.$$

Таким образом, при условии (8) для непрерывной матрицы $(J_\delta^{-1}(t) - \mathfrak{S}_{\delta\delta}(t))$ система (1) имеет решение вида $z(t, c_\delta) = X_0(t)c_\delta + \mathcal{K}[f(s)](t)$, $c_\delta \in \mathbb{R}^{\delta}$, где

$$\mathcal{K}[f(s)](t) = S(t)K[\varphi(s), \psi(s)](t) \; -$$

обобщенный оператор Грина задачи Коши для системы (1) в случае неразрешимости дифференциально-алгебраической системы (1) относительно производной. При условии (8) и (10) в случае непрерывности матрицы $J_\delta^{-1}(t) - \mathfrak{S}_{\delta\delta}(t)$ частное решение неоднородной дифференциально-алгебраической задачи с импульсным воздействием (1), (2) ищем в виде

$$\mathcal{K}[f(s); \mathcal{S}_i](t) = \begin{cases} \mathcal{K}[f(s)](t), & t \in [a; \tau_1[, \\ X_0(t)\gamma_1 + \mathcal{K}[f(s)](t), & t \in [\tau_1; \tau_2[, \\ \dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ X_0(t)\gamma_p + \mathcal{K}[f(s)](t), & t \in [\tau_p; b]. \end{cases}$$

При условии (8) и (10) для прямоугольных $(n \times \delta)$-матриц $X_0(\tau_i)$ уравнения

$$X_0(\tau_i)\gamma_i = \mathcal{S}_i\mathcal{K}[f(s)](\tau_i) + a_i, \qquad i = 2, 3, \ldots, p,$$

разрешимы по меньшей мере одним способом

$$\gamma_i = X_0^+(\tau_i)\{\mathcal{S}_i\mathcal{K}[f(s)](\tau_i) + a_i\}, \qquad i = 2, 3, \ldots, p,$$

тогда и только тогда, когда

$$P_{X_0^*(\tau_i)}\{\mathcal{S}_i\mathcal{K}[f(s)](\tau_i) + a_i\}. \tag{12}$$

Таким образом, для непрерывной матрицы $J_\delta^{-1}(t) - \mathfrak{S}_{\delta\delta}(t)$ при условии (8), (10) и (12) неоднородная дифференциально-алгебраическая задача с импульсным воздействием (1), (2) имеет решение вида

$$z(t, c_\delta) = X(t)c_\delta + \mathcal{K}[f(s); \mathcal{S}_i](t), \qquad c_\delta \in \mathbb{R}^\delta,$$

где $\mathcal{K}[f(s); \mathcal{S}_i](t)$ — обобщенный оператор Грина задачи Коши дифференциально-алгебраической системы с импульсным воздействием (1), (2). В критическом случае ($P_{Q^*} \neq 0$) при условии (8), (10) и (12) для непрерывной матрицы $J_\delta^{-1}(t) - \mathfrak{S}_{\delta\delta}(t)$ и

$$P_{Q_d^*}\{\alpha - \ell\mathcal{K}[f(s); \mathcal{S}_i](\cdot)\} = 0 \tag{13}$$

краевая задача (1), (3) имеет семейство решений

$$z(t, c_r) = X_r(t)c_r + G[f(s); \mathcal{S}_i; \alpha](t), \qquad c_r \in \mathbb{R}^r,$$

где

$$\mathcal{G}[f(s); \mathcal{S}_i; \alpha](t) := X(t)Q^+\{\alpha - \ell\mathcal{K}[f(s); \mathcal{S}_i](\cdot)\} + \mathcal{K}[f(s); \mathcal{S}_i](t).$$

Таким образом, доказано следующее достаточное условие разрешимости [14, 15] вырожденной дифференциально-алгебраической задачи с импульсным воздействием (1)–(3).

Теорема. *При условии непрерывности матрицы $B^+(t)$ и условиях* (8), (10) *однородная часть вырожденной дифференциально-алгебраической системы с импульсным воздействием* (1), (2) *имеет решение $z(t) \in \mathbb{C}[a; b]$ вида*

$$z(t, c_\delta) = X_0(t)c_\delta, \qquad X_0(t) = S(t)Y(t) \in \mathbb{R}^{n\times\delta}, \qquad c_\delta \in \mathbb{R}^\delta,$$

где $X_0(t)$ — фундаментальная матрица. При условии

$$c \in \mathbb{R}(X_0(t)), \qquad \mathbb{R}^n = \mathbb{R}(X_0(t)) \oplus \mathbb{N}(X_0(t)), \qquad \mathbb{R}(X_0(t)) = (I_n - P_{X_0(t)})\mathbb{R}^n,$$

в случае (8), (10) *и* (12) *для непрерывной матрицы $J_\delta^{-1}(t) - \mathfrak{S}_{\delta\delta}(t)$ неоднородная дифференциально-алгебраическая задача с импульсным воздействием* (1), (2) *имеет решение вида*

$$z(t, c) = X(t)c_\delta + \mathcal{K}[f(s); \mathcal{S}_i](t) \in \mathbb{C}^1\{[a; b] \setminus \{\tau_i\}_I\}, \qquad c_\delta \in \mathbb{R}^\delta,$$

где $\mathcal{K}[f(s); \mathcal{S}_i](t)$ — обобщенный оператор Грина задачи Коши для дифференциально-алгебраической системы с импульсным воздействием (1), (2). *В критическом случае* ($P_{Q^*} \neq 0$) *при условии* (13) *для любого вектора $f(t) \in \mathbb{C}[a, b]$ краевая задача* (1)–(3) *имеет семейство решений*

$$z(t, c_r) = X_r(t)c_r + G[A^+(s)f(s); \mathcal{S}_i; \alpha](t), \qquad c_r \in \mathbb{R}^r,$$

где

$$\mathcal{G}[f(s);\mathcal{S}_i;\alpha](t) := X(t)Q^+\{\alpha - \ell\mathcal{K}[f(s);\mathcal{S}_i](\cdot)\} + \mathcal{K}[f(s);\mathcal{S}_i](t) \ -$$

обобщенный оператор Грина краевой задачи (1)–(3).

Пример. Требованиям доказанной теоремы удовлетворяет задача о построении решений задачи Коши для системы с импульсным воздействием

$$A(t)z' = B(t)z + f(t), \qquad t \neq \tau_1, \qquad \Delta z(\tau_1) = \mathcal{S}_1 z(\tau_1 - 0) + a_1, \qquad z(0) = \alpha, \tag{14}$$

где

$$A(t) := \begin{pmatrix} \sin 2t - 1 & \cos 2t \\ -\cos 2t & \sin 2t + 1 \end{pmatrix}, \qquad B(t) := \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},$$

$$f(t) := 4\sqrt{2}\begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}, \quad \tau_1 = \pi, \quad \mathcal{S}_1 := -2I_2, \quad a_1 = \begin{pmatrix} -4\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha = \begin{pmatrix} \sqrt{2} - 1 \\ \sqrt{2} + 1 \end{pmatrix}.$$

Действительно, матрица $B(t)$ невырождена, следовательно, $P_{B^*(t)} = 0$, при этом условие (8) выполнено. Матрица

$$J_\delta^{-1}(t) - \mathfrak{S}_{\delta\delta}(t) = -\frac{2\cos t}{\cos t - \sin t}$$

определяет решение $z(t, c_\delta) = X_0(t)c_\delta$ однородной части вырожденной дифференциально-алгебраической системы (14); здесь

$$X_0(t) = \begin{pmatrix} e^{-t}(\sin t - \cos t) \\ e^{-t}(\sin t + \cos t) \end{pmatrix}, \qquad c_\delta \in \mathbb{R}^2.$$

Поскольку условие (10) выполнено, то обобщенный оператор Грина задачи Коши для системы (14) имеет вид

$$\mathcal{K}[f(s)](t) = \frac{\sqrt{2}}{5}\begin{pmatrix} \cos t + 2\cos 3t - 8\sin t - \sin 3t + 2e^{-t}(\cos t - \sin t) \\ 8\cos t - \cos 3t + \sin t - 2\sin 3t - 2e^{-t}(\sin t + \cos t) \end{pmatrix}.$$

Поскольку условие (12) выполнено, то обобщенный оператор Грина задачи Коши для дифференциально-алгебраической системы с импульсным воздействием (14) имеет вид

$$\mathcal{K}[f(s);\mathcal{S}_1](t) = \begin{cases} \mathcal{K}[f(s)](t), & t \in [0; 2\pi[, \\ X_0(t)\gamma_1 + \mathcal{K}[f(s)](t), & t \in [\pi; 2\pi], \end{cases} \qquad \gamma_1 = -\frac{2\sqrt{2}}{5}(7e^\pi - 2).$$

Задача Коши для дифференциально-алгебраической системы с импульсным воздействием (14) представляет критический случай: $P_{Q^*} \neq 0$, при этом условие (13) ее разрешимости выполнено, таким образом, согласно доказанной теореме, решение неоднородной задачи Коши для дифференциально-алгебраической системы с импульсным воздействием (14) единственно $P_Q = 0$ и имеет вид

$$z(t, c) = X(t)c_\delta + \mathcal{K}[f(s);\mathcal{S}_i](t), \qquad c_\delta = 1.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Государственного фонда фундаментальных исследований № 0109U000381.

Цитированная литература

1. *Boichuk A. A., Samoilenko A. M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems. – Utrecht; Boston: VSP, 2004. – XIV + 317 p.
2. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – Киев: Вища шк., 1987. – 287 с.
3. *Чуйко С. М.* Оператор Грина краевой задачи с импульсным воздействием // Дифференц. уравнения. – 2001. – **37**, № 8. – С. 1132–1135.
4. *Чуйко С. М.* Оператор Грина краевой задачи с импульсным воздействием // Докл. РАН. – 2001. – **379**, № 2. – С. 170–172.
5. *Бойчук А. А., Чуйко С. М.* Обобщенный оператор Грина импульсной краевой задачи с переключениями // Нелінійні коливання. – 2007. – **10**, № 1. – С. 51–65.
6. *Бояринцев Ю. Е., Чистяков В. Ф.* Алгебро-дифференциальные системы. Методы решения и исследования. – Новосибирск: Наука, 1998. – 224 с.
7. *Бойчук А. А., Шегда Л. М.* Вироджені нетерові крайові задачі // Нелінійні коливання. – 2007. – **10**, № 3. – С. 303–312.
8. *Campbell S. L.* Singular systems of differential equations. – San Francisco: Pitman, 1980. – 178 p.
9. *Чистяков В. Ф.* Алгебро-дифференциальные операторы с конечномерным ядром. – Новосибирск: Наука, 1996. – 280 с.
10. *Чистяков В. Ф., Щеглова А. А.* Избранные главы теории алгебро-дифференциальных систем. – Новосибирск: Наука, 2003. – 317 с.
11. *Самойленко А. М., Шкіль М. І., Яковець В. П.* Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженням. – Київ: Вища шк., 2000. – 296 с.
12. *Бойчук А. А., Чуйко Е. В., Чуйко С. М.* Обобщенный оператор Грина краевой задачи с вырожденным импульсным воздействием // Укр. мат. журн. – 1996. – **48**, № 5. – С. 588–594.
13. *Чуйко С. М., Чуйко Е. В.* Обобщенный оператор Грина задачи Коши с импульсным воздействием // Докл. НАН Украины. – 1999. – № 6. – С. 43–47.
14. *Chuiko S. M.* A generalized matrix differential-algebraic equation // J. Math. Sci. – 2015. – **210**, No 1. – P. 9–21.
15. *Chuiko S. M.* The Green's operator of a generalized matrix linear differential-algebraic boundary value problem // Siberian Math. J. – 2015. – **56**, No 4. – P. 752–760.

References

1. *Boichuk A. A., Samoilenko A. M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems, Utrecht: VSP, 2004.
2. *Samoilenko A. M., Perestyuk N. A.* Impulsive Differential Equations, Kiev: Vyshcha Shkola, 1987 (in Russian).
3. *Chuiko S. M.* Different. Equations, 2001, **37**: 1189–1193.
4. *Chuiko S. M.* Dokl. AN, 2001, **379**, No 2: 170–172 (in Russian).
5. *Boichuk A. A., Chuiko S. M.* Nonlinear Oscillations, 2007, **10**, Iss. 1: 46–61.
6. *Boyarintsev J. E., Chistyakov V. F.* Differential-algebraic system. Methods of solutions and research, Novosibirsk: Nauka, 1998 (in Russian).
7. *Boichuk A. A., Shegda L. M.* Nonlinear Oscillations, 2007, **10**, Iss. 3: 306–314.
8. *Campbell S. L.* Singular Systems of differential equations, San Francisco: Pitman, 1980.
9. *Chistyakov V. F.* Algebraic-differential operators with finite-dimensional kernel, Novosibirsk: Nauka, 1996 (in Russian).
10. *Chistyakov V. F., Shcheglova A. A.* Selected chapters of the theory of algebraic-differential systems, Novosibirsk: Nauka, 2003 (in Russian).
11. *Samoilenko A. M., Shkil' M. I., Yakovets' V. P.* Linear Systems of Degenerate Differential Equations, Kiev: Vyshcha Shkola, 2000 (in Ukrainian).
12. *Boichuk A. A., Chuiko E. V., Chuiko S. M.* Ukr. Math. J., 1996, **48**: 652–660.
13. *Chuiko S. M., Chuiko E. V.* Dop. NAN Ukraine, 1999, No 6: 43–47 (in Russian).

14. *Chuiko S. M.* J. Math. Sci., 2015, **210**, No 1: 9–21.
15. *Chuiko S. M.* Siberian Math. J., 2015, **56**, No 4: 752–760.

Поступило в редакцию 30.06.2015

С. М. Чуйко, О. В. Чуйко

Донбаський державний педагогічний університет, Слов'янськ

E-mail: chujko-slav@inbox.ru

Лінійні нетерові крайові задачі для вироджених диференціально-алгебраїчних систем з імпульсним впливом

Знайдено достатні умови розв'язності, а також конструкцію узагальненого оператора Гріна лінійної нетерової крайової задачі для виродженої диференціально-алгебраїчної системи з імпульсним впливом.

Ключові слова: диференціально-алгебраїчна система, нетерова крайова задача, узагальнений оператор Гріна, вироджений імпульсний вплив.

S. M. Chuiko, E. V. Chuiko

Donbass State Pedagogical University, Slovyansk

E-mail: chujko-slav@inbox.ru

Linear Noether boundary-value problems for degenerate differential-algebraic systems with pulse influence

We find sufficient conditions for the solvability and the construction of generalized Green's operator for the linear Noether boundary-value problem for a degenerate linear differential-algebraic system with pulse influence.

Keywords: differential-algebraic system, Noether boundary-value problem, generalized Green's operator, degenerate pulse influence.