

М. В. Стефанчук

Інститут математики НАН України, Київ

E-mail: stefanmv43@gmail.com

Екстремальні елементи в гіперкомплексному просторі

(Представлено членом-кореспондентом НАН України Ю. Ю. Трохимчуком)

Досліджуються екстремальні елементи та h -оболонка множин у n -вимірному гіперкомплексному просторі \mathbb{H}^n . Вводиться клас \mathbb{H} -квазіопуклих множин, які включають у себе сильно гіперкомплексно опуклі множини та є замкненими відносно перетинів.

Ключові слова: гіперкомплексно опукла множина, сильно гіперкомплексно опукла множина, h -оболонка множини, h -екстремальна точка, h -екстремальний промінь, \mathbb{H} -квазіопукла множина.

У роботі досліджуватимемо екстремальні елементи та h -оболонку множини в гіперкомплексному просторі, а також побудуємо клас гіперкомплексно опуклих множин, які включають у себе сильно гіперкомплексно опуклі множини та є замкненими відносно перетинів. Такі множини називатимемо \mathbb{H} -квазіопуклими. Дані множини є аналогами \mathbb{C} -квазіопуклих множин у комплексному просторі \mathbb{C}^n [1].

Будемо розглядати n -вимірний гіперкомплексний простір \mathbb{H}^n , $n \in \mathbb{N}$, який є прямим добутком n -копій тіла кватерніонів \mathbb{H} [2]. Нехай $E \subset \mathbb{H}^n$ — довільна множина, яка містить початок координат $O = \{0, 0, \dots, 0\}$. Покладемо $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $h = (h_1, h_2, \dots, h_n)$, $\langle x, h \rangle = x_1 h_1 + x_2 h_2 + \dots + x_n h_n$. Множина $E^* = \{h \mid \langle h, x \rangle \neq 1 \forall x \in E\}$ називається *спряженою* множиною до множини E [3].

Означення 1. Множина $E \subset \mathbb{H}^n$ називається *гіперкомплексно опуклою*, якщо для довільної точки $x_0 \in \mathbb{H}^n \setminus E$ існує гіперплощина, яка проходить через точку x_0 і не перетинає E [3, 4].

Нагадаємо, що оскільки в алгебрі кватерніонів множення некомутативне [2], то надалі розглядатимемо праві гіперплощини, тобто точку зі змінною координатою множимо на фіксовану точку справа.

Означення 2. Множина $E \subset \mathbb{H}^n$ називається *сильно гіперкомплексно опуклою*, якщо довільний її перетин гіперкомплексною прямою γ ациклічний, тобто $\tilde{H}^i(\gamma \cap E) = 0$, $\forall i$, де $\tilde{H}^i(\gamma \cap E)$ — зведена група когомологій Александра–Чеха множини $\gamma \cap E$ з коефіцієнтами в групі цілих чисел [3].

У [5] доведено, що сильно гіперкомплексно опуклі компакти будуть гіперкомплексно опуклими.

Нехай $E \subset \mathbb{H}^n$ — довільна множина. Доповнення до об'єднання необмежених компонент множини $\mathbb{H}^n \setminus E$ називається *h -комбінацією точок множини E* та позначається $[E]$. Якщо E — довільна множина в просторі \mathbb{H}^n , $n > 1$, то скажемо, що точка x належить h -комбінації точок з E , якщо існує перетин множини E гіперкомплексною прямою γ такий, що $x \in [E \cap \gamma]$. Множину таких точок з \mathbb{H}^n називають *h -комбінацією точок E* і позначають $[E]$; m -кратну h -комбінацію визначають за індукцією $[E]^m = [[E]^{m-1}]$ [6].

Означення 3. h -оболонкою множини $E \subset \mathbb{H}^n$ називається множина $\widehat{E} = \bigcap_{\pi} \pi^{-1}[\pi(E)]$, де $\pi: \mathbb{H}^n \rightarrow \lambda$ — усі можливі лінійні проєкції множини на гіперкомплексні прямі, $[\pi(E)]$ — h -комбінація точок множини $\pi(E)$, а $\pi^{-1}[\pi(E)] = \{x \in \mathbb{H}^n | \pi(x) \in \pi(E)\}$ — її повний прообраз [3, 6].

Нижчесформульована теорема стверджує, що для довільної множини множина точок її h -оболонки збігається з h -комбінацією точок цієї множини.

Теорема 1. Якщо множина E є h -оболонкою, то $E = [E]$.

Доведення. Нехай $x \in [\lambda \cap E]$ для деякої гіперкомплексної прямої λ . Тоді очевидно буде виконуватися включення $\pi(x) \in [\pi(\lambda \cap E)]$ для всіх проєкцій π , тому що обмеження будь-якої проєкції π на кожену пряму є або гомеоморфізмом, або проєкцією в точку.

Дослідимо більш детально процедуру утворення h -оболонки множини E . За властивістю 19 гіперкомплексно опуклих множин [3] множина $[\pi(E)]$ гомеоморфна доповненню в $\mathbb{H}^o = \lambda^o$ (\mathbb{H}^o — одноточкова компактифікація прямої) до зв'язної компоненти, що містить початок координат, деякого перерізу $\lambda \cap E^*$, де λ — гіперкомплексна пряма, а E^* — множина, спряжена до множини E . Позначимо цю компоненту $]\lambda \cap E^*[$. Крім цього, дану компоненту можна зобразити ще й так: $(\pi^{-1}[\pi(E)])^*$. Взагалі кажучи, об'єднання $\bigcup_{\lambda}]\lambda \cap E^*[$ може не бути гіперкомплексно опуклою множиною. Однак за властивостями 9 та 15 гіперкомплексно опуклих множин [3] справедливі такі рівності:

$$\left(\bigcup_{\pi} (\pi^{-1}[\pi(E)])^* \right)^* = \bigcap_{\pi} (\pi^{-1}[\pi(E)])^{**} = \bigcap_{\pi} \pi^{-1}[\pi(E)] = \widehat{E}.$$

Звідси випливає нижчеподана теорема, яка дає ще один спосіб побудови h -оболонки.

Теорема 2. Для довільної множини $E \subset \mathbb{H}^n$ її h -оболонку можна зобразити у вигляді $\widehat{E} = \left(\bigcup_{\lambda}]\lambda \cap E^*[\right)^*$.

Доведення випливає з виконання рівності

$$\widehat{E} = \left(\bigcup_{\pi} (\pi^{-1}[\pi(E)])^* \right)^* = \left(\bigcup_{\lambda}]\lambda \cap E^*[\right)^*.$$

Варто відзначити, що спряжена множина до h -оболонки не завжди буде h -оболонкою. Розглянемо такий приклад.

Приклад 1. Нехай K — компакт, який лежить у тривимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^3 = \{(y_1, z_1, y_2) | x_1 = y_1 + iz_1 + ju_1 + kt_1, x_2 = y_2 + iz_2 + ju_2 + kt_2, (x_1, x_2) \in \mathbb{H}^2\}$, $K = \{(y_1, z_1, y_2) | (y_1 - |z_1| = 0, 0 \leq y_1 \leq 1) \wedge [(y_2 = y_1) \vee (y_2 = -2y_1 + 3), z_1 \leq 0] \vee [(y_2 = 2y_1) \vee (y_2 = -y_1 + 3), z_1 > 0]\}$.

Тоді при канонічній проєкції $\pi_1(K)$ на пряму $x_2 = 0$ отримаємо адиклічний компакт $K_1 = \{(y_1, z_1, 0, 0) | y_1 - |z_1| = 0, 0 \leq y_1 \leq 1\}$, а при проєкції $\pi_2(K)$ на пряму x_2 , паралельно прямій, яка проходить через точки $(1 - i, 1)$, $(1 + i, 2)$, отримаємо компакт $\pi_1(K) = K_2$, який складається з двох відрізків, оскільки відрізки $[y_1 = -z_1, 0 \leq y_1 \leq 1, y_2 = y_1] \cap \mathbb{R}^3$ і $[y_1 = z_1, 0 \leq y_1 \leq 1, y_2 = 2y_1] \cap \mathbb{R}^3$, $[y_1 = -z_1, 0 \leq y_1 \leq 1, y_2 = -2y_1 + 3] \cap \mathbb{R}^3$ і $[y_1 = z_1, 0 \leq y_1 \leq 1, y_2 = -y_1 + 3] \cap \mathbb{R}^3$ попарно ототожнюються при цій проєкції. Тому $[K_1] = K_1$ і $[K_2] = K_2$. Легко бачити, що $K = \pi_1^{-1}(K_1) \cap \pi_2^{-1}(K_2)$. При всіх інших проєкціях образ $\pi(K)$ буде ненульовим одновимірним циклом. Тому $\pi(K) \neq [\pi(K)]$ при $\pi \neq \pi_1$ або $\pi \neq \pi_2$.

Але $\widehat{K} = \bigcap_{\pi} \pi^{-1}[\pi(E)] \subset \pi_1^{-1}(K_1) \cap \pi_2^{-1}(K_2) = K$. Отже, $\widehat{K} = K$. Однак, взагалі кажучи, $\pi(\widehat{K}) \neq [\pi(K)]$.

За теоремою 2 $\widehat{K} = (\bigcup_{\gamma} \gamma \cap K^*)^* = (K_3)^*$, де $K_3 = \{(y_1, z_1, y_2) | y_1 - |z_1| = 0, 0 \leq y_1 \leq 1, (y_2 = y_1) \vee (y_2 = -2y_1 + 3)\}$ — частина компакта K , що складається з двох відрізків.

Означення 4. h -інтервалом з центром у точці x радіуса r називається перетин відкритої кулі радіуса r з центром у точці x з гіперкомплексною прямою, яка проходить через точку x [3].

Означення 5. Точка $x \in E \subset \mathbb{H}^n$ називається h -екстремальною точкою множини E , якщо в E немає жодного h -інтервалу, який містить x [3].

З лема 1, яка є аналогом теореми Каратеодорі [7], враховуючи, що жодна h -екстремальна точка не може бути отримана h -комбінацією інших точок компакта K , випливають нижченаведені наслідки.

Лема 1. h -оболонка гіперкомплексно опуклого компакта в \mathbb{H}^n збігається із сукупністю не більше ніж n -кратних комбінацій своїх h -екстремальних точок [6].

Наслідок 1. Якщо $K \subset \mathbb{H}^n$ — компакт і \widehat{K} — його h -оболонка, яка збігається з h -комбінацією $[K]^m$, то кожна h -екстремальна точка множини \widehat{K} належить K .

Наслідок 2. Довільну точку простору \mathbb{H}^n , яка належить h -оболонці $\widehat{K} = [K]^m$, можна зобразити у вигляді не більше ніж n -кратної комбінації точок компакта K .

Наслідок 3. Для того щоб h -оболонка гіперкомплексно опуклого компакта K збігалася з ним, необхідно, щоб всі перерізи його гіперкомплексними прямими γ не містили тривимірних коциклів, тобто $H^3(K \cap \gamma) = 0$.

Наслідок 4. Для того щоб h -оболонка гіперкомплексно опуклого компакта K збігалася з ним, необхідно, щоб усі проєкції його спряженої множини K^* на гіперкомплексні прямі були зв'язними.

Останній наслідок отримуємо з попереднього, використовуючи властивості 19 та 20 гіперкомплексно опуклих множин [3].

Приклад 2. Нехай $S_+^4 \subset \mathbb{R}^5 \subset \mathbb{H}^2$ — півсфера у п'ятивимірному дійсному евклідовому просторі $\mathbb{R}^5 = \{(y_1, z_1, u_1, t_1, y_2) | x_1 = y_1 + iz_1 + ju_1 + kt_1, x_2 = y_2 + iz_2 + ju_2 + kt_2, (x_1, x_2) \in \mathbb{H}^2\}$, $S_+^4 = \{(y_1, z_1, u_1, t_1, y_2) | y_1^2 + z_1^2 + u_1^2 + t_1^2 + y_2^2 = 1, z_1 \geq 0\}$. Легко бачити, що $(S_+^4)^{**} = K_+ = \{(y_1, z_1, u_1, t_1, y_2) | y_1^2 + z_1^2 + u_1^2 + t_1^2 + y_2^2 \leq 1, z_1 \geq 0\}$ і K_+ — опуклий компакт, який збігається зі своєю h -оболонкою. Довільний перетин S_+^4 гіперкомплексною прямою збігається з перетином S_+^4 дійсною прямою або дійсною чотиривимірною площиною виду $y_2 = \text{const}$ в \mathbb{R}^5 . Усі такі перетини не містять тривимірних циклів. Тому $[S_+^4] = S_+^4 \neq K_+$.

Цей приклад показує, що лему 1 та її наслідки не завжди можна застосувати до гіперкомплексно неопуклих компактів.

Поширимо теорему Клі опуклого аналізу [7] на гіперкомплексний випадок.

Означення 6. h -променем назвемо замкнену необмежену ациклічну підмножину гіперкомплексної прямої з непорожньою межею.

Означення 7. Екстремальним h -променем множини $E \subset \mathbb{H}^n$ назвемо h -промінь H , який належить множині E , якщо множина $E \setminus H$ гіперкомплексно опукла та кожна точка межі променя H буде h -екстремальною точкою для множини E . (Це еквівалентно тому, що жодна точка променя H не буде внутрішньою для довільного h -інтервалу, який належить множині E та має хоча б одну точку за межами H .)

Для множини $E \subset \mathbb{H}^n$ позначимо: $\text{hext } E$ — множини її h -екстремальних точок, $\text{rhex } E$ — множини h -екстремальних променів, $\text{hconv } E$ — h -оболонку E .

Лема 2. Нехай $E \subset \mathbb{H}^n$ — замкнене сильно гіперкомплексно опукле тіло (тобто $\text{int } E \neq \emptyset$) з непорожньою сильно гіперкомплексно опуклою межею ∂F , тоді E має вигляд $E = E_1 \times \mathbb{H}^{n-1}$, де E_1 — ациклічна підмножина прямої \mathbb{H} з непорожньою внутрішністю відносно цієї прямої.

Доведення. Оскільки межа ∂F — сильно гіперкомплексно опукла, то для довільної точки $x \in \text{int } E$ існує гіперплощина, яка не перетинає ∂F . Тому множина E містить гіперплощину. Отже, за теоремою 3 [6] множину E можна зобразити у вигляді декартового добутку $E = E_1 \times \mathbb{H}^{n-1}$. Множина E_1 буде ациклічною, тому що існують перетини E гіперкомплексними прямими, які гомеоморфні E_1 .

Означення 8. Афінна підмножина L називається *дотичною* до множини E , якщо $L \cap \bar{E} \subset \partial E$, $L \cap \bar{E} \neq \emptyset$.

Лема 3. Якщо $E \subset \mathbb{H}^n$ — сильно гіперкомплексно опукла замкнена множина та L — її дотична гіперкомплексна пряма, то $\text{hext}(E \cap L) = (\text{hext } E) \cap L$.

Доведення. Оскільки справедливе включення множин $E \cap L \subset E$, то за означенням h -екстремальних точок маємо $\text{hext}(E \cap L) \supset (\text{hext } E) \cap L$. Нехай точка $x \in \text{hext}(E \cap L)$. Тоді не може виконуватися включення $x \in [K] \setminus K$, де $K \subset E$, бо інакше було б $K \subset E \cap L$ (тому що $x \in L$ та $L \in$ гіперкомплексною прямою, дотичною до E). А це суперечить тому, що $x \in \text{hext}(E \cap L)$. Отже, вірне обернене включення $\text{hext}(E \cap L) \subset (\text{hext } E) \cap L$ та лема доведена.

Зауваження 1. Аналогічно доводиться рівність $\text{rhex}(E \cap L) = (\text{rhex } E) \cap L$ для h -екстремальних променів.

Теорема 3. Кожна замкнена сильно гіперкомплексно опукла множина $E \subset \mathbb{H}^n$, яка не містить гіперкомплексної прямої, буде h -оболонкою своїх h -екстремальних точок та h -екстремальних променів $E = \text{hconv}(\text{hext } E \cup \text{rhex } E)$.

Доведення. Доведення проведемо індукцією згідно з гіперкомплексною розмірністю множини E . Для $\dim_{\mathbb{H}} E = 0$ та $\dim_{\mathbb{H}} E = 1$ теорема очевидна. Припустимо, що теорема правильна при всіх гіперкомплексних розмірностях множини E , які менші m ($1 < m \leq n$). Доведемо її для $\dim_{\mathbb{H}} E = m$.

За умовою теореми множина E не містить гіперкомплексної прямої, тому не може збігатися ні з її афінною оболонкою, ні з декартовим добутком $E_1 \times \mathbb{H}^{n-1}$. Тому з леми 2 випливає, що непорожня межа ∂E не буде сильно гіперкомплексно опуклою множиною.

За означенням сильної гіперкомплексної опуклості перетин множини E довільною гіперкомплексною прямою буде також сильно гіперкомплексно опуклим. Нехай x — довільна точка множини E . Якщо x належить якійсь дотичній прямій L до E , то за припущенням індукції маємо включення $x \in \text{hconv}((\text{hext } E \cap L) \cup \text{rhex}(E \cap L))$. Якщо ж існують точки множини E , через які не проходить жодна дотична до E гіперкомплексна пряма, то знайдеться точка $x \in \text{int } E$.

У цьому випадку через точку x проведемо гіперкомплексну пряму l . Перетин $l \cap E$ є сильно гіперкомплексно опуклою множиною та не збігається з l . Тому $x \notin [\partial(l \cap E)]$. Нехай тепер y — довільна точка межі перетину $\partial(l \cap E)$. З урахуванням сильної гіперкомплексної опуклості через точку y можна провести дотичну до множини E пряму T . За припущенням індукції отримаємо включення $y \in \text{hconv}((\text{hext } E \cap T) \cup \text{rhex}(E \cap T))$. Зауважимо, що це виконується для кожної точки $y \in \partial(l \cap E)$. Тоді, враховуючи лему 3 та зауваження 2, отримуємо $x \in \text{hconv}(\text{hext } E \cup \text{rhex } E)$. Внаслідок довільності ви-

бору точки $x \in E \subset \text{hconv}(\text{hext } E \cup \text{rhext } E)$. Обернене включення тривіальне. Теорема доведена.

Клас сильно гіперкомплексно опуклих множин є незамкненим відносно перетинів [5]. Тому для нього не виконується основна аксіома опуклості — перетин будь-якої кількості опуклих множин повинен бути опуклим. Означимо клас множин, який включає в себе сильно гіперкомплексно опуклі множини та є замкненим відносно перетинів.

Означення 9. Гіперкомплексно опуклу множину $E \subset \mathbb{H}^n$ назвемо \mathbb{H} -квазіопуклою множиною, якщо її перетин довільною гіперкомплексною прямою γ не містить тривимірного коциклу, тобто $H^3(\gamma \cap E) = 0$.

Очевидно, що клас \mathbb{H} -квазіопуклих множин включає в себе сильно гіперкомплексно опуклі області та компактні.

Покажемо замкненість класу \mathbb{H} -квазіопуклих множин у тому сенсі, що перетин довільної сім'ї компактних \mathbb{H} -квазіопуклих множин буде \mathbb{H} -квазіопуклою множиною.

Теорема 4. *Перетин довільної сім'ї \mathbb{H} -квазіопуклих компактів буде \mathbb{H} -квазіопуклим компактом.*

Доведення. Доведення достатньо провести для двох компактів. Нехай K_1, K_2 — два довільні \mathbb{H} -квазіопуклі компактні, γ — довільна гіперкомплексна пряма, яка перетинає множину $K_1 \cap K_2$. Використаємо точну когомологічну послідовність Майєра–В'єторіса [8]

$$H^3(\gamma \cap K_1) \oplus H^3(\gamma \cap K_2) \rightarrow H^3(\gamma \cap K_1 \cap K_2) \rightarrow H^4(\gamma \cap (K_1 \cup K_2)).$$

Оскільки компактні K_1 та K_2 \mathbb{H} -квазіопуклі, то $H^3(\gamma \cap K_1) = 0$ та $H^3(\gamma \cap K_2) = 0$. Тому $H^3(\gamma \cap K_1) \oplus H^3(\gamma \cap K_2) = 0$.

З іншого боку, компактний перетин $\gamma \cap (K_1 \cup K_2) = (\gamma \cap K_1) \cup (\gamma \cap K_2)$ не може містити всю гіперкомплексну пряму γ , яка є чотиривимірним дійсним многовидом, тому $H^4(\gamma \cap (K_1 \cup K_2)) = 0$.

З точності когомологічної послідовності випливає, що $H^3(\gamma \cap K_1 \cap K_2) = 0$. Це еквівалентно тому, що перетин множини $K_1 \cap K_2$ довільною гіперкомплексною прямою не містить тривимірного коциклу. Звідси випливає \mathbb{H} -квазіопуклість компакта $K_1 \cap K_2$. Теорема доведена.

Лема 4. *Якщо всі співмножники $E_j, j = 1, \dots, n$, ациклічні, то довільний перетин множини $E = E_1 \times \dots \times E_n \subset \mathbb{H}^n$ не містить тривимірного коциклу.*

Доведення. Доведення проведемо для випадку, коли $E = E_1 \times E_2 \subset \mathbb{H}^2$ та гіперкомплексна пряма γ проходить через початок координат. Цього завжди можна досягти заміною координат. Рівняння прямої має вигляд

$$\gamma = \left\{ x \mid x_1 = k_1 x_2, x_3 = \dots = x_n = 0, k = -\frac{r_1}{r_2}, r_i = |x_i|, i = 1, 2 \right\}.$$

Оскільки в прямій γ координати x_1, x_2 пов'язані між собою співвідношеннями $x_1 = kx_2$, а множини E_2 та $kE_2, k \neq 0$, гомеоморфні між собою, то перетин $\gamma \cap E$ збігається з $E_1 \cap kE_2$.

З точності когомологічної послідовності Майєра–В'єторіса [8]

$$H^3(E_1) \oplus H^3(kE_2) \rightarrow H^3(E_1 \cap kE_2) \rightarrow H^4(E_1 \cup kE_2),$$

оскільки $H^3(E_1) \oplus H^3(kE_2) = 0$ та $H^4(E_1 \cup kE_2) = 0$, отримуємо, що $H^3(E_1 \cap kE_2) = 0$. Лема доведена.

З леми 4 фактично випливає, що декартовий добуток \mathbb{H} -квазіопуклих компактів буде \mathbb{H} -квазіопуклою множиною.

Означення 10. *Лінійним поліедром* називається множина виду $E = \{x \mid f_j(x) \in E_j, j \in J = \{1, 2, \dots, N\}\}$, де $E_j \subset \mathbb{H}^1$, $f_j(x) = \sum_{k=1}^n a_{jk}x_k$, причому довільні дві функції $f_k(x)$, $f_j(x)$, $k \neq j$, є лінійно незалежними, а кожна з функцій f_j відображає E в підмножину гіперкомплексної прямої E_j [3].

Оскільки довільний компактний лінійний поліедр можна зобразити у вигляді перетину не більше ніж n (n — скінченне число і позначає кількість граней поліедра) декартових добутків $\Gamma_i \times K_i$, $i = \overline{1, n}$, множини Γ_i , де Γ_i — грань поліедра, на кулю K_i досить великого радіуса в $(n-1)$ -вимірній гіперкомплексній гіперплощині, яка ортогональна до грані Γ_i , то з теореми 4 отримуємо таке твердження.

Теорема 5. *Компактний лінійний поліедр, усі грані якого не містять тривимірних циклів, є \mathbb{H} -квазіопуклою множиною.*

Наслідок 5. *Перетин сильно гіперкомплексно опуклих компактів буде \mathbb{H} -квазіопуклою множиною.*

Зауваження 2. У роботі [5] доведено, що гіперкомплексно опукла область з гладкою межею буде \mathbb{H} -квазіопуклою множиною.

Теорема 6. *Кожен ациклічний у розмірності три гіперкомплексно опуклий компакт E буде \mathbb{H} -квазіопуклим.*

Доведення. Розглянемо перетин множини E гіперкомплексною прямою γ . Нехай перетин $\gamma \cap E$ містить негомологічний нулю тривимірний цикл Z . Візьмемо точку $x_0 \in \gamma \setminus \gamma \cap E$, зачеплену з циклом Z . Оскільки множина E гіперкомплексно опукла, то існує гіперкомплексна гіперплощина L , яка проходить через точку x_0 і не перетинає E . Тоді $(4n-4)$ -вимірний цикл $K = L \cup \infty$ зачеплений з тривимірним циклом Z . Оскільки множина E однозв'язна, то цикл Z гомологічний нулю в E . Тоді існує ланцюг C в E , який обмежується циклом Z . За теоремою про зачеплення $C \cap K \neq \emptyset$, що суперечить тому, що множина $K \cap E$ порожня. Теорема доведена.

Цитована література

1. *Зелинський Ю. Б.* Выпуклость. Избранные главы. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2012. — 280 с.
2. *Кантор И. Л., Солодовников А. С.* Гиперкомплексные числа. — Москва: Наука, 1973. — 144 с.
3. *Мкртчян Г. А.* О гиперкомплексно выпуклых множествах. — Киев: ИМ АН УССР, 1987. — 17 с. — (Препр. / АН УССР. Ин-т математики; 87.42).
4. *Мкртчян Г. А.* О гиперкомплексной выпуклости // V Тираспол. симп. по общей топологии. — Кишинев: Штиинца, 1985. — С. 177.
5. *Мкртчян Г. А.* О сильной гиперкомплексной выпуклости // Укр. мат. журн. — 1990. — **42**, № 2. — С. 182–187.
6. *Зелинський Ю. Б., Мкртчян Г. А.* Об экстремальных точках и гиперкомплексно выпуклых областях // Докл. АН СССР. — 1990. — **311**, № 6. — С. 1299–1302.
7. *Лейхтвейс К.* Выпуклые множества. — Москва: Наука, 1985. — 336 с.
8. *Спеньер Э.* Алгебраическая топология. — Москва: Мир, 1971. — 680 с.

References

1. *Zelinskii Yu. B.* Convexity. Selected chapters, Kiev: Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine, 2012 (in Russian).
2. *Kantor I. L., Solodovnikov A. S.* Hypercomplex numbers, Moscow: Nauka, 1973 (in Russian).

3. *Mkrtchyan G. A.* On hypercomplex convex sets, Preprint, AS USSR, Institute of Mathematics, 87.42, Kiev, 1987 (in Russian).
4. *Mkrtchyan G. A.* On hypercomplex convexity, V Tiraspol. workshop on general topology, Kishinev: Shtiintsa, 1985 (in Russian).
5. *Mkrtchyan G. A.* Ukr. Mat. J., 1990, **42**, No 2: 182–187 (in Russian).
6. *Zelinskii Yu. B., Mkrtchyan G. A.* Dokl. AN SSSR, 1990, **311**, No 6: 1299–1302 (in Russian).
7. *Leyhtveys K.* Convex sets, Moscow: Nauka, 1985 (in Russian).
8. *Spener E.* Algebraic topology, Moscow: Mir, 1971 (in Russian).

Надійшло до редакції 22.09.2015

М. В. Стефанчук

Институт математики НАН Украины, Киев

E-mail: stefanmv43@gmail.com

Экстремальные элементы в гиперкомплексном пространстве

Исследуются экстремальные элементы и h -оболочка множеств в n -мерном гиперкомплексном пространстве \mathbb{H}^n . Вводится класс \mathbb{H} -квазивыпуклых множеств, которые включают в себя сильно гиперкомплексно выпуклые множества и являются замкнутыми относительно пересечений.

Ключевые слова: гиперкомплексно выпуклое множество, сильно гиперкомплексно выпуклое множество, h -оболочка множества, h -экстремальная точка, h -экстремальный луч, \mathbb{H} -квазивыпуклое множество.

M. V. Stefanchuk

Institute of the Mathematics of the NAS of Ukraine, Kiev

E-mail: stefanmv43@gmail.com

Extremal elements in a hypercomplex space

Extremal elements and a h -hull of sets in the n -dimensional hypercomplex space \mathbb{H}^n are investigated. The class of \mathbb{H} -quasiconvex sets including strongly hypercomplex convex sets and being closed with respect to intersections is introduced.

Keywords: hypercomplex convex set, strongly hypercomplex convex set, h -hull of a set, h -extremal point, h -extremal beam, \mathbb{H} -quasiconvex set.