Доповіді
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

4 • 2016

МАТЕМАТИКА

УДК 514.177.2,514.772.24,517.977.5 http://dx.doi.org/10.15407/dopovidi2016.04.007

К. Д. Драч

Сумской государственный университет
Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина
E-mail: kostya.drach@gmail.com, drach@karazin.ua

О решении обратной задачи Дидоны в классе выпуклых поверхностей вращения

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины А. А. Борисенко)

С помощью принципа максимума Понтрягина доказывается обратное изопериметрическое неравенство, и тем самым решается обратная задача Дидоны, для λ-выпуклых поверхностей вращения в трехмерном евклидовом пространстве.

Ключевые слова: λ-выпуклость, нормальная кривизна, обратное изопериметрическое неравенство, принцип максимума Понтрягина.

Классическая задача Дидоны в n-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ состоит в нахождении замкнутой гиперповерхности, ограничивающей *максимальный объем* при заданной площади. Как известно (см. [1]), решением этой задачи является сфера. Такое *изопериметрическое* свойство сферы может быть выражено в виде *изопериметрического неравенства*, дающего точную верхнюю оценку объема области, ограничиваемой замкнутой поверхностью данной площади.

В то же время *обратная* задача Дидоны, состоящая в нахождении поверхности заданной площади и ограничивающей *минимальный объем*, в общем случае имеет тривиальное решение. Естественным классом, позволяющим получить нетривиальное решение и соответствующее ему обратное изопериметрическое неравенство, является класс поверхностей *ограниченной кривизны*. Так, в [2] была решена обратная задача Дидоны для кривых *в* $\mathbb{R}^2$, кривизна k которых в обобщенном смысле удовлетворяет $|k| \leqslant 1$ и длина которых не слишком большая. В [3] этот результат был частично обобщен для поверхностей в $\mathbb{R}^3$. Заметим, что при таких ограничениях на кривизну кривая может быть невыпуклой. В серии работ [4–6] были доказаны обратные изопериметрические неравенства для выпуклых кривых, чья геодезическая кривизна k в обобщенном смысле удовлетворяет $k \geqslant \lambda > 0$ (так называемые *λ-выпуклые кривые*) и лежащих на двумерных плоскостях постоянной кривизны.

А. А. Борисенко перенес эти неравенства на случай двумерных метрических пространств Александрова кривизны $\geqslant \kappa$ (результат готовится к печати).

В настоящей работе мы обобщаем результат, полученный в [4], на случай λ-выпуклых поверхностей вращения в $\mathbb{R}^3$.

Напомним, что локально выпуклая поверхность $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ называется *λ-выпуклой* ($\lambda > 0$), если для любой точки $p \in \Sigma$ существует сфера радиуса $1/\lambda$, проходящая через p так, что в некоторой окрестности p поверхность Σ лежит внутри этой сферы.

Заметим, что для C^r-гладких ($r \geqslant 2$) поверхностей Σ условие ее λ-выпуклости равносильно тому, что в любой точке $p \in \Sigma$ и направлении $v \in T_p\Sigma$ соответствующая нормальная кривизна $k_{\rm n}(p, v)$ по отношению ко внутренней нормали удовлетворяет $k_{\rm n}(p, v) \geqslant \lambda$. Таким образом, понятие λ-выпуклости есть естественным обобщением того факта, что нормальная кривизна не меньше λ. Так как выпуклая поверхность почти всюду дважды непрерывно дифференцируема, то и в общем случае она будет λ-выпуклой тогда и только тогда, когда почти всюду $k_{\rm n} \geqslant \lambda$.

Для заданного $\lambda > 0$ будем называть *(λ-выпуклой) линзой* границу пересечения двух шаров радиуса $1/\lambda$.

Если $A(\cdot)$ и $V(\cdot)$ — соответственно площадь поверхности и объем ограничиваемой области, то справедлива

Теорема 1. *Пусть $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ — полная λ-выпуклая поверхность вращения. Если $\Sigma_\lambda \subset \mathbb{R}^3$ — λ-выпуклая линза такая, что*

$$A(\Sigma) = A(\Sigma_\lambda), \tag{1}$$

то

$$V(\Sigma) \geqslant V(\Sigma_\lambda). \tag{2}$$

При этом равенство достигается только при $\Sigma = \Sigma_\lambda$.

Вычисляя $V(\Sigma_\lambda)$ в терминах $A(\Sigma_\lambda)$, получаем, что теорема 1 эквивалентна следующему *обратному изопериметрическому неравенству.*

Теорема 2. *Пусть $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ — полная λ-выпуклая поверхность вращения, $A = A(\Sigma)$, $V = V(\Sigma)$; тогда*

$$96\pi^2 V \geqslant \lambda A^2(12\pi - \lambda^2 A) \tag{3}$$

и равенство достигается только для λ-выпуклой линзы.

Доказательство теорем 1 и 2. Из теоремы Хейенорта [7] и теоремы прокачивания Бляшке [8, 9] следует, что полная λ-выпуклая поверхность в $\mathbb{R}^3$ ограничивает выпуклую область, гомеоморфную шару. Поэтому доказательство анонсированных результатов сводится к решению следующей задачи оптимизации: *в классе полных λ-выпуклых двумерных поверхностей вращения с фиксированной площадью поверхности найти ту, которая минимизирует объем ограничиваемой области.*

Так как условие λ-выпуклости сохраняется под действием предельных переходов в метрике Хаусдорфа, то, в силу теоремы выбора Бляшке (см. [8]), поставленная оптимизационная задача имеет решение. Для нахождения этого решения мы воспользуемся необходимым условием оптимальности, которым является *принцип максимума Понтрягина.* Будем следовать [10].

Не ограничивая общности, везде далее положим $\lambda = 1$.

Чтобы применить принцип максимума Понтрягина, нам необходимо формализовать задачу и построить так называемую управляемую систему.

Пусть $(t, \theta) \mapsto (x(t)\cos\theta, x(t)\sin\theta, z(t))$ — параметризация Σ в стандартной декартовой системе координат (x, y, z, O), где $\theta \in [0, 2\pi)$, t — угол между единичной внешней нормалью к *профильной кривой* $\sigma(t) := (x(t), z(t))$ в плоскости xOz и положительным направлением оси Ox, $t \in [-\pi/2, \pi/2]$, $x(\cdot) \geqslant 0$, $x(\pi/2) = x(-\pi/2) = 0$.

Несложно показать, что вращательно-симметричная поверхность Σ будет 1-выпуклой тогда и только тогда, когда соответствующая ей профильная кривая σ будет 1-выпуклой. Таким образом, нахождение Σ сводится к нахождению подходящего профиля $\sigma(t) = (x(t), z(t))$ в плоскости xOz.

Пусть $s(t) := x(t)\cos t + z(t)\sin t$ — опорная функция σ. Известно, что по опорной функции строго выпуклая кривая восстанавливается однозначно, при этом $s \in C^{1,1}(-\pi/2, \pi/2)$ и

$$\ddot{s}(t) + s(t) = R(t) \qquad \text{п. в. на} \qquad \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \tag{4}$$

где $R(t)$ — *радиус кривизны* кривой σ в точке $\sigma(t)$; точкой по традиции обозначается производная по параметру t. В силу выпуклости, для почти всех точек на σ справедливо $R(t) = 1/k(t)$, где $k(t)$ — почти всюду определенная кривизна σ. Условие 1-выпуклости σ означает

$$0 \leqslant R(t) \leqslant 1 \qquad \text{п. в. на} \qquad \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]. \tag{5}$$

Заметим, что правая часть в неравенстве (3) является строго вогнутой функцией аргумента $A = A(\Sigma)$. Поэтому можно применить идею доказательства [6, утв. 2 (ч. II)] и считать, что Σ симметрична относительно плоскости xOy.

С учетом введенных обозначений и упрощений, используя стандартные формулы, определение опорной функции и (4), получаем корректно определенные

$$V(\Sigma) = \frac{4\pi}{3}\int\limits_0^{\pi/2}(s\cos t - \dot{s}\sin t)Rs\,dt, \qquad A(\Sigma) = 4\pi\int\limits_0^{\pi/2}(s\cos t - \dot{s}\sin t)R\,dt. \tag{6}$$

Таким образом, необходимо минимизировать $V(\Sigma)$ при условии $A(\Sigma) = \text{const}$ и с учетом (5). Интерпретируем эту задачу как задачу оптимального управления, где $u(t) := R(t)$ — управление, $x_1(t) := s(t)$, $x_2(t) := \dot{s}(t)$ — фазовые переменные. Заметим, что в силу того, что $s \in C^{1,1}(0, \pi/2)$, фазовые переменные — абсолютно непрерывные на $(0, \pi/2)$ функции.

Приходим к следующей формализованной постановке нашей оптимизационной задачи:

$$\int\limits_0^{\pi/2} x_1 u(x_1\cos t - x_2\sin t)\,dt \longrightarrow \min,$$

$$\int\limits_0^{\pi/2} u(x_1\cos t - x_2\sin t)\,dt = \text{const},$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = u(t) - x_1(t) \end{cases} \qquad \text{п. в. на} \qquad \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \tag{7}$$

$$u(t) \in [0, 1] \qquad \text{п. в. на} \qquad \left[0, \frac{\pi}{2}\right],$$

$$x_2(0) = x_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Задача (7) корректно определена в том смысле, что если пара $(\mathbf{x}, u) := ((x_1(\cdot), x_2(\cdot)), u(\cdot))$ удовлетворяет (7), то $(\mathbf{x}, u)$ — управляемый процесс и $\{(\mathbf{x}, u)\colon t \in [0, \pi/2]\}$ — допустимая траектория (см. [10]).

Функция Понтрягина задачи (7) равна

$$\mathcal{H}(t, \mathbf{x}, u, \mathbf{p}, \mu_0, \mu_1) = p_1 x_2 + p_2(u - x_1) - \mu_0 u x_1 x + \mu_1 u x,$$

где μ_0, μ_1 — скалярные множители Лагранжа, $\mathbf{p}(t) := (p_1(t), p_2(t))$ — сопряженные переменные, $x(t) := x_1(t)\cos t - x_2(t)\sin t$ — координата по оси Ox профильной кривой σ.

Заметим, что наша функция Понтрягина линейна по управлению u и может быть записана в виде $\mathcal{H} = u\mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2$, где $\mathcal{H}_j$ не зависят от u, $\mathcal{H}_1 = p_2 - \mu_0 x_1 x + \mu_1 x$. Тогда из условия максимума функции $\mathcal{H}$ следует, что искомое оптимальное управление в задаче (7) имеет вид

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad \mathcal{H}_1 > 0, \\ 0 & \text{при} \quad \mathcal{H}_1 < 0, \\ \text{не определено} & \text{при} \quad \mathcal{H}_1 = 0 \end{cases} \qquad \text{п. в. на} \qquad \left[0, \frac{\pi}{2}\right]. \tag{8}$$

Окончательный вид управления (8) определяется путем анализа так называемой *особой экстремали*, т. е. допустимой в задаче траектории, вдоль которой $\mathcal{H}_1$ тождественно равно нулю. Аналогично [6] можно показать, что на особой экстремале задачи (7) не выполнено необходимое условие Лежандра–Клебша вхождения дуг таких траекторий в решение (см. [11]). А значит, оптимальное управление на отрезке $[0, \pi/2]$ принимает только значения 0 или 1, при этом переключения происходят при переходе оптимальной траектории через особую.

Несложно показать, что $\mu_0 \neq 0$, т. е. в нашей задаче можно рассматривать только *нормальные* экстремали. Будем считать, что $\mu_0 = 1/3$. Анализ (с использованием сопряженной системы для $\mathbf{p}$) особой экстремали задачи (7) показывает, что она должна удовлетворять уравнению

$$ux - \mu_1 x = \mu_1 u \cos t \tag{9}$$

для почти всех значений $t \in [0, \pi/2]$.

В то же время $\dot{x} = -u \sin t$ п. в. на $[0, \pi/2]$. Тогда, умножая (9) на $\sin t$ и используя условие $x(\pi/2) = 0$, получаем, что для всех $t \in [0, \pi/2]$ на особой экстремали справедливо $x(t) = 2\mu_1 \cos t$, $u(t) \equiv 2\mu_1$. Следовательно, особая экстремаль задачи (7) является окружностью радиуса $2\mu_1$, $\mu_1 \in (0, 1/2]$. Значит, оптимальное управление (8) окончательно имеет вид

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad x_1(t) < 2\mu_1, \\ 0 & \text{при} \quad x_1(t) \geqslant 2\mu_1 \end{cases} \qquad \text{на} \qquad \left[0, \frac{\pi}{2}\right]. \tag{10}$$

Напомним, что выпуклая плоская кривая, составленная из n равных дуг радиуса 1, состыковывающихся под равными углами, называется *правильным* 1*-выпуклым* n*-угольником.*

Аналогично [4], а также используя условие трансверсальности (см. [10]) в $\pi/2$, можно показать, что из вида (10) оптимального управления вытекает

Лема 1. *Пусть* $\overline{\sigma}$ *— правильный* 1*-выпуклый* $2k$*-угольник* ($k \geqslant 1$)*, симметричный относительно осей* Ox *и* Oz *и пересекающий* Oz *в серединах своих сторон; тогда оптимальный профиль* σ *задачи (7) совпадает с* $\overline{\sigma}$ *в первом квадранте плоскости* xOz*.*

В свете леммы 1 для доказательства теорем 1 и 2 осталось показать, что в действительности $k = 1$, т. е. только правильный двуугольник $\overline{\sigma}$ доставляет абсолютный минимум в нашей задаче оптимизации.

Обозначим через R_{2k} радиус описанной окружности для правильного 1-выпуклого $2k$-угольника $\overline{\sigma}$. Несложно видеть, что при фиксированном радиусе r вписанной окружности для $\overline{\sigma}$ значения $R_{2k} = R_{2k}(r)$ монотонно убывают по k. При этом $\lim\limits_{k\to\infty} R_{2k}(r) = r$.

Используя теорему сравнения радиальных углов для 1-выпуклых гиперповерхностей (см. [12]), а также подход для оценки отношения объема к площади поверхности из [13], можно доказать следующую теорему устойчивости.

Теорема 3. *Пусть* $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ *— полная* 1*-выпуклая поверхность,* r *— радиус вписанного в нее шара,* $O \in \mathbb{R}^3$ *— центр этого шара. Предположим, что* $\Sigma \subseteq B_R(O)$*, где* $B_R(O)$ *— шар с центром в точке* O *радиуса* R*, причем*

$$R \leqslant R_4(r) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(r - 1 + \sqrt{1 + 2r - r^2}\right); \tag{11}$$

тогда в (3) *выполняется строгое неравенство.*

В силу уже упомянутой монотонности $R_{2k}(r)$, из теоремы устойчивости 3 и леммы 1 о структуре оптимального профиля следуют (эквивалентные) теоремы 1 и 2.

Работа выполнена при частичной поддержке Фонда им. Н. И. Ахиезера.

Цитированная литература

1. *Бураго Ю. Д., Залгаллер В. А.* Геометрические неравенства. – Ленинград: Наука, 1980. – 288 с.
2. *Howard R., Treibergs A.* A reverse isoperimetric inequality, stability and extremal theorems for plane curves with bounded curvature // Rocky Mountain J. Math. – 1995. – **25**, No 2. – P. 635–684.
3. *Gard A. C.* Reverse Isoperimetric Inequalities in $\mathbb{R}^3$: PhD Thesis. – Columbus: Ohio State University, 2012. – 57 p.
4. *Борисенко А. А., Драч К. Д.* Изопериметрическое неравенство для кривых с ограниченной снизу кривизной // Матем. заметки. – 2014. – **95**, № 5. – С. 656–665.
5. *Драч К. Д.* Об изопериметрическом свойстве λ-выпуклых луночек на плоскости Лобачевского // Доп. НАН України. – 2014. – № 11. – С. 11–15. (English version: arXiv: 1402.2688 [math. DG]).
6. *Borisenko A., Drach K.* Extreme properties of curves with bounded curvature on a sphere // J. Dyn. Control Syst. – 2015. – **21**, No 3. – P. 311–327.
7. *van Heijenoort J.* On locally convex manifolds // Comm. Pure Appl. Math. – 1952. – **5**. – P. 223–242.
8. *Бляшке В.* Круг и шар. – Москва: Наука, 1967. – 232 с.
9. *Борисенко А. А., Драч К. Д.* Теорема сравнения для опорных функций гиперповерхностей // Доп. НАН України – 2015. – № 3. – С. 11–16 (English version: arXiv: 1402.2691 [math. DG]).
10. *Милютин А. А., Дмитрук А. В., Осмоловский Н. П.* Принцип максимума в оптимальном управлении. – Москва: Изд-во ЦПИ при мех.-мат. факультете МГУ, 2004. – 168 с.
11. *Kelley H. J., Kopp R. E., Moyer H. G.* Singular extremals // Topics in Optimization / Ed. G. Leitmann. – New York: Academic Press, 1967. – P. 63–103.
12. *Борисенко А. А., Драч К. Д.* О сферичности гиперповерхностей с ограниченной снизу нормальной кривизной // Матем. сб. – 2013. – **204**, № 11. – С. 21–40.
13. *Borisenko A.* Convex sets in Hadamard manifolds // Diff. Geom. Appl. – 2002. – **17**. – P. 111–121.

References

1. *Burago Yu. D., Zalgaller V. A.* Geometric inequalities, Leningrad: Nauka, 1980 (in Russian).
2. *Howard R., Treibergs A.* Rocky Mountain J. Math., 1995, **25**, No 2: 635–684.
3. *Gard A. C.* Reverse Isoperimetric Inequalities in $\mathbb{R}^3$: PhD Thesis, Columbus: Ohio State University, 2012.
4. *Borisenko A., Drach K.* Math. Notes, 2014, **95**, No 5: 590–598 (in Russian).
5. *Drach K. D.* Dop. NAN Ukraine, 2014, No 11: 11–15 (in Russian; English version: arXiv:1402.2688 [math.DG]).
6. *Borisenko A., Drach K.* J. Dyn. Control Syst., 2015, **21**, No 3: 311–327.
7. *van Heijenoort J.* Comm. Pure Appl. Math., 1952, **5**: 223–242.
8. *Blaschke W.* Kreis und Kugel, Moskva: Nauka, 1967 (in Russian).
9. *Borisenko A. A., Drach K. D.* Dop. NAN Ukraine, 2015, No 3: 11–16 (in Russian; English version: arXiv: 1402.2691[math.DG]).
10. *Milyutin A. A., Dmitruk A. V., Osmolovskij N. P.* Maximum principle in optimal control, Moscow: Izd. CPI pri mekh.-mat. fakul'tete MGU, 2004 (in Russian).
11. *Kelley H. J., Kopp R. E., Moyer H. G.* Topics in Optimization, Ed. G. Leitmann, New York: Academic Press, 1967: 63–103.
12. *Borisenko A., Drach K.* Sb. Math., 2013, **204**, No 11: 1565–1583.
13. *Borisenko A.* Diff. Geom. Appl., 2002, **17**: 111–121.

Поступило в редакцию 12.08.2015

К. Д. Драч

Сумський державний університет
Харківський національний університет ім. В. Н. Каразіна
E-mail: kostya.drach@gmail.com, drach@karazin.ua

Про розв'язання оберненої задачі Дідони у класі опуклих поверхонь обертання

За допомогою принципу максимума Понтрягіна доводиться обернена ізопериметрична нерівність, і тим самим розв'язується обернена задача Дідони, для λ-опуклих поверхонь обертання у тривимірному евклідовому просторі.

Ключові слова: λ-опуклість, нормальна кривина, обернена ізопериметрична нерівність, принцип максимуму Понтрягіна.

K. D. Drach

Sumy State University
V. N. Karazin Kharkiv National University
E-mail: kostya.drach@gmail.com, drach@karazin.ua

On the solution of reverse Dido's Problem for convex surfaces of revolution

By applying Pontryagin's maximum principle, we prove a reverse isoperimetric inequality and thus solve a reverse Dido's Problem for λ-convex surfaces of revolution in the three-dimensional Euclidean space.

Keywords: λ-convexity, normal curvature, reverse isoperimetric inequality, Pontryagin's maximum principle.