



УДК 519.8

<http://dx.doi.org/dopovidi2016.03.026>

О. О. Ємець, М. В. Леонова

Полтавський національний педагогічний університет ім. В. Г. Короленка
E-mail: yemetsli@ukr.net

Поліноміальні алгоритми розв'язування деяких задач побудови розкладів приладу для заявок з очікуванням

(Представлено академіком НАН України І. В. Сергієнком)

Стаття присвячена розробці класифікації задач $Z = (P, R, W, F)$ знаходження розкладу роботи одного приладу із заданими параметрами. Кожне з завдань має додатну вагу $w_i \in W$, час обробки $p_i \in P$ та час очікування $r_i \in R$, коли воно недоступне для обслуговування, а також заданий критерій F оптимальності розкладу. Показана можливість поліноміального за часом знаходження розкладів цих задач. Доведено, що оптимальним розв'язком задач знаходження розкладу роботи одного приладу є упорядкування $\sigma = (i_1, \dots, i_k)$ завдань згідно з упорядкуванням по неспаданню елементів перестановок $X = (r_{i_1}, \dots, r_{i_k}) \in E_{kn}(R)$, де R – мультимножина часів очікування завдань.

Ключові слова: задача розкладу для одного приладу, поліноміальний алгоритм.

Задачі вибору черговості обслуговування, які вивчаються в теорії розкладів, мають загальний характер і виникають при різних видах цілеспрямованої діяльності, наприклад, при календарному плануванні виробництва, будівництва, транспортних перевезень, навчання, інформаційно-обчислювальних процесів [1–4]. У загальній постановці вони являють собою процес розподілу деякого скінченного набору подій у часі за умови ресурсних та інших обмежень. Часто задача складання розкладу є складною. Така ситуація виникає через залученість в розклад великої кількості завдань за умови виконання певної системи обмежень. Тому актуальним є дослідження таких задач та розробка методів складання розкладу, особливо пошук поліноміально розв'язних випадків.

Однією з найбільш важливих задач такого типу є задача розкладу для одного і декількох приладів. Вона розглядається зокрема у працях Е. Г. Коффмана, Е. Г. Танаєва, В. В. Шкурби, М. З. Згуровського, О. А. Павлова та ін. [1–4]. Мета розв'язання задачі полягає в тому, щоб при заданих властивостях завдань та ресурсів і накладених на них обмеженнях знайти ефективний алгоритм упорядкування завдань, який оптимізує бажану міру ефективності. Як основні міри ефективності часто визначаються довжина розкладу і середній час виконання завдань.

Стаття присвячена обґрунтуванню поліноміального способу розв'язування деяких задач знаходження розкладу для одного приладу. Це є актуальним, оскільки такі задачі в загальній постановці належить до класу NP-важких задач і реалізація пошуку їх оптимального розв'язку потребує неполіноміальних витрат часу. Поліноміальні алгоритми для певних часткових випадків розглянуті у роботах Е. Г. Коффмана [2], А. А. Лазарева [8] та ін.

Розглянемо одну задачу побудови розкладу для приладу в постановці [5, 6]. Задано множину $J_k = \{1, 2, \dots, k\}$ номерів завдань. Кожне завдання має додатну вагу w_i , час обробки p_i і час очікування r_i , коли воно недоступне для обслуговування. Задані критерії оптимальності розкладу F . В роботі приладу допускаються переривання. Позначимо загальну задачу пошуку розкладу для одного приладу $Z = (P, R, W, F)$, як упорядковану четвірку, де $P = \{p_1, \dots, p_k\}$, $R = \{r_1, \dots, r_k\}$, $W = \{w_1, \dots, w_k\}$ — мультимножини часу обробки, часу очікування та ваги завдань відповідно. В [5, 6] необхідно мінімізувати сумарно зважений час завершення обслуговування всіх завдань, якщо час обробки є сталим для всіх завдань $p_i = p$.

Класифікація модифікацій задач розкладу для одного приладу. На основі розглянутої задачі з [5, 6] введемо до розгляду деякі задачі побудови розкладу для одного приладу. Виділимо такі задачі:

1. Задача $Z_1 = (P_1, R, W_1, F_1)$ за умови $p_i = 1$, $w_i = 1 \forall i \in J_k$, тобто $P = P_1 = \{1, \dots, 1\}$, $W = W_1 = \{1, \dots, 1\}$. Цільова функція $F = F_1$ — мінімізація часу завершення останнього завдання.

2. Задача $Z_2 = (P_1, R, W_1, F_2)$. Цільова функція F_2 — мінімізація часу простою приладу.

3. Задача розкладу для одного викладача $Z_3 = (P_1, R, W_1, F_2)$. Цільова функція F_2 — мінімізація часу простою.

4. Задача $Z_4 = (P, R, W_1, F_1)$. Цільова функція F_1 — мінімізація часу завершення останнього завдання.

5. Задача $Z_5 = (P_1, R, W_1, F_3)$. Цільова функція F_3 — мінімізація сумарного часу завершення всіх завдань.

Поставимо мету — дослідити можливість побудови поліноміального алгоритму для розв'язування цих задач.

Задача $Z_1 = (P_1, R, W_1, F_1)$. Нехай маємо множину завдань з номерами J_k . Завдання з номером i має час очікування r_i , коли воно не доступне для обробки, $r_i \geq 0$. Тобто ці величини утворюють мультимножину $R = \{r_1, \dots, r_k\}$. Оскільки $p = p_1 = 1$, то час p_i обробки завдання з номером i є однаковим для всіх завдань. Маємо $w = w_1$, вага всіх завдань теж є однаковою одиничною — $w_i = 1$. Цільова функція F_1 означає, що необхідно визначити розклад, на якому буде досягатися мінімальний час обслуговування всіх завдань.

Розглянемо допустимий розв'язок — порядок виконання завдань. Тоді, очевидно, кожен допустимий розв'язок такої задачі є впорядкованою k -вибіркою з номерів величин r_i згідно з їх розташуванням в перестановці X з загальної множини перестановок $E_{kn}(R)$ [7]:

$$x \in (x_1, \dots, x_k) \in E_{kn}(R),$$

де n — кількість різних елементів в R ; а x_i — час очікування завдання, що виконується i -м.

Часом початку виконання завдання, що виконується першим, є $y_1 = x_1$, часом його завершення — $y_1 + 1$.

Часом початку виконання завдання, що виконується другим, є максимальне значення із x_2 та $y_1 + 1$, тобто $y_2 = \max\{x_2, y_1 + 1\}$, а часом закінчення — $y_2 + 1$.

Аналогічно часом початку виконання завдання, що виконується k -м, є $y_k = \max\{x_k, y_{k-1} + 1\}$, часом завершення — $y_k + 1$.

Маємо цільову функцію, що мінімізує час завершення обслуговування $y_k + 1$, що рівносильне мінімізації часу початку останнього завдання:

$$F_1 = y_k = \max\{x_k, y_{k-1} + 1\} \rightarrow \min$$

за умови виконання наступних співвідношень:

$$y_1 = x_1; \quad y_i = \max\{x_i, y_{i-1} + 1\}; \quad \forall i \in J_k \setminus \{1\}$$

та за умови

$$x \in (x_1, \dots, x_k) \in E_{kn}(R).$$

Розглянемо умови задачі

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1; & y_2 &= \max\{x_2, y_1 + 1\} = \max\{x_2, x_1 + 1\}; \\ y_3 &= \max\{x_3, y_2 + 1\} = \max\{x_3, \max\{x_2, x_1 + 1\} + 1\} = \max\{x_3, x_2 + 1, x_1 + 2\} \end{aligned}$$

і так далі.

Загальна формула: $y_j = \max\{x_j, x_{j-1} + 1, x_{j-2} + 2, \dots, x_1 + (j - 1)\} \forall j \in J_k \setminus \{1\}$. Тобто ми довели таке твердження.

Лема. Умови на допустимий розв'язок (порядок виконання завдань) в задачі Z_1 вигляду

$$y_1 = x_1; \quad y_i = \max\{x_i, y_{i-1} + 1\} \quad \forall i \in J_k \setminus \{1\}$$

еквівалентні таким:

$$y_1 = x_1; \quad y_i = \max\{x_i, x_{i-1} + 1, x_{i-2} + 2, \dots, x_1 + (i - 1)\}.$$

Покажемо, що задачу Z_1 можна розв'язати поліноміальним алгоритмом.

Алгоритм одержання одного із можливих оптимальних розв'язків задачі визначає таке твердження.

Твердження 1. Оптимальним розв'язком задачі Z_1 знаходження розкладу роботи одного приладу з мінімізацією часу завершення виконання останнього завдання є упорядкування $\sigma = (i_1, \dots, i_k)$ завдань згідно з упорядкуванням по неспаданню елементів перестановок $X = (r_{i_1}, \dots, r_{i_k}) \in E_{kn}(R)$,

$$r_{i_1} \leq r_{i_2} \leq \dots \leq r_{i_k}, \tag{1}$$

де $R = \{r_1, \dots, r_k\}$ — мультимножина часів очікування завдань.

Зауваження 1. Оскільки впорядкування елементів, як відомо [9], може бути здійснено поліноміальним алгоритмом, а розв'язок задачі Z_1 до цього зводиться, то твердження 1 доводить поліноміальну розв'язність задачі.

Задача $Z_2 = (P_1, R, W_1, F_2)$. Цільова функція мінімізує суму періодів часу, коли жодне завдання не виконується

$$F_2 = \sum_{j=1}^k (y_{j+1} - (y_j + 1)) \rightarrow \min,$$

де y_j — час початку завдання з номером j , $j \in J_k$.

Оскільки задача мінімізації часу простою приладу є рівносильною до мінімізації часу завершення останнього завдання, то оптимальний розв'язок задачі Z_2 також можна знайти згідно з твердженням 1.

Задача $Z_3 = (P, R, W_1, F_1)$. Нехай час p_i обробки завдання з номером i не є однаковим для всіх завдань — $P = (p_1, \dots, p_k)$, $p_i > 0, \forall i \in J_k$. Задача: визначити розклад, на якому буде досягтися мінімальний час обслуговування всіх завдань.

Часом початку виконання завдання, яке виконується першим, є $y_1 = x_1$, часом його завершення — $y_1 + p_{i_1}$, $x = (x_1, \dots, x_k) \in E_k(R)$, $R = \{r_1, \dots, r_k\}$, $r_i \geq 0, \forall i \in J_k$.

Часом початку виконання завдання, яке виконується другим, є максимальне значення із x_2 та $y_1 + p_{i_1}$, тобто $y_2 = \max\{x_2, y_1 + p_{i_1}\}$, а часом закінчення — $y_2 + p_{i_2}$.

Аналогічно часом початку виконання завдання, яке виконується k -м, є $y_k = \max\{x_k, y_{k-1} + p_{i_{k-1}}\}$, часом завершення — $y_k + p_{i_k}$.

Маємо цільову функцію, яка мінімізує час завершення обслуговування $y_k + p_{i_k}$, що рівносильне мінімізації часу початку останнього завдання:

$$F_1 = y_k = \max\{x_k, y_{k-1} + p_{i_{k-1}}\} \rightarrow \min.$$

З іншого боку в задачі Z_3 час завершення останнього завдання (або цільову функцію) можна розглядати у такому вигляді:

$$F_1 = r_1 + \sum_{i=1}^k p_i + \sum_{j=1}^{k-1} z_j, \tag{2}$$

де r_1 — час початку виконання першого завдання розв'язку; $\sum_{i=1}^k p_i$ — сума всіх p_i ; $\sum z_j$ — сума усіх простоїв пристрою.

Простої розраховуються за формулами:

$$z_1 = \max\{0; r_2 - p_1 - r_1\};$$

$$z_2 = \max\left\{0; r_3 - \sum_{i=1}^2 p_i - r_1 - z_1\right\};$$

.....

$$z_{k-1} = \max\left\{0; r_k - \sum_{i=1}^{k-1} p_i - r_1 - \sum_{j=1}^{k-2} z_j\right\}.$$

Твердження 2. Якщо у розв'язку $X = (r_1, \dots, r_{k-1}, r_k)$ простій $z_{k-1} > 0$, то значення цільової функції обчислюється за формулою $F_1 = r_k + p_k$.

Твердження 3. Оптимальним розв'язком задачі Z_3 знаходження розкладу роботи одного приладу з мінімізацією часу завершення виконання останнього завдання є упорядкування $\sigma = (1, \dots, k)$ завдань згідно з упорядкуванням по неспаданню елементів перестановки $X = (r_1, \dots, r_k) \in E_{kn}(R)$,

$$r_1 \leq r_2 \leq \dots \leq r_k, \tag{3}$$

де $R = \{r_1, \dots, r_k\}$ — мультимножина часу очікування завдань.

Задача $Z_4 = (P_1, R, W_1, F_3)$. Нехай задача полягає у тому, що потрібно мінімізувати не час початку останнього завдання, а суму часу завершення всіх завдань. Оскільки час завершення на 1 більше часу початку, то це еквівалентно мінімізації суми часу початку. Тобто цільова функція має вигляд

$$F_3 = x_1 + \sum_{j=1}^{k-1} \max(x_{j+1}; y_j + 1) \rightarrow \min, \quad (4)$$

де x_1 — час початку виконання завдання, що виконується першим, $\max\{x_{j+1}; y_j + 1\}$ — час початку виконання j -го завдання.

$$X \in E_{kn}(R).$$

Твердження 4. *Оптимальним розв'язком задачі Z_4 знаходження розкладу роботи одного приладу з мінімізацією сумарного часу завершення всіх завдань є упорядкування $\sigma = (i_1, \dots, i_k)$ завдань згідно з упорядкуванням по неспаданню елементів перестановок $X = (r_{i_1}, \dots, r_{i_k}) \in E_{kn}(R)$, $r_{i_1} \leq r_{i_2} \leq \dots \leq r_{i_k}$.*

Таким чином, в статті показано, що упорядкування часу очікування дає оптимальний розклад в розглянутих задачах $Z_1 - Z_4$, а отже це — ефективний спосіб розв'язування таких задач поліноміальним алгоритмом.

Цитована література

1. Конвей Р. В., Максвелл В. Л., Миллер Л. В. Теория расписаний. — Москва: Наука, 1975. — 360 с.
2. Коффман Э. Г. Теория расписаний и вычислительные машины. — Москва: Наука, 1984. — 336 с.
3. Танаев В. С., Шкурба В. В. Введение в теорию расписаний. — Москва: Наука, 1975. — 257 с.
4. Згуровский М. З., Павлов А. А. Принятие решений в сетевых системах с ограниченными ресурсами. — Киев: Наук. думка, 2010. — 573 с.
5. Шерешик Н. Ю. Полиэдральные свойства задачи обслуживания различных требований одним прибором “Тезисы докл. XVI Байкальской Междунар. школы-семинара “Методы оптимизации и их приложения”. — Иркутск, ИСЭМ СО РАН, 2014. — С. 96.
6. Brucker P., Knust S. Complexity Results for Scheduling Problems. Режим доступа: [www // mathematik.uni-osnabrueck.de/research/OR/class](http://www.mathematik.uni-osnabrueck.de/research/OR/class).
7. Стоян Ю. Г., Ємець О. О. Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації. — Київ: Інститут систем досліджень освіти, 1993. — 188 с. — Режим доступу <http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/487>.
8. Лазарев А. А. Решение NP-трудной задачи теории расписаний минимизации суммарного запаздывания // Журн. вычислит. математики и мат. физики. — 2007. — 47, № 6. — С. 1087–1098.
9. Кнут Д. Искусство программирования. Т. 3. Сортировка и поиск. — Москва: ИД “Вильямс”, 2000. — 824 с.

References

1. Konvey R. V., Maksvell V. L., Miller L. V. Scheduling theory. Moscow, Nauka, 1975 (in Russian).
2. Koffman E. G. Computers and job-shop scheduling theory. Moscow, Nauka, 1984 (in Russian).
3. Tanaev V. S., Shkurba V. V. Introduction to the theory of schedules, Moscow, Nauka, 1975 (in Russian).
4. Zgurovskiy M. Z., Pavlov A. A. Decision making in network systems with limited resources: Monograph. Kiev, Nauk. dumka, 2010 (in Russian).
5. Shereshik N. Yu. Polyhedral properties maintenance task of different requirements with one device. (Theses of reports XVI Baikal International School-Seminar “Optimization methods and their applications”). Irkutsk, ISEM SO RAN, 2014 (in Russian).

6. Brucker P., Knust S. Complexity Results for Scheduling Problems. Available at: [www//mathematik.uni-osnabrueck.de/research/OR/class](http://www.mathematik.uni-osnabrueck.de/research/OR/class).
7. Stoyan Yu. G., Emets O. O. Theory and methods of Euclidean combinatorial optimization. Kiev, Research Institute of Education, 1993 (in Ukrainian).
8. Lazarev A. A. J. of Numerical Math. and Math. Phys., 2007: 1087–1098 (in Russian).
9. Knut D. Art of Computer Programming, Volume 3: Sorting and searching, Moscow, “Vilyams”, 2000 (in Russian).

Надійшло до редакції 30.06.2015

О. А. Емец, М. В. Леонова

Полтавский национальный педагогический университет им. В. Г. Короленко

E-mail: yemetsli@ukr.net

Полиномиальные алгоритмы решения некоторых задач о построении разложений для прибора для заявок с ожиданием

Статья посвящена разработке классификации задач $Z = (P, R, W, F)$ нахождения расписания работы одного прибора с заданными параметрами. Каждое из заданий имеет положительный вес $w_i \in W$, время обработки $p_i \in P$ и время $r_i \in R$ ожидания, когда оно недоступно для обслуживания, а также заданный критерий F оптимальности расписания. Показана возможность полиномиального по времени нахождения расписаний этих задач. Доказано, что оптимальным решением задач нахождения расписания работы одного прибора является упорядочение $\sigma = (i_1, \dots, i_k)$ заданий по упорядочению по неубыванию элементов перестановок $X = (r_{i_1}, \dots, r_{i_k}) \in E_{kn}(R)$, R — мультимножество времен ожидания заданий.

Ключевые слова: задача расписания для одного прибора, полиномиальный алгоритм.

O. O. Iemets, M. V. Leonova

V. G. Korolenko Poltava National Pedagogical University

E-mail: yemetsli@ukr.net

Polynomial algorithms of solution for some problems of construction of the timetables of a device for demands with waiting

The article is devoted to the development of a classification of tasks $Z = (P, R, W, F)$ of finding the timetable of one device with the given parameters. Each of the tasks has a positive weight $w_i \in W$, processing time $p_i \in P$, and waiting time $r_i \in R$, if it is not available for the service, and a given criterion F of optimal schedule. The possibility of a scheduling polynomial in the time for these tasks is shown. It is proved that the optimal solution of the tasks of scheduling a device is the nondecreasing ordering $\sigma = (i_1, \dots, i_k)$ of the elements of permutations $X = (r_{i_1}, \dots, r_{i_k}) \in E_{kn}(R)$, R is a multiset of waiting times of tasks.

Keywords: task of scheduling for a single device, polynomial algorithm.