

Л. А. Курдаченко, Х. Отал, О. О. Пипка

Дніпропетровський національний університет ім. Олеся Гончара  
E-mail: lkurdachenko@i.ua, otal@unizar.es, pypka@ua.fm

## Про деякі зв'язки між факторами канонічних центрального ряду в алгебрах Лейбніца

*(Представлено членом-кореспондентом НАН України В. П. Моторним)**Доведено, що зі скінченності ковимірності деякого члена  $\zeta_k(L)$  верхнього центрального ряду алгебри Лейбніца  $L$  випливає скінченність вимірності  $\gamma_{k+1}(L)$ , та отримано границю для цієї вимірності.***Ключові слова:** алгебра Лейбніца, алгебра Лі, верхній центральний ряд, нижній центральний ряд.

Нехай  $L$  — алгебра над полем  $F$ , тоді  $L$  будемо називати *алгеброю Лейбніца* (більш точно, *лівою алгеброю Лейбніца*), якщо виконується така умова (*тотожність Лейбніца*):

$$[[a, b], c] = [a, [b, c]] - [b, [a, c]] \quad \text{для всіх} \quad a, b, c \in L.$$

Поняття алгебри Лейбніца ввів Ж. Лодей [1]. З того часу вони набули чималої популярності, в першу чергу через їх застосування у фізиці. Якщо  $L$  — така алгебра Лейбніца, що  $[a, a] = 0$  для кожного елемента  $a \in L$ , то можна легко переконатися в тому, що  $L$  є алгеброю Лі. Інакше кажучи, ми можемо розглядати алгебри Лейбніца як не антисиметричний аналог алгебр Лі. Для багатьох важливих результатів теорії алгебр Лі були одержані аналоги в рамках теорії алгебр Лейбніца (див., наприклад, [2–8]). Досить часто такі аналоги прямі, проте іноді вони мають дещо специфічні відмінності.

Нагадаємо спочатку деякі стандартні означення та позначення.

Нехай  $L$  — алгебра Лейбніца над полем  $F$ . Якщо  $A, B$  — підпростори алгебри  $L$ , то через  $[A, B]$  будемо позначати підпростір, породжений всіма елементами  $[a, b]$ , де  $a \in A, b \in B$ .

Як завжди, підпростір  $A$  алгебри  $L$  будемо називати *підалгеброю* алгебри  $L$ , якщо  $[x, y] \in A$  для будь-яких елементів  $x, y \in A$ . З означення випливає, що  $[A, A] \leq A$ .

Підалгебра  $A$  називається *лівим* (відповідно *правим*) *ідеалом* алгебри  $L$ , якщо  $[y, x] \in A$  (відповідно  $[x, y] \in A$ ) для будь-яких елементів  $x \in A, y \in L$ . Іншими словами, якщо  $A$  є лівим (відповідно правим) ідеалом, то  $[L, A] \leq A$  (відповідно  $[A, L] \leq A$ ).

Підалгебра  $A$  алгебри  $L$  називається *ідеалом* алгебри  $L$  (більш точно, *двостороннім ідеалом*), якщо вона одночасно є і правим ідеалом, і лівим, тобто якщо  $[x, y], [y, x] \in A$  для будь-яких елементів  $x \in A, y \in L$ .

Слід відзначити, що якщо  $A, B$  — ідеали алгебри Лейбніца, то у загальному випадку  $[A, B]$  не завжди буде ідеалом, відповідний приклад наведений у роботі [3].

Якщо  $A$  — ідеал алгебри  $L$ , то ми можемо говорити про фактор-алгебру  $L/A$ . Неважко переконатися в тому, що ця фактор-алгебра також є алгеброю Лейбніца.

Позначатимемо через  $\text{Leib}(L)$  підпростір, породжений елементами  $[a, a]$ ,  $a \in L$ . Можна показати, що  $\text{Leib}(L)$  є ідеалом алгебри  $L$ . Більш того, якщо  $H$  — такий ідеал алгебри  $L$ , що  $L/H$  є алгеброю Лі, то  $\text{Leib}(L) \leq H$ . Ідеал  $\text{Leib}(L)$  називається *ядром Лейбніца* алгебри  $L$ .

Відзначимо також таку дуже важливу властивість алгебр Лейбніца:

$$[[a, a], x] = 0 \quad \text{для будь-яких елементів} \quad a, x \in L.$$

Нехай  $L$  — алгебра Лейбніца над полем  $F$ ,  $M$  — непорожня підмножина алгебри  $L$ ,  $H$  — підалгебра алгебри  $L$ . Покладемо

$$\text{Ann}_H^{\text{left}}(M) = \{a \in H \mid [a, M] = \langle 0 \rangle\}, \quad \text{Ann}_H^{\text{right}}(M) = \{a \in H \mid [M, a] = \langle 0 \rangle\}.$$

Підмножина  $\text{Ann}_H^{\text{left}}(M)$  називається *лівим анулятором* або *лівим централізатором* підмножини  $M$  в підалгебрі  $H$ ; підмножина  $\text{Ann}_H^{\text{right}}(M)$  називається *правим анулятором* або *правим централізатором* підмножини  $M$  в підалгебрі  $H$ . Перетин

$$\text{Ann}_H(M) = \text{Ann}_H^{\text{left}}(M) \cap \text{Ann}_H^{\text{right}}(M) = \{a \in H \mid [a, M] = \langle 0 \rangle = [M, a]\}$$

називається *анулятором* або *централізатором* підмножини  $M$  в підалгебрі  $H$ .

Легко переконатися в тому, що всі ці підмножини є підалгебрами алгебри  $L$ . Більш того, якщо  $M$  є лівим ідеалом алгебри  $L$ , то підмножина  $\text{Ann}_L^{\text{left}}(M)$  також є ідеалом алгебри  $L$ . Якщо ж  $M$  — ідеал алгебри  $L$ , то підмножина  $\text{Ann}_L(M)$  є ідеалом алгебри  $L$ .

*Лівий* (відповідно *правий*) *центр*  $\zeta^{\text{left}}(L)$  (відповідно  $\zeta^{\text{right}}(L)$ ) алгебри  $L$  визначимо за таким правилом:

$$\zeta^{\text{left}}(L) = \{x \in L \mid [x, y] = 0 \text{ для кожного елемента } y \in L\}$$

(відповідно

$$\zeta^{\text{right}}(L) = \{x \in L \mid [y, x] = 0 \text{ для кожного елемента } y \in L\}).$$

Зазначимо, що лівий центр алгебри  $L$  є ідеалом. Більш того,  $\text{Leib}(L) \leq \zeta^{\text{left}}(L)$ , а тому фактор-алгебра  $L/\zeta^{\text{left}}(L)$  є алгеброю Лі.

*Центром*  $\zeta(L)$  алгебри  $L$  будемо називати перетин ануляторів всіх елементів алгебри  $L$ . Інакше кажучи,

$$\zeta(L) = \{x \in L \mid [x, y] = 0 = [y, x] \text{ для кожного елемента } y \in L\}.$$

Іншими словами, центр — це анулятор всієї алгебри  $L$ , більш того, ідеал алгебри  $L$ . Зокрема, ми можемо говорити про фактор-алгебру  $L/\zeta(L)$ .

Правий центр є підалгеброю алгебри  $L$ . Зазначимо, що в загальному випадку лівий та правий центри різні, більш того, вони можуть мати різні вимірності. Це можна побачити в нижченаведеному прикладі.

**Приклад 1.** Нехай  $F$  — поле. Покладемо  $L = Fe_1 \oplus Fe_2 \oplus Fe_3 \oplus Fe_4$  та визначимо операцію  $[-, -]$  за таким правилом:

$$\begin{aligned} [e_1, e_1] &= e_2, & [e_1, e_2] &= -e_2 - e_3, & [e_1, e_3] &= e_2 + e_3, & [e_1, e_4] &= 0, \\ [e_2, e_1] &= 0, & [e_3, e_1] &= 0, & [e_4, e_1] &= e_2 + e_3, \\ [e_j, e_k] &= 0 & \text{для всіх } & j, k \in \{2, 3, 4\}. \end{aligned}$$

Можна перевірити, що ця операція визначає алгебру Лейбніца. В цьому випадку маємо  $\zeta^{\text{right}}(L) = Fe_4$ , а тому підалгебра  $\zeta^{\text{right}}(L)$  не є ідеалом. Крім того,  $\zeta^{\text{left}}(L) = Fe_2 \oplus Fe_3$ , а тому  $\zeta^{\text{right}}(L) \cap \zeta^{\text{left}}(L) = \langle 0 \rangle$ ,  $\dim_F(\zeta^{\text{right}}(L)) = 1$ ,  $\dim_F(\zeta^{\text{left}}(L)) = 2$ . Зазначимо також, що  $[L, L] = \text{Leib}(L) = \zeta^{\text{left}}(L)$ .

Нехай  $L$  — алгебра Лейбніца над полем  $F$ . Визначимо тепер нижній центральний ряд алгебри  $L$

$$L = \gamma_1(L) \supseteq \gamma_2(L) \supseteq \dots \gamma_\alpha(L) \supseteq \gamma_{\alpha+1}(L) \supseteq \dots \gamma_\delta(L) = \gamma_\infty(L)$$

за таким правилом:  $\gamma_1(L) = L$ ,  $\gamma_2(L) = [L, L]$ , а далі індуктивно  $\gamma_{\alpha+1}(L) = [L, \gamma_\alpha(L)]$  для всіх порядкових чисел  $\alpha$ , та  $\gamma_\lambda(L) = \bigcap_{\mu < \lambda} \gamma_\mu(L)$  для всіх граничних порядкових чисел  $\lambda$ . Останній член  $\gamma_\delta(L) = \gamma_\infty(L)$  цього ряду називається *нижнім гіпоцентром* алгебри  $L$ . Для нього ми маємо  $\gamma_\delta(L) = [L, \gamma_\delta(L)]$ . Якщо  $\alpha = k \in \mathbb{N}$ , то  $\gamma_k(L) = [L, [L, [L, \dots, L] \dots]]$  — це лівономований добуток  $k$  копій алгебри  $L$ . Визначимо тепер верхній центральний ряд

$$\langle 0 \rangle = \zeta_0(L) \subseteq \zeta_1(L) \subseteq \dots \zeta_\alpha(L) \subseteq \zeta_{\alpha+1}(L) \subseteq \dots \zeta_\gamma(L) = \zeta_\infty(L)$$

алгебри  $L$  за таким правилом:  $\zeta_1(L) = \zeta(L)$  — центр алгебри  $L$ ,  $\zeta_{\alpha+1}(L)/\zeta_\alpha(L) = \zeta(L/\zeta_\alpha(L))$  для всіх порядкових чисел  $\alpha$ , та  $\zeta_\lambda(L) = \bigcup_{\mu < \lambda} \zeta_\mu(L)$  для всіх граничних порядкових чисел  $\lambda$ . За визначенням кожен член цього ряду є ідеалом алгебри  $L$ . Останній член  $\zeta_\gamma(L) = \zeta_\infty(L)$  цього ряду називається *верхнім гіперцентром* алгебри  $L$ . Будемо позначати через  $zl(L)$  довжину верхнього центрального ряду.

Поняття верхнього та нижнього центральних рядів визначені не лише для алгебр Лейбніца. Вони відіграють важливу роль і в інших алгебраїчних структурах, наприклад, в алгебрах Лі та групах.

Алгебра Лейбніца  $L$  називається *нільпотентною*, якщо існує таке натуральне число  $k$ , що  $\gamma_k(L) = \langle 0 \rangle$ . Більш точно,  $L$  називається *нільпотентною класу нільпотентності  $s$* , якщо  $\gamma_{s+1}(L) = \langle 0 \rangle$ , але  $\gamma_s(L) \neq \langle 0 \rangle$ . Будемо позначати через  $ncl(L)$  клас нільпотентності алгебри  $L$ .

Наведемо деякі властивості членів верхніх та нижніх центральних рядів в алгебрах Лейбніца.

**Твердження 1.** *Нехай  $L$  — алгебра Лейбніца над полем  $F$  та нехай  $L$  має скінченний центральний ряд*

$$\langle 0 \rangle = C_0 \subseteq C_1 \subseteq \dots \subseteq C_n = L.$$

Тоді

$$[(i)] \gamma_j(L) \subseteq C_{n-j+1}, \text{ звідки отримуємо, що } \gamma_{n+1}(L) = \langle 0 \rangle;$$

$$[(ii)] C_j \subseteq \zeta_j(L), \text{ звідки отримуємо, що } \zeta_n(L) = L.$$

Для нільпотентних алгебр Лі та груп добре відомо, що довжини верхнього та нижнього центральних рядів однакові. Для алгебр Лейбніца отримуємо

**Наслідок 1.** *Нехай  $L$  — алгебра Лейбніца над полем  $F$ , та нехай  $L$  має скінченний центральний ряд*

$$\langle 0 \rangle = C_0 \subseteq C_1 \subseteq \dots \subseteq C_n = L.$$

Тоді  $L$  буде нільпотентною та  $ncl(L) \subseteq n$ . Більш того, верхній центральний ряд  $L$  також буде скінченним,  $\zeta_\infty(L) = L$ ,  $zl(L) \leq n$ , та маємо  $ncl(L) = zl(L)$ .

Цей наслідок показує, що алгебра Лейбніца  $L$  буде нільпотентною тоді і тільки тоді, коли існує таке натуральне число  $k$ , що  $L = \zeta_k(L)$ . Найменше натуральне число, що має таку властивість, збігається з класом нільпотентності  $L$ .

Наступним природним кроком є вивчення ситуації, коли верхній (відповідно нижній) центральний ряд має скінченну довжину. Для цього випадку природним є дослідження зв'язків між  $L/\zeta_k(L)$  та  $\gamma_{k+1}(L)$ .

Якщо  $L$  — така алгебра Лі, що фактор-алгебра  $L/\zeta_k(L)$  має скінченну вимірність, то  $\gamma_{k+1}(L)$  також має скінченну вимірність, що випливає з теореми 5.2 роботи Я. Стюарта [9]. Для груп відповідний результат був отриманий раніше Р. Бером [10]. Основним результатом нашої роботи є нижчесформульовані аналоги цих теорем для алгебр Лейбніца.

**Теорема А.** *Нехай  $L$  — алгебра Лейбніца над полем  $F$ . Припустимо, що ковимірність  $\text{codim}_F(\zeta_k(L)) = d$  скінченна. Тоді  $\gamma_{k+1}(L)$  має скінченну вимірність. Більш того,  $\dim_F(\gamma_{k+1}(L)) \leq 2^{k-1}d^{k+1}$ ,  $k \geq 1$ .*

Як наслідок, отримуємо границю для вимірності  $\gamma_{k+1}(L)$  для випадку, коли  $L$  — алгебра Лі.

**Наслідок А1.** *Нехай  $L$  — алгебра Лі над полем  $F$ . Припустимо, що ковимірність  $\text{codim}_F(\zeta_k(L)) = d$  скінченна. Тоді  $\gamma_{k+1}(L)$  також має скінченну вимірність. Більш того,  $\dim_F(\gamma_{k+1}(L)) \leq d^{k-1}(d-1)/2$ .*

Важливим частинним випадком є ситуація, коли центр алгебри Лейбніца має скінченну ковимірність. Для алгебр Лі цей результат є добре відомим (див., наприклад, [11]).

*Нехай  $L$  — алгебра Лі над полем  $F$ . Якщо фактор-алгебра  $L/\zeta(G)$  має скінченну вимірність  $d$ , то  $[L, L]$  також має скінченну вимірність. Більш того,  $\dim_F([L, L]) \leq d(d+1)/2$ .*

Для груп відповідний результат був отриманий значно раніше.

*Нехай  $G$  — група,  $C$  — така підгрупа центру  $\zeta(G)$  групи  $G$ , що  $G/C$  скінченна. Тоді підгрупа  $[G, G]$  також скінченна.*

У такому вигляді цей результат вперше з'явився в роботі Б. Неймана [12]. Також ця теорема була доведена і Р. Бером [10].

Для алгебр Лейбніца ми одержали такий аналог цих теорем.

**Теорема В.** *Нехай  $L$  — алгебра Лейбніца над полем  $F$ . Припустимо, що ковимірності  $\text{codim}_F(\zeta^{\text{left}}(L)) = d$  та  $\text{codim}_F(\zeta^{\text{right}}(L)) = r$  скінченні. Тоді  $[L, L]$  також має скінченну вимірність. Більш того,  $\dim_F([L, L]) \leq d(d+r)$ .*

У зв'язку з цим результатом виникає питання: чи впливає зі скінченності лише  $\text{codim}_F(\zeta^{\text{left}}(L))$  скінченність  $\dim_F([L, L])$ ? Відповідь на це питання негативна. Нами було побудовано відповідні приклади.

**Наслідок В1.** *Нехай  $L$  — алгебра Лейбніца над полем  $F$ . Припустимо, що ковимірність  $\text{codim}_F(\zeta(L)) = d$  скінченна. Тоді  $[L, L]$  також має скінченну вимірність. Більш того,  $\dim_F([L, L]) \leq d^2$ .*

**Наслідок В2.** *Нехай  $L$  — алгебра Лейбніца над полем  $F$ . Припустимо, що ковимірність  $\text{codim}_F(\zeta(L)) = d$  скінченна. Тоді ядро Лейбніца алгебри  $L$  також має скінченну вимірність, яка не перевищує  $d(d-1)/2$ .*

## Цитована література

1. Loday J. L. Une version non commutative des algèbres de Lie: les algèbres de Leibniz // Enseign. Math. — 1993. — **39**. — P. 269–293.
2. Albeverio S. A., Ayupov Sh. A., Omirov B. A. On nilpotent and simple Leibniz algebras // Commun. Algebra. — 2005. — **33**. — P. 159–172.
3. Barnes D. Some theorems on Leibniz algebras // Commun. Algebra. — 2011. — **39**. — P. 2463–2472.
4. Barnes D. On Levi's Theorem for Leibniz algebras // Bull. Australian Math. Soc. — 2012. — **86**. — P. 184–185.
5. Barnes D. On Engel's Theorem for Leibniz algebras // Commun. Algebra — 2012. — **40**. — P. 1388–1389.

6. *Barnes D.* Schunck classes of soluble Leibniz algebras // Commun. Algebra – 2013. – **41**. – P. 4046–4065.
7. *Patsourakos A.* On nilpotent properties of Leibniz algebras // Commun. Algebra. – 2007. – **35**. – P. 3828–3834.
8. *Ray C. B., Combs A., Gin N., Hedges A., Hird J. T., Zack L.* Nilpotent Lie and Leibniz Algebras // Commun. algebra. – 2014. – **42**. – P. 2404–2410.
9. *Stewart I. N.* Verbal and marginal properties of non-associative algebras in the spirit of infinite group theory // Proc. London Math. Soc. – 1974. – **28**. – P. 129–140.
10. *Baer R.* Endlichkeitskriterien für Kommutatorgruppen // Math. Ann. – 1952. – **124**. – P. 161–177.
11. *Vaughan-Lee M. R.* Metabelian *BFC* *p*-groups // J. London Math. Soc. – 1972. – **5**. – P. 673–680.
12. *Neumann B. H.* Groups with finite classes of conjugate elements // Proc. London Math. Soc. – 1951. – **1**. – P. 178–187.

## References

1. *Loday J. L.* Enseign. Math., 1993, **39**: 269–293.
2. *Albeverio S. A., Ayupov Sh. A., Omirov B. A.* Commun. Algebra, 2005, **33**: 159–172.
3. *Barnes D.* Commun. Algebra, 2011, **39**: 2463–2472.
4. *Barnes D.* Bull. Australian Math. Soc, 2012, **86**: 184–185.
5. *Barnes D.* Commun. Algebra, 2012, **40**: 1388–1389.
6. *Barnes D.* Commun. Algebra, 2013, **41**: 4046–4065.
7. *Patsourakos A.* Commun. Algebra, 2007, **35**: 3828–3834.
8. *Ray C. B., Combs A., Gin N., Hedges A., Hird J. T., Zack L.* Commun. algebra, 2014, **42**: 2404–2410.
9. *Stewart I. N.* Proc. London Math. Soc., 1974, **28**: 129–140.
10. *Baer R.* Math. Ann., 1952, **124**: 161–177.
11. *Vaughan-Lee M. R.* J. London Math. Soc., 1972, **5**: 673–680.
12. *Neumann B. H.* Proc. London Math. Soc., 1951, **1**: 178–187.

*Надійшло до редакції 08.07.2015*

**Л. А. Курдаченко, Х. Отал, А. А. Пыпка**

Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара  
*E-mail*: lkurdachenko@i.ua, otal@unizar.es, pypka@ua.fm

### **О некоторых связях между факторами канонических центральных рядов в алгебрах Лейбница**

*Доказано, что из конечности коразмерности некоторого члена  $\zeta_k(L)$  верхнего центрального ряда алгебры Лейбница  $L$  вытекает конечность размерности  $\gamma_{k+1}(L)$ , и получена граница для этой размерности.*

**Ключевые слова:** алгебра Лейбница, алгебра Ли, верхний центральный ряд, нижний центральный ряд.

**L. A. Kurdachenko, J. Otal, A. A. Pypka**

Oles Honchar Dnipropetrovs'k National University  
*E-mail*: lkurdachenko@i.ua, otal@unizar.es, pypka@ua.fm

### **On some relationships between the factors of the canonical central series of Leibniz algebras**

*We have proved that the finiteness of the codimension of some member  $\zeta_k(L)$  of the upper central series of the Leibniz algebra  $L$  yields the finiteness of the dimension of  $\gamma_{k+1}(L)$  and give the bounds of this finiteness.*

**Keywords:** Leibniz algebra, Lie algebra, upper central series, lower central series.