ДОПОВІДІ НАЦІОНАЛЬНОЇ АКАДЕМІЇ НАУК УКРАЇНИ

3 • 2016

МАТЕМАТИКА

УДК 517.54 http://dx.doi.org/10.15407/dopovidi2016.03.007

Я. В. Заболотний

Інститут математики НАН України, Київ

E-mail: yaroslavzabolotnii@mail.ru

Знаходження максимуму добутку внутрішніх радіусів взаємно неперетинних областей

(Представлено членом-кореспондентом НАН України Ю. Ю. Трохимчуком)

Розглянуто відому проблему В. М. Дубиніна про неперетинні області на комплексній площині і знайдено її розв'язок для $\gamma \leqslant \sqrt{n}$.

Ключові слова: внутрішній радіус, неперетинні області, квадратичний диференціал.

В геометричній теорії функцій комплексної змінної значне місце займають екстремальні задачі на класах областей, що не перетинаються. Такі задачі розглядалися, зокрема, в роботах [1–13]. Було отримано багато вагомих результатів, проте значна кількість задач не розв'язана і досі. Одна з таких задач і досліджується в цій роботі. Дана задача була сформульована В. М. Дубиніним [7, с. 68].

Нехай $\mathbb{N}$, $\mathbb{C}$ — множини натуральних і комплексних чисел відповідно, B_j — область в $\overline{\mathbb{C}}$, $r(B_j, a_j)$ — внутрішній радіус області B_j в точці a_j.

Задача 1. Довести, що максимум функціонала

$$I_\gamma = r^\gamma(B_0, a_0) \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k), \tag{1}$$

де B_0, B_1, B_2, ..., B_n $(n \geqslant 2)$ — попарно неперетинні області в $\overline{\mathbb{C}}$, $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1, n}$, $r(B_j, a_j)$ — внутрішній радіус області B_j в точці a_j $(a_j \in B_j)$, $j = \overline{0, n}$ і $\gamma \leqslant n$ (див., наприклад, [2–12]), досягається для деякої конфігурації областей, які мають n-кратну симетрію.

Для $\gamma = 1$ задача 1 була повністю розв'язана в роботі [8] для $\forall n \geqslant 2$. З методу роботи [8] також випливає, що цей результат правильний і для $0 < \gamma < 1$. В роботі [13] було повністю розв'язано задачу Дубиніна при умові, що $n \geqslant 5$ і $\alpha_k\sqrt{\gamma} \leqslant 2$, де числа α_k означуються таким чином:

$$\alpha_1 := \frac{1}{\pi}(\arg a_2 - \arg a_1), \quad \alpha_2 := \frac{1}{\pi}(\arg a_3 - \arg a_2), \quad \ldots, \quad \alpha_n := \frac{1}{\pi}(2\pi - \arg a_n).$$

У теоремі 5.2.3 роботи [9] знайдено розв'язок задачі 1 при довільному γ, але починаючи з певного, заздалегідь невідомого номера.

У даній роботі отримано такий результат:

Теорема 1. *Для довільного натурального* $n \geqslant 541$ *і* $0 < \gamma \leqslant \sqrt{n}$ *виконується нерівність*

$$r^{\gamma}(B_0, a_0)\prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leqslant r^{\gamma}(D_0, a_0^0)\prod_{k=1}^{n} r(D_k, a_k^0),$$

де $B_0, B_1, B_2, \ldots, B_n$ $(n \geqslant 2)$ *— попарно неперетинні області в* $\overline{\mathbb{C}}$, $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$, $a_1 = 1$, $k = \overline{1,n}$, $r(B_j, a_j)$ *— внутрішній радіус області* B_j *в точці* a_j $(a_j \in B_j)$, $j = \overline{0,n}$, *причому знак рівності досягається, зокрема, за умов* $a_k = a_k^0$, $B_k = D_k$, $k = \overline{0,n}$, *де* a_k^0, D_k *— відповідно полюси і кругові області квадратичного диференціала*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(n^2-\gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n-1)^2}dw^2.$$

Доведення. Враховуючи результати роботи [8], нам достатньо довести, що даний результат справджується при $1 < \gamma \leqslant \sqrt{n}$.

Встановимо спочатку, що дане твердження правильне для $\gamma = \sqrt{n}$. У доведенні суттєво використовуються проміжні результати, отримані при доведенні теореми 5.2.3 роботи [9], які, в свою чергу, були знайдені за допомогою методу розділяючого перетворення областей, який детально розроблений в роботі [7].

Нехай $I_n^0(\gamma)$ — значення функціонала $I_n(\gamma)$ для областей D_k і точок a_k^0, згаданих в умові теореми. Тоді, згідно з теоремою 5.2.3 [9], виконується рівність

$$I_n^0(\gamma) = r^{\gamma}(D_0, 0)\prod_{k=1}^{n} r(D_k, d_k) = \left(\frac{4}{n}\right)^n \frac{\left(\dfrac{4\gamma}{n^2}\right)^{\gamma/n}}{\left(1-\dfrac{\gamma}{n^2}\right)^{n+\gamma/n}} \left(\frac{1-\dfrac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1+\dfrac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}, \tag{2}$$

де D_k — згадані вище кругові області квадратичного диференціала (1). Враховуючи результати роботи [13], нам залишається лише довести правильність теореми 1 при умові $\alpha_0\sqrt{\gamma} > 2$, де $\alpha_0 = \max\limits_k \alpha_k$. Знову ж таки, за теоремою 5.2.3 [9], при умові $\alpha_0\sqrt{\gamma} > 2$ отримаємо таку нерівність:

$$r^{\gamma}(B_0, 0)\prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leqslant \left[2^n\alpha_0\left(\frac{2-\alpha_0}{n-1}\right)^{n-1}\right]^{1-\gamma/n} = [2^n\alpha_0(2-\alpha_0)^{n-1}(n-1)^{-(n-1)}]^{1-\gamma/n}.$$

Оцінимо тепер величину

$$P_n(\gamma) = \frac{r^{\gamma}(B_0, 0)\prod\limits_{k=1}^{n} r(B_k, a_k)}{r^{\gamma}(D_0, 0)\prod\limits_{k=1}^{n} r(D_k, d_k)} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{[2\cdot 2^{n-1}\alpha_0(2-\alpha_0)^{n-1}(n-1)^{-(n-1)}]^{1-\gamma/n}}{\left(\dfrac{4}{n}\right)^{n-1-\gamma(1-1/n)}\left(\dfrac{4}{n}\right)^{\gamma+1-\gamma/n}\left(\dfrac{4\gamma}{n^2}\right)^{\gamma/n}\left(1-\dfrac{\gamma}{n^2}\right)^{-n-\gamma/n}\left(\dfrac{1-\sqrt{\gamma}/n}{1+\sqrt{\gamma}/n}\right)^{2\sqrt{\gamma}}} \leqslant$$

$$\leqslant \left[\frac{n}{4}\right]^{\gamma+1-\gamma/n}\left[1-\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right]^{n-1-\gamma(n-1)/n}\left(\frac{n^2}{4\gamma}\right)^{\gamma/n}\left(1-\frac{\gamma}{n^2}\right)^{n+\gamma/n}\left(\frac{1+\dfrac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1-\dfrac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}} \times$$

$$\times\left(\frac{2}{\sqrt{\gamma}}\right)^{1-\gamma/n}\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1-\gamma(n-1)/n}.$$

Звідси

$$P_n(\sqrt{n}) \leqslant \left[\frac{n}{4}\right]^{\sqrt{n}+1-1/\sqrt{n}}\left[1-\frac{1}{\sqrt[4]{n}}\right]^{n-1-(n-1)/\sqrt{n}}\left(\frac{n^{3/2}}{4}\right)^{1/\sqrt{n}}\left(1-\frac{1}{n^{3/2}}\right)^{n+1/\sqrt{n}} \times$$

$$\times\left(\frac{1+\dfrac{1}{n^{3/4}}}{1-\dfrac{1}{n^{3/4}}}\right)^{2n^{1/4}}\left(\frac{4}{n^{1/4}}\right)^{1-1/\sqrt{n}}\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1-(n-1)/\sqrt{n}}.$$

Дослідимо поведінку таких функцій на проміжку $x \in [547;\infty)$:

$$g(x) = \left[\frac{x}{4}\right]^{\sqrt{x}+1-1/\sqrt{x}}\left[1-\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right]^{x-1-(x-1)/\sqrt{x}},$$

$$f_1(x) = \left(\frac{x^{3/2}}{4}\right)^{1/\sqrt{x}}, \qquad f_2(x) = \left(1-\frac{1}{x^{3/2}}\right)^{x+1/\sqrt{x}}, \qquad f_3(x) = \left(\frac{1+\dfrac{1}{x^{3/4}}}{1-\dfrac{1}{x^{3/4}}}\right)^{2x^{1/4}},$$

$$f_4(x) = \left(\frac{4}{x^{1/4}}\right)^{1-1/\sqrt{x}}, \qquad f_5(x) = \left(\frac{x}{x-1}\right)^{x-1-(x-1)/\sqrt{x}}.$$

Функція $f_1(x)$ є монотонно спадною на проміжку $x \in [547;\infty)$, тому для $\forall n \geqslant 547$ виконується нерівність

$$\left(\frac{n^{3/2}}{4}\right)^{1/\sqrt{n}} \leqslant \left(\frac{547^{3/2}}{4}\right)^{1/\sqrt{547}} \leqslant 1{,}4121.$$

Для функції $f_2(x)$ на даному проміжку виконується нерівність

$$f_2(x) < 1.$$

Функції $f_3(x)$, $f_4(x)$ на проміжку $[547;+\infty)$ є монотонно спадними, а тому $\forall n \geqslant 547$ виконуються такі нерівності:

$$f_3(x) = \left(\frac{1+\dfrac{1}{n^{3/4}}}{1-\dfrac{1}{n^{3/4}}}\right)^{2n^{1/4}} \leqslant \left(\frac{1+\dfrac{1}{547^{3/4}}}{1-\dfrac{1}{547^{3/4}}}\right)^{2\cdot 547^{1/4}} \leqslant 1{,}18653.$$

$$f_4(x) = \left(\frac{4}{x^{1/4}}\right)^{1-1/x^{1/2}} \leqslant 0{,}83385.$$

Дослідимо функцію $f_5(x)$. Оскільки $\dfrac{x}{x-1} > 1$ для $\forall x \in [547; +\infty)$, то

$$f_5(x) = \left(\frac{x}{x-1}\right)^{x-1-(x-1)/x^{1/2}} \leqslant \left(\frac{x}{x-1}\right)^{x-1} = \left(1 + \frac{1}{x-1}\right)^{x-1}.$$

Функція $(1 + 1/(x-1))^{x-1}$ є монотонно зростаючою на проміжку $[547; +\infty)$, причому

$$\lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x-1}\right)^{x-1} = e,$$

тому для $\forall x \in [547; +\infty)$

$$f_5(x) < e.$$

Звідси робимо висновок, що для $\forall n \geqslant 547$

$$\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1-(n-1)/n^{1/2}} \leqslant e.$$

З урахуванням властивостей досліджених функцій $f_j(x)$, $j = \overline{1,5}$, будемо мати

$$P(\sqrt{n}) = g(n)\prod_{j=1}^{5} f_j(n) < g(n)\cdot 1{,}4121 \cdot 1 \cdot 1{,}18653 \cdot 0{,}83385 \cdot e < 3{,}7978 g(n).$$

Залишилося дослідити функцію $g(x)$. Узявши від даної функції логарифмічну похідну, отримаємо

$$(\ln(g(x)))' < 0,$$

а тому функція $g(x)$ є монотонно спадною для $x \geqslant 547$. Звідси

$$g(n) \leqslant g(547) \leqslant 0{,}26187.$$

Отримаємо, що $P(\sqrt{n}) \leqslant 3{,}7978 \cdot 0{,}26187 < 0{,}9946 < 1$.

Зауважимо також, що

для $n = 541$ $P(\sqrt{541}) = 0{,}99954 < 1,$

для $n = 542$ $P(\sqrt{542}) = 0{,}98446 < 1,$

для $n = 543$ $P(\sqrt{543}) = 0{,}96960 < 1,$

для $n = 544$ $P(\sqrt{544}) = 0{,}95495 < 1,$

для $n = 545$ $P(\sqrt{545}) = 0{,}94050 < 1,$

для $n = 546$ $P(\sqrt{546}) = 0{,}92624 < 1.$

Отже, для $n \geqslant 541$ при $\gamma = \sqrt{n}$ і $\alpha_0\sqrt{\gamma} > 2$ виконується нерівність

$$I_n(\gamma) = r^{\gamma}(B_0, 0)\prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leqslant r^{\gamma}(D_0, 0)\prod_{k=1}^{n} r(D_k, d_k) = I_n^0(\gamma)$$

для довільної конфігурації областей B_0, B_1, B_2, $\ldots$, B_n.

Звідси випливає, що екстремальною є конфігурація, записана в умові теореми. Для $\gamma = \sqrt{n}$ теорема доведена.

Нехай тепер $\gamma \in (1; \sqrt{n})$. Врахувавши, що

$$I_n(\gamma) \leqslant [2 \cdot 2^{n-1}\alpha_0(2-\alpha_0)^{n-1}(n-1)^{-(n-1)}]^{1-\gamma/n},$$

а функція

$$[2 \cdot 2^{n-1}\alpha_0(2-\alpha_0)^{n-1}(n-1)^{-(n-1)}]^{1-\gamma/n}$$

при фіксованому n монотонно зростає за γ на проміжку $(1; \sqrt{n}]$, отримаємо, що

$$I_n(\gamma) \leqslant I_n(\sqrt{n}).$$

Дослідимо монотонність функції

$$I_n^0(\gamma) = \left(\frac{4}{n}\right)^n \frac{\left(\dfrac{4\gamma}{n^2}\right)^{\gamma/n}}{\left(1-\dfrac{\gamma}{n^2}\right)^{n+\gamma/n}} \left(\frac{1-\dfrac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1+\dfrac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}},$$

$$(I_n^0(\gamma))' = I_n^0(\gamma)\left(\frac{1}{n}\ln\left(\frac{4\gamma}{n(n-\gamma)}\right) + \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\ln\left(\frac{n-\sqrt{\gamma}}{n+\sqrt{\gamma}}\right)\right).$$

Неважко переконатися, що обидва доданки в дужках останнього виразу є від'ємними при фіксованому n і $\gamma \in (1; \sqrt{n})$.

Звідси випливає, що

$$I_n^0(\gamma) \geqslant I_n^0(\sqrt{n}).$$

А звідси

$$P_n(\gamma) = \frac{I_n(\gamma)}{I_n^0(\gamma)} < \frac{I_n(\sqrt{n})}{I_n^0(\sqrt{n})} = P_n(\sqrt{n}) < 1,$$

тобто $I_n(\gamma) < I_n^0(\gamma)$.

Теорему доведено.

Автор висловлює вдячність О. К. Бахтіну за постановку задачі, а також за цінні поради та зауваження щодо написання цієї роботи.

Цитована література

1. *Лаврентьев М. А.* К теории конформных отображений // Тр. Физ.-мат. ин-та АН СССР. – 1934. – **5**. – С. 159–245.
2. *Голузин Г. М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. – Москва: Наука, 1966. – 628 с.
3. *Хейман В. К.* Многолистные функции. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1960. – 180 с.
4. *Дженкинс Дж.* А. Однолистные функции и конформные отображения. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1962. – 256 с.
5. *Колбина Л. И.* Конформное отображение единичного круга на неналегающие области // Вестн. Ленингр. ун-та. – 1955. – **5**. – С. 37–43.
6. *Кузьмина Г. В.* Задачи об экстремальном разбиении римановой сферы // Зап. научн. сем. ПОМИ. – 2001. – **276**. – С. 253–275.
7. *Дубинин В. Н.* Метод симметризации в геометрической теории функций комплексного переменного // Успехи мат. наук. – 1994. – **49**, № 1. – С. 3–76.
8. *Дубинин В. Н.* Разделяющее преобразование областей и задачи об экстремальном разбиении // Зап. научн. сем. ЛОМИ. – 1988. – **168**. – С. 48–66.
9. *Бахтин А. К., Бахтина Г. П., Зелинский Ю. Б.* Тополого-алгебраические структуры и геометрические методы в комплексном анализе. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2008. – 308 с. – (Праці Ін-ту математики НАН України; Т. 73).
10. *Бахтин А. К.* Неравенства для внутренних радиусов неналегающих областей и открытых множеств // Доп. НАН України. – 2006. – № 10. – С. 7–13.
11. *Бахтін О. К.* Нерівності для внутрішніх радіусів неперетинних областей та відкритих множин // Укр. мат. журн. – 2009. – **61**, № 5. – С. 596–610.
12. *Подвысоцкий Р. В.* Об одном неравенстве для внутренних радиусов неналегающих областей // Доп. НАН України. – 2009. – № 12. – С. 33–37.
13. *Ковалев Л. В.* О внутренних радиусах симметрических неналегающих областей // Изв. вузов. Математика. – 2000. – № 6. – С. 80–81.

References

1. *Lavrent'ev M. A.* Tr. Fiz.-mat. inst. AN SSSR, 1934, **5**: 195–245 (in Russian).
2. *Goluzin G. M.* Geometric Theory of Functions of a Complex Variable, Translations of Mathematical Monographs, No 26, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1969.
3. *Hayman W. K.* Multivalent functions, Moscow: Izd-vo Inostr. lit., 1960 (in Russian).
4. *Jenkins J. A.* Univalent functions and conformal mapping, Ergeb. Math. Grenzgeb. Neue Folge, Vol. 18, Reihe: Moderne Funktiontheorie, Springer-Verlag, 1958.
5. *Kolbina L. I.* Vestnik Leningr. univ., 1955, **5**: 37–43 (in Russian).
6. *Kuzmina G. V.* Zap. Nauchn. Semin. POMI, 2001, **276**: 253–275 (in Russian).
7. *Dubinin V. N.* Uspekhi mat. nauk., 1994, **49**, No 1: 3–76 (in Russian); translation in Russian Math. Surveys, 1994, **49**, No 1: 1–79.
8. *Dubinin V. N.* Zap. Nauchn. Semin. Leningr. Otd. Mat. Inst. Steklov (LOMI), 1988, **168**: 48–66 (in Russian); translation in J. Soviet Math., 1991, **53**, No 3: 252–263.
9. *Bakhtin A. K., Bakhtina G. P., Zelinskii Yu. B.* Topological-algebraic structures and geometric methods in complex analysis, Proc. of the Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine, Kiev, 2008 (in Russian).
10. *Bakhtin A. K.* Dop. NAN Ukraine, 2006, No 10: 7–13 (in Russian).
11. *Bakhtin A. K.* Ukr. Mat. Zh., 2009, **61**, No 5: 596–610 (in Ukrainian).
12. *Podvisotskiy R. V.* Dop. NAN Ukraine, 2009, No 12: 33–37 (in Russian).
13. *Kovalev L. V.* Russian Math. (Iz. VUZ), 2000, **44**: 77–78 (in Russian).

Надійшло до редакції 28.07.2015

Я. В. Заболотный

Институт математики НАН Украины, Киев

E-mail: yaroslavzabolotnii@mail.ru

Нахождение максимума произведения внутренних радиусов неналегающих областей

Рассмотрена известная проблема В. Н. Дубинина о неналегающих областях на комплексной плоскости и найдено ее решение при $\gamma \leqslant \sqrt{n}$.

Ключевые слова: внутренний радиус, неналегающие области, квадратичный дифференциал.

Ja. V. Zabolotnij

Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine, Kiev

E-mail: yaroslavzabolotnii@mail.ru

Determination of the maximum of a product of inner radii of pairwise nonoverlapping domains

Dubinin's problem on nonoverlapping domains in the complex plane is considered, and its solution for $\gamma \leqslant \sqrt{n}$ *is obtained.*

Keywords: inner radius, nonoverlapping domains, quadratic differential.