



УДК 539.3

<http://dx.doi.org/10.15407/dopovidi2016.02.038>

**А. М. Багно**

Институт механики им. С. П. Тимошенко НАН Украины, Киев

*E-mail:* desc@inmech.kiev.ua

## О локализации квазилэмбовских волн в системе слоев идеальной жидкости — упругий слой

*(Представлено академиком НАН Украины А. Н. Гузем)*

*На основании трехмерных линейных уравнений классической теории упругости для твердого тела и линеаризованных уравнений Эйлера для жидкой среды исследовано распространение квазилэмбовских волн в системе слоев идеальной сжимаемой жидкости — упругий слой. Построены дисперсионные кривые для нормальных волн в широком диапазоне частот. Проанализировано влияние толщины слоя жидкости на дисперсию фазовых скоростей квазилэмбовских мод в гидроупругом волноводе. Исследованы локализационные свойства низших квазилэмбовских мод в упруго-жидкостных волноводах.*

**Ключевые слова:** дисперсия волн, упругий слой, слой идеальной сжимаемой жидкости, локализация квазилэмбовских мод.

Волны, распространяющиеся вдоль границы контакта упругого слоя и жидкого слоя, относятся к числу обобщений основательно исследованных основных типов акустических волн Рэлея, Стоунли, Лява и Лэмба. Обзор работ и анализ результатов, полученных в рамках классической теории упругости и модели идеальной сжимаемой жидкости [1–3], а также с привлечением более общих моделей твердых и жидких сред [4, 5], приведены в [1–5]. В частности, в обзорной работе [4] проанализированы теоретические методы, применяемые для изучения волн Лэмба в анизотропных пластинах. Рассмотренные задачи и результаты, полученные с учетом в телах начальных напряжений и вязкости жидкости, приведены в обзоре [5]. Статья [3] посвящена исследованию локализации поверхностных волн в системе упругий слой на жидком полупространстве. При этом проанализировано поведение волн Рэлея, Стоунли и трех высших мод в высокочастотной части спектра. Численно определены величины фазовых скоростей поверхностных волн и трех первых мод высокого порядка при

больших значениях волнового числа. Показано, что эффекты упруго-жидкостного взаимодействия и их влияние на фазовые скорости существенно зависят от механических свойств жидкости и упругого материала. Вместе с тем, значительное практическое использование акустических волн ставит задачу изучения дисперсионных свойств мод Лэмба в гидроупругом волноводе, состоящем из упругого и жидкого слоев, в широком диапазоне частот, охватывающем как длинноволновую, так и коротковолновую части спектра для толщин упругого и жидкого слоев соизмеримых с длиной волны. В настоящей работе для анализа дисперсионных характеристик мод Лэмба в системе слой жидкости — упругий слой в широком интервале частот используются трехмерные линеаризованные уравнения Эйлера для жидкости и линейные уравнения классической теории упругости для твердого тела. При этом предполагается, что жидкость находится в состоянии покоя. В качестве подхода выбраны постановки задач и метод, основанные на применении представлений общих решений уравнений движения идеальной сжимаемой жидкости и упругого тела, полученные в работах [6–10].

**Постановка задачи.** Рассмотрим задачу о распространении акустических волн в гидроупругой системе, состоящей из слоя идеальной сжимаемой жидкости и упругого слоя. Решение получим с привлечением трехмерных линейных уравнений классической теории упругости для твердого тела и линеаризованных уравнений Эйлера для жидкости, находящейся в состоянии покоя. В рамках принятых моделей основные соотношения для системы изотропное упругое тело — идеальная сжимаемая жидкость будут иметь вид [6–10]

$$\mu \Delta \vec{u} + (\lambda + \mu) \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) - \rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = 0, \quad \sigma_{ij} = \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial u_j} + \frac{\partial u_j}{\partial u_i} \right) + \lambda \delta_{ij} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}); \quad (1)$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \vec{\nabla} p = 0, \quad \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho^*}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial \rho^*} = a_0^2, \quad p_{ij} = -p \delta_{ij}, \quad a_0 = \text{const}. \quad (2)$$

Здесь введены следующие обозначения:  $u_i$  — компоненты вектора перемещений упругого тела;  $\rho$  — плотность материала упругого слоя;  $\lambda$  и  $\mu$  — константы Ляме материала твердого тела;  $v_i$  — составляющие вектора возмущений скорости жидкости;  $\rho^*$  и  $p$  — возмущения плотности и давления в жидкости;  $\rho_0$  и  $a_0$  — плотность и скорость звука в жидкости в состоянии покоя;  $p_{ij}$  и  $\sigma_{ij}$  — составляющие напряжений соответственно в жидкости и упругом теле.

Равенства (1) описывают поведение упругого тела. Малые колебания идеальной сжимаемой жидкости, находящейся в состоянии покоя, описывают соотношения (2).

Далее предположим, что упругий слой занимает объем:  $-\infty < z_1 < \infty$ ,  $-h_2 \leq z_2 \leq 0$ ,  $-\infty < z_3 < \infty$  и контактирует со слоем идеальной сжимаемой жидкости, заполняющей объем:  $-\infty < z_1 < \infty$ ,  $0 \leq z_2 \leq h_1$ ,  $-\infty < z_3 < \infty$ . Будем считать, что внешние силы, действующие на указанные среды, распределены равномерно вдоль оси  $oz_3$ . Поскольку в этом случае волна, бегущая в направлении оси  $oz_1$ , и возмущения, ее вызывающие, не зависят от переменной  $z_3$ , то задача будет плоской и можно ограничиться изучением процесса распространения волн в плоскости  $oz_1z_2$ . Следовательно, указанная задача сводится к решению системы уравнений (1)–(2) при следующих граничных условиях:

$$\sigma_{21} \Big|_{z_2=0} = 0, \quad \sigma_{22} \Big|_{z_2=0} = p_{22} \Big|_{z_2=0}, \quad v_2 \Big|_{z_2=0} = \frac{\partial u_2}{\partial t} \Big|_{z_2=0}; \quad (3)$$

$$\sigma_{21} \Big|_{z_2=-h_2} = 0, \quad \sigma_{22} \Big|_{z_2=-h_2} = 0, \quad p_{22} \Big|_{z_2=h_1} = 0. \quad (4)$$

В дальнейшем для решения задачи гидроупругости воспользуемся представлениями общих решений для упругих тел и идеальной сжимаемой жидкости, предложенными в работах [6–10]

$$\begin{aligned} u_1 &= -\frac{\partial^2 \chi_1}{\partial z_1 \partial z_2}, & u_2 &= \left( \frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\mu}{\lambda + \mu} \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} - \frac{\rho}{\lambda + \mu} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \chi_1, \\ v_1 &= \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial z_1 \partial t}, & v_2 &= \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial z_2 \partial t}, \end{aligned} \quad (5)$$

где введенные потенциалы  $\chi_j$  являются решениями следующих уравнений:

$$\begin{aligned} &\left[ \left( \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} - \frac{\rho}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\lambda + 2\mu}{\mu} \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} - \frac{\rho}{\mu} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{(\lambda + \mu)^2}{\mu(\lambda + 2\mu)} \frac{\partial^4}{\partial z_1^2 \partial z_2^2} \right] \chi_1 = 0, \\ &\left[ \left( \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} \right) - \frac{1}{a_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \chi_2 = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Для анализа распространения возмущений, гармонически изменяющихся во времени, решения системы уравнений разыскиваются в классе бегущих волн

$$\chi_j = X_j(z_2) \exp[i(kz_1 - \omega t)], \quad j = \overline{1, 2}, \quad (7)$$

где  $k$  — волновое число;  $\omega$  — круговая частота.

Заметим, что выбранный в данной работе класс гармонических волн, являясь наиболее простым и удобным в теоретических исследованиях, не ограничивает общности полученных результатов, поскольку линейная волна произвольной формы, как известно, может быть представлена набором гармонических составляющих. Далее решаются две задачи Штурма–Лиувилля на собственные значения для уравнений движения упругого тела и жидкости, а также находятся соответствующие собственные функции. После подстановки решений в граничные условия (3) и (4) получаем однородную систему линейных алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных. Исходя из условия существования нетривиального решения, приравнявая определитель системы к нулю, получаем дисперсионное уравнение

$$\det \left\| e_{mn} \left( c, \lambda, \mu, \rho, \rho_0, a_0, \frac{\omega h_1}{c_s}, \frac{\omega h_2}{c_s} \right) \right\| = 0, \quad m, n = \overline{1, 6}, \quad (8)$$

где  $c$  — фазовая скорость мод в гидроупругой системе;  $h_1$  — толщина слоя жидкости;  $h_2$  — толщина упругого слоя;  $c_s$  ( $c_s^2 = \mu/\rho$ ) — скорость волны сдвига в материале упругого тела.

Как известно, в неограниченных и полуограниченных телах распространяющиеся волны являются бездисперсионными. Особенностью рассматриваемой упруго-жидкостной системы является наличие не только границы контакта тел, но и двух свободных поверхностей. Это приводит к возникновению в исследуемой гидроупругой композиции довольно сложного волнового поля. Обусловлено это взаимодействием на этих граничных поверхностях трех волн: продольной и поперечной в сжимаемом упругом слое, а также продольной в идеальном

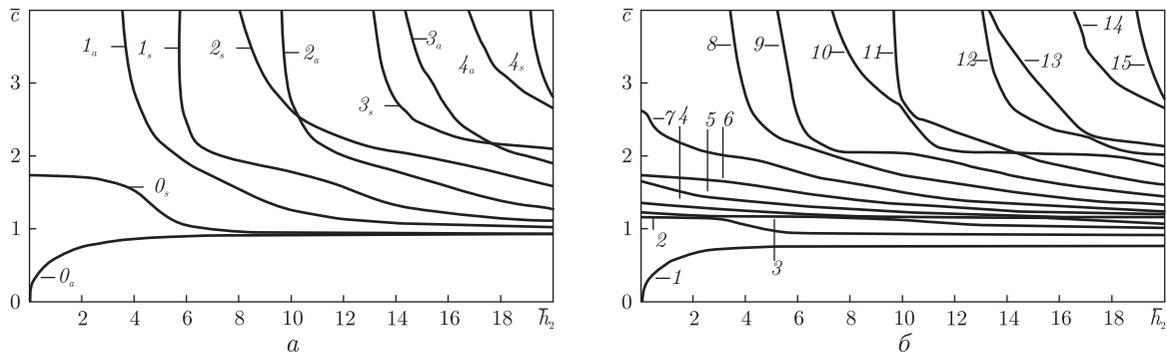


Рис. 1

сжимаемом жидком слое. Возникающие при этом моды распространяются с дисперсией. Их фазовые скорости весьма сложным образом зависят от частоты.

Заметим, что полученное дисперсионное уравнение (8) является наиболее общим и из него можно получить соотношения для ряда частных случаев, которые рассмотрены в работах [1, 2, 5]. В частности, если  $a_0$  устремить к бесконечности, то (8) переходит в уравнение для определения параметров мод в случае взаимодействия с идеальной несжимаемой жидкостью. При  $\rho_0 = 0$  равенство (8) перейдет в уравнение для определения скоростей волн Лэмба [1, 2]. Если дополнительно устремить  $h_2$  к бесконечности, получим соотношение для определения скоростей поверхностных волн Рэлея [1, 2]. При  $\rho_0 \neq 0$  и  $h_1 \rightarrow \infty$  равенство перейдет в уравнение Стоунли [1, 2].

**Числовые результаты и их анализ.** В дальнейшем дисперсионное уравнение (8) решали численно. При этом расчеты проводили для двух гидроупругих систем. Первая состояла из органического стекла и воды. Она характеризовалась следующими параметрами: упругий слой —  $\rho = 1160 \text{ кг/м}^3$ ,  $\lambda = 3,96 \cdot 10^9 \text{ Па}$ ,  $\mu = 1,86 \cdot 10^9 \text{ Па}$ ; слой жидкости —  $\rho_0 = 1000 \text{ кг/м}^3$ ,  $a_0 = 1459,5 \text{ м/с}$ ,  $\bar{a}_0 = a_0/c_s = 1,152595$ . Вторая представляла собой волновод из стали марки 09Г2С и воды. При этом параметры выбирали такими: упругий слой —  $\rho = 7800 \text{ кг/м}^3$ ,  $\lambda = 9,26 \cdot 10^{10}$ ,  $\mu = 7,75 \cdot 10^{10} \text{ Па}$ ; слой жидкости —  $\rho_0 = 1000 \text{ кг/м}^3$ ,  $a_0 = 1459,5 \text{ м/с}$ ,  $\bar{a}_0 = a_0/c_s = 0,463021$ . Результаты вычислений представлены на рис. 1–3.

На рис. 1 приведены результаты численных расчетов для упруго-жидкостной системы, состоящей из органического стекла и воды.

На рис. 1, а для упругого слоя, не взаимодействующего с жидкостью, приведены зависимости безразмерных величин фазовых скоростей нормальных волн Лэмба  $\bar{c}$  ( $\bar{c} = c/c_s$ ) от безразмерной величины толщины упругого слоя (частоты)  $\bar{h}_2$  ( $\bar{h}_2 = \omega h_2/c_s$ ). Номера  $n_a$  обозначены антисимметричные моды, а  $n_s$  — соответственно симметричные моды. На рис. 1, б изображены дисперсионные кривые для гидроупругого волновода, отражающие зависимости безразмерных величин фазовых скоростей квазилэмбовских мод  $\bar{c}$  от безразмерной величины толщины упругого слоя (частоты)  $\bar{h}_2$  для толстого жидкого слоя с толщиной  $\bar{h}_1$ , равной 20 ( $\bar{h}_1 = \omega h_1/c_s = 20$ ).

Из графиков, представленных на рис. 1, а, следует, что скорость нулевой антисимметричной моды Лэмба при росте частоты или толщины упругого слоя стремится к скорости волны Рэлея  $\bar{c}_R$  ( $\bar{c}_R = c_R/c_s = 0,93356$ ) снизу, а скорость нулевой симметричной моды стремится к скорости волны Рэлея  $\bar{c}_R$  ( $\bar{c}_R = 0,93356$ ) сверху. Скорости всех мод Лэмба высокого порядка при увеличении частоты или толщины упругого слоя стремятся к скорости волны сдвига в материале упругого тела [1, 4, 7, 8].

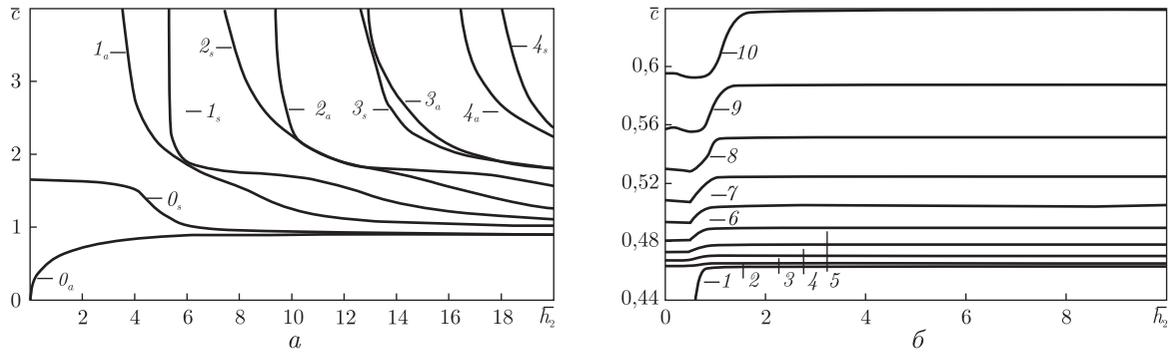


Рис. 2

Графики для гидроупругой системы, приведенные на рис. 1, б, показывают, что при росте частоты (толщины упругого слоя)  $\bar{h}_2$  скорость первой моды стремится к скорости волны Стоунли  $\bar{c}_{st}$  ( $\bar{c}_{st} = c_{st}/c_s = 0,77171$ ) снизу, а скорость второй моды — к скорости волны Рэля  $\bar{c}_R$  ( $\bar{c}_R = 0,93356$ ) сверху. При этом квазиповерхностная мода 1 при выбранных механических параметрах системы  $\bar{a}_0 = 1,152595 > \bar{c}_R = 0,93356$ , распространяясь вдоль границы контакта сред, локализуется преимущественно в приповерхностной области твердого тела [11], а квазирэлеевская мода 2 распространяется вдоль свободной поверхности упругого слоя. Моды более высокого порядка распространяются в упругом слое в его толще с фазовыми скоростями, стремящимися с ростом частоты к скорости волны сдвига в материале упругого тела. Отметим, что наличие жидкости приводит к увеличению числа нормальных волн в гидроупругой системе. При этом возникающие низшие моды 1–7 имеют нулевые частоты запертия.

Графический материал, полученный в результате численных вычислений для системы сталь — вода, представлен на рис. 2, а–3, б.

На рис. 2, а для упругого слоя, не взаимодействующего с жидкостью, приведены зависимости безразмерных величин фазовых скоростей нормальных волн Лэмба  $\bar{c}$  от безразмерной величины толщины упругого слоя (частоты)  $\bar{h}_2$ . Номерами  $n_a$  обозначены антисимметричные моды, а  $n_s$  — соответственно симметричные моды.

На рис. 2, б–3, б приведены дисперсионные кривые для гидроупругого волновода, отражающие зависимости безразмерных величин фазовых скоростей мод  $\bar{c}$  от безразмерной величины толщины упругого слоя (частоты)  $\bar{h}_2$  для толстого жидкого слоя с толщиной, равной  $\bar{h}_1 = 20$ . При этом на рис. 2, б приведены дисперсионные кривые для первых 10 мод. Поведение мод 11–14 отражают графики на рис. 3, а. Дисперсионные кривые для мод с 15 по 24 изображены на рис. 3, б.

Из графиков, представленных на рис. 2, а, следует, что скорость нулевой антисимметричной моды Лэмба при росте частоты или толщины упругого слоя стремится к скорости волны Рэля  $\bar{c}_R$  ( $\bar{c}_R = 0,923008$ ) снизу, а скорость нулевой симметричной моды — к скорости волны Рэля  $\bar{c}_R$  ( $\bar{c}_R = 0,923008$ ) сверху. Скорости всех мод Лэмба высокого порядка при увеличении частоты или толщины упругого слоя стремятся к скорости волны сдвига в материале упругого тела [1, 4, 7, 8].

Графический материал для гидроупругой системы, приведенный на рис. 2, б, показывает, что при росте частоты (толщины упругого слоя)  $\bar{h}_2$  скорость первой моды стремится снизу к скорости волны Стоунли  $\bar{c}_{st}$  ( $\bar{c}_{st} = 0,463006$ ), которая несколько меньше скорости волны звука в жидкой среде  $\bar{a}_0$  ( $\bar{a}_0 = 0,463021$ ). Величины фазовых скоростей мод

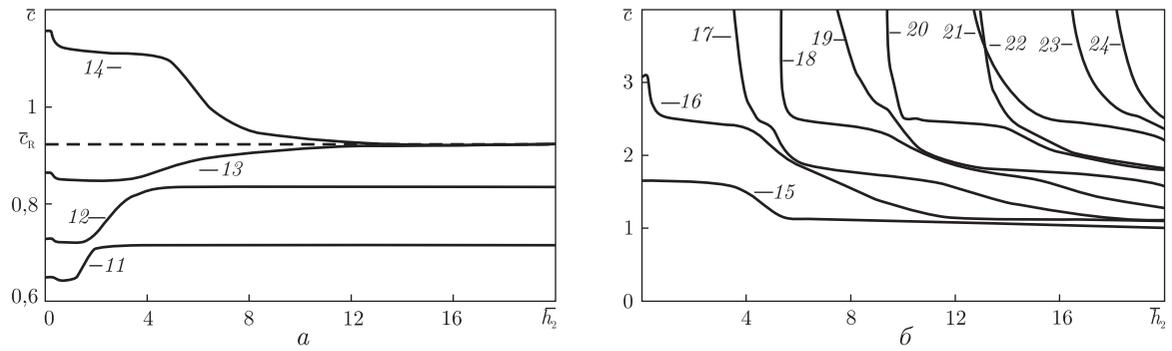


Рис. 3

2–10 стремятся к скоростям волн, величины которых больше скорости звуковой волны в жидкости  $\bar{a}_0$  ( $\bar{a}_0 = 0,463021$ ), но меньше величины скорости квазирэлеевской волны  $\bar{c}_R$  ( $\bar{c}_R = 0,923008$ ). Характерной особенностью дисперсионных кривых этих нормальных волн является наличие у них нулевых частот запираения. Кроме того, по мере уменьшения длины волны и удаления от частот зарождения они становятся практически бездисперсионными.

Из графиков рис. 3, *а* следует, что скорость моды 13 с увеличением частоты стремится к скорости волны Рэлея  $\bar{c}_R$  ( $\bar{c}_R = 0,923008$ ) снизу, а фазовая скорость моды 14 — к скорости волны Рэлея  $\bar{c}_R$  сверху. Фазовые скорости всех последующих мод высокого порядка с возрастанием частоты стремятся к скорости волны сдвига в материале упругого тела.

**Локализационные свойства низших мод в гидроупругих волноводах.** Графики, приведенные на рис. 1, *б* для упруго-жидкостной системы органическое стекло–вода, показывают, что в гидроупругом волноводе при росте частоты (толщины упругого слоя)  $\bar{h}_2$  скорость первой моды 1, распространяющейся вдоль границы контакта сред, стремится к скорости волны Стоунли  $\bar{c}_{st}$  ( $\bar{c}_{st} = 0,77171$ ). Относительно поведения этой моды в высокочастотной части спектра необходимо отметить следующее. Как показано в работе [11], фазовая скорость и структура волны Стоунли при взаимодействии твердого и жидкого полупространств зависят от механических параметров гидроупругой системы и определяются соотношением между скоростью волны звука в жидкости и скоростью волны Рэлея в твердом полупространстве. В рассматриваемом случае механические параметры гидроупругой системы органическое стекло — вода таковы, что скорость распространения звуковой волны в жидкости  $\bar{a}_0$  ( $\bar{a}_0 = 1,152595$ ) больше скорости квазирэлеевской волны  $\bar{c}_R$  ( $\bar{c}_R = 0,93356$ ). Согласно [11], это приводит к тому, что в высокочастотной части спектра глубина проникновения квазиповерхностной моды 1, являющейся волной типа Стоунли, в упругое тело больше глубины проникновения в жидкость. Поэтому мода 1, распространяясь вдоль границы контакта сред, локализуется преимущественно в приповерхностной области упругого слоя. Скорость моды 2, распространяющейся в упругом слое вдоль его свободной границы, стремится к скорости волны Рэлея  $\bar{c}_R$  ( $\bar{c}_R = 0,93356$ ) сверху. Скорости всех мод высокого порядка стремятся к скорости волны сдвига в материале твердого тела  $\bar{c}_s$ . При этом с ростом частоты в них преобладают поперечные смещения, амплитуда которых на поверхностях слоя стремится к нулю по сравнению с их амплитудами в толще слоя, т. е. движения в модах высокого порядка смещаются от поверхности внутрь слоя и локализуются в его толще [1].

Таким образом, анализ показывает, что в данной упруго-жидкостной системе низшие моды проникают в твердое тело и также, как и моды более высокого порядка, распростра-

няются в упругом слое. При этом упругий слой является определяющим в формировании волнового поля и основным волноводом, по которому распространяются волновые возмущения и осуществляется перенос большей части энергии волн.

Графики, приведенные на рис. 2, б–3, б для упруго-жидкостной системы сталь — вода, показывают, что в гидроупругом волноводе при росте частоты (толщины упругого слоя)  $\bar{h}_2$  скорость моды 1, распространяющейся вдоль границы контакта сред, стремится к скорости волны Стоунли  $\bar{c}_{st}$  ( $\bar{c}_{st} = 0,463006$ ) снизу. При этом в рассматриваемом случае механические параметры гидроупругой системы сталь — вода таковы, что скорость распространения волны звука в жидкости  $\bar{a}_0$  ( $\bar{a}_0 = 0,463021$ ) меньше скорости квазирэлеевской волны  $\bar{c}_R$  ( $\bar{c}_R = 0,923008$ ). В связи с этим согласно результатам, полученным в работе [11] для волн Стоунли, в высокочастотной части спектра глубина проникновения квазиповерхностной моды 1 в жидкость значительно больше глубины проникновения в упругое тело. Поэтому мода 1, распространяясь вдоль границы контакта сред, локализуется преимущественно в приповерхностной области жидкого слоя. Это также относится и к модам со 2 по 12, которые также распространяются в жидкости. Вследствие того, что ни одна из низших мод не проникает в твердое тело поверхность упругого слоя, граничащая с жидкостью, остается свободной. Эту область занимает мода 13. Скорость этой моды, распространяющейся вдоль границы контакта сред в приповерхностной области упругого слоя, стремится к скорости волны Рэлея  $\bar{c}_R$  ( $\bar{c}_R = 0,923008$ ) снизу, как и в случае твердого слоя, невзаимодействующего с жидкостью. Скорость моды 14, распространяющейся в упругом слое вдоль его свободной границы, стремится к скорости волны Рэлея  $\bar{c}_R$  ( $\bar{c}_R = 0,923008$ ) сверху. Скорости всех мод более высокого порядка стремятся к скорости волны сдвига в материале твердого тела и, как указывалось выше, их движения локализуются в толще упругого слоя.

Таким образом, анализ показывает, что в данной упруго-жидкостной системе не только мода 1, но и ряд низших мод, возникших в результате взаимодействия с жидкостью, не проникают в твердое тело и распространяются вдоль границы контакта сред преимущественно в приповерхностной области жидкости. Все остальные моды более высокого порядка распространяются в упругом слое в его толще. Скорости их с возрастанием частоты стремятся к скорости волны сдвига в материале твердого тела. В этом случае волноводами для распространения нормальных волн и переноса волновой энергии служат как упругий, так и жидкий слои.

В заключение отметим, что наличие жидкого слоя приводит к появлению новых нормальных квазилэмбовских волн. Возникающие моды имеют нулевые частоты запираания. Воздействие жидкости проявляется в изменении критических частот и конфигурации дисперсионных кривых, а также в смещении их в длинноволновую часть спектра. Жидкость не оказывает влияния на распределение мод среди сред. Локализация низших мод в системе слой жидкости — упругий слой зависит от механических параметров гидроупругой системы. Основным критерием распределения низших нормальных волн в средах является соотношение между величинами скоростей волны звука в слое жидкости и квазирэлеевской волны, распространяющейся вдоль свободной поверхности упругого слоя.

## Цитированная литература

1. *Викторов И. А.* Звуковые поверхностные волны в твердых телах. — Москва: Наука, 1981. — 288 с.
2. *Белянкова Т. И., Калинин В. В.* К проблеме анализа динамических свойств слоистого полупространства // Акуст. журн. — 2014. — 60, № 5. — С. 492–504.

3. *Grinchenko V. T., Komissarova G. L.* Поверхностные волны в системе: упругий слой на жидком полупространстве // Акуст. вісн. – 2005. – **8**, № 4. – С. 38–45.
4. *Кузнецов С. В.* Волны Лэмба в анизотропных пластинах (обзор) // Акуст. журн. – 2014. – **60**, № 1. – С. 90–100.
5. *Bagno A. M., Guz A. N.* Elastic waves in pre-stressed bodies interacting with a fluid (survey) // Int. Appl. Mech. – 1997. – **33**, No 6. – P. 435–463.
6. *Guz A. N.* Aerohydroelasticity problems for bodies with initial stresses // Int. Appl. Mech. – 1980. – **16**, No 3. – P. 175–190.
7. *Гузъ А. Н.* Упругие волны в телах с начальными напряжениями. В 2 – х томах. – Киев: Наук. думка, 1986.
8. *Гузъ А. Н.* Упругие волны в телах с начальными (остаточными) напряжениями. – Киев: А. С. К., 2004. – 672 с.
9. *Гузъ А. Н.* Динамика сжимаемой вязкой жидкости. – Киев: А. С. К., 1998. – 350 с.
10. *Guz A. N.* Dynamics of compressible viscous fluid. – Cambridge: Cambridge Scientific Publishers, 2009. – 428 p.
11. *Волькенштейн М. М., Левин В. М.* Структура волны Стоунли на границе вязкой жидкости и твердого тела // Акуст. журн. – 1988. – **34**, № 4. – С. 608–615.

## References

1. *Viktorov I. A.* Sound surface waves in solids, Moscow: Nauka, 1981 (in Russian).
2. *Belyankova T. I., Kalinchuk V. V.* Acoustic J., 2014, **60**, No 5: 492–504 (in Russian).
3. *Grinchenko V. T., Komissarova G. L.* Acoustic bulletin, 2005, **8**, No 4: 38–45 (in Russian).
4. *Kuznetsov S. V.* Acoustic J., 2014, **60**, No 1: 90–100 (in Russian).
5. *Bagno A. M., Guz A. N.* Int. Appl. Mech., 1997, **33**, No 6: 435–463.
6. *Guz A. N.* Int. Appl. Mech., 1980, **16**, No 3: 175–190.
7. *Guz A. N.* Elastic waves in bodies with initial stresses. In 2 vols., Kiev: Nauk. Dumka, 1986 (in Russian).
8. *Guz A. N.* Elastic waves in bodies with initial (residual) stresses, Kiev: A.C.K., 2004 (in Russian).
9. *Guz A. N.* Dynamics of compressible viscous fluid, Kiev: A.C.K., 1998 (in Russian).
10. *Guz A. N.* Dynamics of compressible viscous fluid, Cambridge: Cambridge Scientific Publishers, 2009.
11. *Volkenstein M. M., Levin V. M.* Acoustic J., 1988, **34**, No 4: 608–615 (in Russian).

*Поступило в редакцию 03.09.2015*

**О. М. Багно**

Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України, Київ

*E-mail:* desc@inmech.kiev.ua

## Про локалізацію квазілембовських хвиль у системі шар ідеальної рідини — пружний шар

*На основі тривимірних лінійних рівнянь класичної теорії пружності для твердого тіла та лінеаризованих рівнянь Ейлера для рідкого середовища досліджено поширення квазілембовських хвиль у системі шар ідеальної стисливої рідини — пружний шар. Побудовано дисперсійні криві для нормальних хвиль у широкому діапазоні частот. Проаналізовано вплив товщини шару рідини на дисперсію фазових швидкостей квазілембовських мод у гідропружному хвилеводі. Досліджено локалізаційні властивості нижчих квазілембовських мод у пружно-рідинних хвилеводах.*

**Ключові слова:** дисперсія хвиль, пружний шар, шар ідеальної стисливої рідини, локалізація квазілембовських мод.

O. M. Bahno

S. P. Timoshenko Institute of Mechanics of the NAS of Ukraine, Kiev

*E-mail:* desc@inmech.kiev.ua

## **On the localization of quasi-Lamb waves in the layer of ideal fluid — elastic layer system**

*Basing on the three-dimensional linear equations of the classical theory of elasticity for a solid and the linearized Euler equations for a fluid, the propagation of quasi-Lamb waves in the layer of ideal compressible fluid — elastic layer system is studied. For the normal waves, the dispersion curves are constructed in a wide range of frequencies. The effect of thickness of the fluid layer on the dispersion of phase velocities of quasi-Lamb modes in a hydroelastic waveguide is analyzed. The localization properties of the lower quasi-Lamb modes in elastic-fluid waveguides are studied.*

**Keywords:** dispersion of waves, elastic layer, layer of ideal compressible fluid, localization, quasi-Lamb modes.