УДК 517.5 http://dx.doi.org/10.15407/dopovidi2016.02.013

А. С. Ефимушкин[1], **В. И. Рязанов**[2]

[1]Институт математики НАН Украины, Киев
[2]Институт прикладной математики и механики НАН Украины, Славянск
E-mail: a.yefimushkin@gmail.com

О задаче Римана–Гильберта для аналитических функций в круговых областях

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины В. Я. Гутлянским)

Доказано существование однозначных аналитических решений в единичном круге и многозначных аналитических решений в областях, ограниченных конечным числом окружностей, задачи Римана–Гильберта с коэффициентами счетно-ограниченной вариации и граничными данными, измеримыми относительно логарифмической емкости. Показано, что пространства решений имеют бесконечную размерность.

Ключевые слова: задача Римана–Гильберта, аналитические функции, круговые области.

Краевые задачи для аналитических функций f восходят к знаменитой диссертации Б. Римана (1851), а также известным работам Д. Гильберта (1904, 1912, 1924) и А. Пуанкаре (1910) (см. также историю вопроса в [1, 2]).

В 1904 г. Д. Гильберт сформулировал следующую задачу, которую принято называть проблемой Гильберта или *проблемой Римана–Гильберта.* Она состояла в доказательстве существования и нахождении аналитической функции f в области $D \subset \mathbb{C}$, ограниченной спрямляемой жордановой кривой K с условием

$$\lim_{z\to\zeta} \operatorname{Re} \overline{\lambda(\zeta)} \cdot f(z) = \varphi(\zeta) \qquad \forall \zeta \in K, \tag{1}$$

где им предполагалось, что функции λ и φ непрерывно дифференцируемы относительно натурального параметра длины на кривой K и что $|\lambda| \neq 0$ на K. Поэтому можно считать, что $|\lambda(\zeta)| \equiv 1$.

1. Определения и предварительные замечания. Определение и основные свойства логарифмической емкости приведены в хорошо известных работах [3–6], а также в [2].

Напомним (см. [7]), что область D в $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \bigcup \{\infty\}$ именуется *круговой*, если ее граница состоит из конечного числа взаимно непересекающихся окружностей и точек. Если граница этой области состоит только из окружностей, то называем эту область *невырожденной*.

Пусть $\mathbb{D}_*$ — ограниченная невырожденная круговая область в $\mathbb{C}$. Мы называем $\lambda\colon \partial\mathbb{D}_* \to \mathbb{C}$ *функцией ограниченной вариации* на открытой дуге $\gamma \subset \partial\mathbb{D}_*$, пишем $\lambda \in \mathcal{BV}(\gamma)$, если

$$V_\lambda(\gamma) := \sup \sum_{j=0}^{k-1} |\lambda(\zeta_{j+1}) - \lambda(\zeta_j)| < \infty, \tag{2}$$

где супремум берется по всем конечным наборам точек $\zeta_j \in \gamma$, $j = 0, 1, \ldots, k$, таким, что ζ_j лежит между ζ_{j+1} и ζ_{j-1} для каждого $j = 1, \ldots, k-1$.

Мы также называем λ *функцией счетно-ограниченной вариации*, пишем $\lambda \in \mathcal{CBV}(\partial\mathbb{D}_*)$, если найдется счетное число попарно непересекающихся открытых дуг $\gamma_n \subset \partial\mathbb{D}_*$, на которых она является функцией ограниченной вариации, а множество $\partial\mathbb{D}_* \setminus \bigcup \gamma_n$ счетно.

Рассуждая, как в случае класса $\mathcal{BV}(\partial\mathbb{D})$, где $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| < 1\}$, полностью аналогично доказательству предложения 5.1 в нашей работе [2], получаем его аналог.

Предложение 1. *Для любой функции $\lambda \colon \partial\mathbb{D}_* \to \partial\mathbb{D}$ класса $\mathcal{CBV}(\partial\mathbb{D}_*)$ найдется функция $\alpha_\lambda \colon \partial\mathbb{D}_* \to (-\pi, \pi]$ класса $\mathcal{CBV}(\partial\mathbb{D}_*)$ такая, что $\lambda(\zeta) = \exp\{i\alpha_\lambda(\zeta)\}$, $\zeta \in \partial\mathbb{D}_*$.*

В дальнейшем мы называем функцию α_λ *функцией аргумента* λ.

По теореме 1 в [8], рассуждая аналогично секции 5 в [2], получаем также аналог теоремы 5.1.

Лемма 1. *Пусть $\alpha \colon \partial\mathbb{D} \to \mathbb{R}$ — ограниченная функция класса $\mathcal{CBV}(\partial\mathbb{D})$ и пусть $f \colon \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ — аналитическая функция такая, что*

$$\lim_{z\to\zeta} \operatorname{Re} f(z) = \alpha(\zeta) \qquad \text{для п. в.} \qquad \zeta \in \partial\mathbb{D} \tag{3}$$

относительно логарифмической емкости вдоль любых некасательных путей. Тогда

$$\lim_{z\to\zeta} \operatorname{Im} f(z) = \beta(\zeta) \qquad \text{для п. в.} \qquad \zeta \in \partial\mathbb{D} \tag{4}$$

относительно логарифмической емкости вдоль любых некасательных путей, где $\beta \colon \partial\mathbb{D} \to \mathbb{R}$ — некоторая функция, измеримая относительно логарифмической емкости.

2. Основные результаты. Следующие теоремы дают решение задачи Римана–Гильберта в круге и круговых областях.

Теорема 1. *Пусть $\lambda \colon \partial\mathbb{D} \to \partial\mathbb{D}$ — функция класса $\mathcal{CBV}(\partial\mathbb{D})$ и $\varphi \colon \partial\mathbb{D} \to \mathbb{R}$ — функция, измеримая относительно логарифмической емкости. Тогда существует аналитическая функция $f \colon \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ такая, что вдоль любых некасательных путей*

$$\lim_{z\to\zeta} \operatorname{Re}\{\overline{\lambda(\zeta)} \cdot f(z)\} = \varphi(\zeta) \qquad \text{для п. в.} \qquad \zeta \in \partial\mathbb{D} \tag{5}$$

относительно логарифмической емкости.

Действительно, по предложению 1 функция аргумента α_λ принадлежит классам $L^\infty(\partial\mathbb{D})$ и $\mathcal{CBV}(\partial\mathbb{D})$. Поэтому

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial\mathbb{D}} \alpha(\zeta) \frac{z+\zeta}{z-\zeta} \frac{d\zeta}{\zeta}, \qquad z \in \mathbb{D}, \tag{6}$$

является аналитической функцией в $\mathbb{D}$ с $u(z) \colon = \operatorname{Re} g(z) \to \alpha(\zeta)$ при $z \to \zeta$ вдоль любых путей в $\mathbb{D}$ для всех точек $\zeta \in \partial\mathbb{D}$, за исключением их счетного числа (см., например, теорему IX.1.1 в [7, с. 369] и теорему I. D.2.2 в [9, с. 18]). Отметим, что $\mathcal{A}(z) = \exp\{ig(z)\}$ также является аналитической функцией.

По лемме 1 существует функция $\beta \colon \partial\mathbb{D} \to \mathbb{R}$, конечная п. в. и измеримая относительно логарифмической емкости, такая, что $v(z) \colon = \operatorname{Im} g(z) \to \beta(\zeta)$ вдоль любых некасательных путей при $z \to \zeta$ для п. в. $\zeta \in \partial\mathbb{D}$ также относительно логарифмической емкости. Таким образом, по следствию 4.1 в [2] существует аналитическая функция $\mathcal{B} \colon \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ такая, что $U(z) \colon = \operatorname{Re}\mathcal{B}(z) \to \varphi(\zeta) \cdot \exp\{\beta(\zeta)\}$ при $z \to \zeta$ вдоль любых некасательных путей для п. в. $\zeta \in \partial\mathbb{D}$ относительно логарифмической емкости. Наконец, элементарные вычисления показывают, что искомая функция $f = \mathcal{A} \cdot \mathcal{B}$.

Теорема 2. *Пусть* $\mathbb{D}_*$ *— ограниченная невырожденная круговая область,* $\lambda\colon \partial\mathbb{D}_* \to$ $\to \partial\mathbb{D}$ *— функция класса* $\mathcal{CBV}(\partial\mathbb{D}_*)$ *и* $\varphi\colon \partial\mathbb{D}_* \to \mathbb{R}$ *— функция, измеримая относительно логарифмической емкости. Тогда существует многозначная аналитическая функция* $f\colon \mathbb{D}_* \to \mathbb{C}$ *такая, что вдоль любых некасательных путей*

$$\lim_{z\to\zeta} \mathrm{Re}\{\overline{\lambda(\zeta)}\cdot f(z)\} = \varphi(\zeta) \qquad \textit{для п. в.} \qquad \zeta \in \partial\mathbb{D}_* \tag{7}$$

относительно логарифмической емкости.

Действительно, по теореме Пуанкаре (см., например, теорему 6.1 в [7]) существует локально конформное отображение g круга $\mathbb{D}$ на $\mathbb{D}_*$. Пусть $h\colon \mathbb{D}_* \to \mathbb{D}$ — соответствующая многозначная аналитическая функция, которая является обратной к g.

Область $\mathbb{D}_*$ без конечного числа разрезов является односвязной областью и, следовательно, h имеет там однозначные ветви, продолжимые на границу по теоремам Каратеодори. Согласно разделу VI.2 в [7], $\partial\mathbb{D}$, за исключением счетного множества своих точек, состоит из счетной совокупности дуг, каждая из которых взаимно однозначно (гомеоморфно) отображается g на некоторую окружность из $\partial\mathbb{D}_*$ с одной выброшенной точкой.

Отметим, что по принципу отражения g конформно продолжима в окрестность каждой из таких дуг и, следовательно, некасательные пути к точкам этих дуг из $\partial\mathbb{D}$ переходят в некасательные пути к соответствующим точкам на окружностях из $\partial\mathbb{D}_*$ и наоборот.

Пусть $\Lambda = \lambda \circ g$ и $\Phi = \varphi \circ g$, где g считаем уже продолженным на указанные дуги единичной окружности $\partial\mathbb{D}$. Заметим, что из условий теоремы по построению следует, что $\Lambda \in \mathcal{CBV}(\partial\mathbb{D})$, а функция $\Phi = \varphi \circ g$ измерима относительно логарифмической емкости.

По теореме 1 существует аналитическая функция $F\colon \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ такая, что вдоль любых некасательных путей

$$\lim_{w\to\eta} \mathrm{Re}\{\overline{\Lambda(\eta)}\cdot F(w)\} = \Phi(\eta) \qquad \text{для п. в.} \qquad \eta \in \partial\mathbb{D} \tag{8}$$

относительно логарифмической емкости.

В силу приведенных выше рассуждений, $f := F \circ h$ является искомой многозначной аналитической функцией, удовлетворяющей граничному условию (7).

Теорема 3. *В условиях теорем 1 и 2 пространства решений задачи Римана–Гильберта имеют бесконечную размерность.*

Последний результат является прямым следствием конструкций решений в теоремах 1 и 2, а также теоремы 2.1 из работы [10].

Цитированная литература

1. *Векуа И. Н.* Обобщенные аналитические функции. – Москва: Физматгиз, 1959. – 628 с.
2. *Ефимушкин А. С., Рязанов В. И.* О задаче Римана–Гильберта для уравнений Бельтрами в квазидисках // Укр. мат. вестник. – 2015. – **12**, № 2. – С. 190–209.
3. *Карлесон Л.* Избранные проблемы теории исключительных множеств. – Москва: Мир, 1971. – 125 с.
4. *Неванлинна Р.* Однозначные аналитические функции. – Москва: ОГИЗ, 1941. – 382 с.
5. *Носиро К.* Предельные множества. – Москва: Изд-во иностр. лит-ры, 1963. – 253 с.
6. *Fékete M.* Uber die Verteilung der Wurzeln bei gewissen algebraischen Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten // Math. Z. – 1923. – **17**. – P. 228–249.
7. *Голузин Г. М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. – Москва: Наука, 1966. – 630 с.
8. *Twomey J. B.* The Hilbert transformation and fine continuity // Irish Math. Soc. Bulletin. – 2006. – **58**. – P. 81–91.

9. *Кусис П.* Введение в теорию пространств H^p. – Москва: Мир, 1984. – 368 с.
10. *Ryazanov V.* Infinite dimension of solutions of the Dirichlet problem // Open Math. – 2015. – **13**, No 1. – P. 348–350.

References

1. *Vekua I. N.* Obobschennyie analiticheskie funktsii, Moscow: Fizmatgiz, 1959 (in Russian).
2. *Efimushkin A. S., Ryazanov V. I.* Ukr. mat. vestnik, 2015, **12**, No 2: 190–209 (in Russian).
3. *Karleson L.* Izbrannyie problemyi teorii isklyuchitelnyih mnozhestv, Moscow: Mir, 1971 (in Russian).
4. *Nevanlinna R.* Odnoznachnyie analiticheskie funktsii, Moscow: OGIZ, 1941 (in Russian).
5. *Nosiro K.* Predelnyie mnozhestva, Moscow: Izd-vo Inostr. lit., 1963 (in Russian).
6. *Fékete M.* Math. Z., 1923, **17**: 228–249.
7. *Goluzin G. M.* Geometricheskaya teoriya funktsiy kompleksnogo peremennogo, Moscow: Nauka, 1966 (in Russian).
8. *Twomey J. B.* Irish Math. Soc. Bulletin., 2006, **58**: 81–91.
9. *Kusis P.* Vvedenie v teoriyu prostranstv H^p, Moscow: Mir, 1984 (in Russian).
10. *Ryazanov V.* Open Math., 2015, **13**, No 1: 348–350.

Поступило в редакцию 31.08.2015

А. С. Єфімушкін[1], В. І. Рязанов[2]

[1]Інститут математики НАН України, Київ
[2]Інститут прикладної математики і механіки НАН України, Слов'янськ
E-mail: a.yefimushkin@gmail.com

Про задачу Рімана–Гільберта для аналітичних функцій у кругових областях

Доведено існування однозначних аналітичних розв'язків в одиничному колі та багатозначних аналітичних розв'язків в областях, обмежених скінченним числом кіл, задачі Рімана–Гільберта із коефіцієнтами зліченно-обмеженої варіації та граничними даними, що є вимірюваними відносно логарифмічної ємності. Показано, що простори розв'язків мають нескінченну розмірність.

Ключові слова: задача Рімана–Гільберта, аналітичні функції, кругові області.

A. S. Yefimushkin[1], V. I. Ryazanov[2]

[1]Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine, Kiev
[2]Institute of Applied Mathematics and Mechanics of the NAS of Ukraine, Slovyansk
E-mail: a.yefimushkin@gmail.com

On the Riemann–Hilbert problem for analytic functions in circular domains

The existence of single-valued analytic solutions in a unit disk and multivalent analytic solutions in domains bounded by a finite collection of circles is proved for the Riemann–Hilbert problem with coefficients of sigma finite variation and with boundary data that are measurable with respect to the logarithmic capacity. It is shown that these spaces of solutions have the infinite dimension.

Keywords: Riemann–Hilbert problem, analytic functions, circular domains.