Доповіді
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

1 • 2016

ТЕПЛОФІЗИКА

УДК 532.536 http://dx.doi.org/10.15407/dopovidi2016.01.047

Член-корреспондент НАН Украины **А. А. Авраменко,**
Н. П. Дмитренко, А. И. Тыринов

Институт технической теплофизики НАН Украины, Киев

E-mail: natdmitrenko@i.ua

Исследование гидродинамической устойчивости потока в пористой среде на основе метода ренормализационных групп

Используя метод ренормализационных групп, развита усовершенствованная макроскопическая модель турбулентности для пористых сред. На основе этой модели выведено выражение для эффективной кинематической вязкости с учетом пористости среды. Получены нелинейные характеристики перехода ламинарного течения в турбулентное, а именно, критические значения числа Дарси и пористости.

Ключевые слова: ренормализационный анализ, математичесская модель, пористость, неустойчивость, турбулентность.

Одним из способов исследования физических особенностей течений в пористых средах является метод математического моделирования на основе $k - \varepsilon$ модели турбулентности.

В пористой среде поток носит как ламинарный, так и турбулентный характер, поэтому важно знать параметры перехода из ламинарного режима в турбулентный. В работе [1] проведено исследование линейной неустойчивости ламинарного потока в плоском канале, заполненном пористой средой. Численно проанализировано зависимость критического числа Рейнольдса от пористости и проницаемости среды. Гидродинамическая неустойчивость потока в гиперпористой среде рассмотрена в [2]. Была проанализирована зависимость критического числа Рейнольдса от пористости среды и от числа Кнудсена.

Цель настоящей статьи состоит в доработке модели [3] для развития макроскопической модели турбулентности с учетом пористости среды. Построение макроскопической модели турбулентности для пористых сред позволило бы получить модифицированное выражение для ренормализированной эффективной вязкости с учетом пористости и определить параметры нелинейной гидродинамической устойчивости потока в пористой среде.

© А. А. Авраменко, Н. П. Дмитренко, А. И. Тыринов, 2016

Базовые уравнения. Как показано в [4], уравнение движения потока в пористой среде включает член, учитывающий линейное гидродинамическое сопротивление, который описывается законом Дарси, член, учитывающий нелинейное гидродинамическое сопротивление (Форхаймера) и член, учитывающий поправку Бринкмана:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\nu_0\frac{\phi}{K}-J\nu_0\nabla^2\right)u_n=f_n-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_n}+\frac{\partial u_n u_m}{\partial x_m}-H|V|u_n, \tag{1}$$

где

$$H=\varphi^2\frac{c_F}{\sqrt{K}}; \tag{2}$$

$J=\mu_e/\mu$ — отношение вязкостей; t — время; u — компонента скорости; φ — пористость; K — проницаемость; p — давление; f — соленоидальная сила; ρ — плотность; V — вектор скорости.

Проекция вектора скорости на ось координат описывается выражением

$$u_n=|V|\cos(V\hat{u}_n)=|V|s_n, \tag{3}$$

где s_n — направляющий косинус.

Исходное уравнение для кинетической энергии имеет вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+2\nu_0\frac{\varphi}{K}-J\nu_0\nabla^2\right)k+\frac{1}{\rho}\frac{\partial(pu_n)}{\partial x_n}+\frac{\partial(ku_n)}{\partial x_n}=Gn-J\varepsilon-2Hs_nu_nk, \tag{4}$$

где Gn — слагаемое, описывающее генерацию турбулентной энергии; k — кинетическая энергия турбулентности; ε — скорость диссипации.

Аналогичным образом представим уравнение для скорости диссипации энергии, которое с учетом пористости имеет вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+2\nu_{k0}\frac{\varphi}{K}-J\nu_0\nabla^2\right)\varepsilon=-2\nu_0\frac{\partial u_n}{\partial x_l}\frac{\partial u_m}{\partial x_l}\frac{\partial u_n}{\partial x_m}-u_m\frac{\partial\varepsilon}{\partial x_m}-2\frac{\nu_0}{\rho}\frac{\partial u_n}{\partial x_l}\frac{\partial^2 p}{\partial x_n\partial x_l}-$$
$$-2J\nu_0^2\left(\frac{\partial^2 u_n}{\partial x_m\partial x_l}\right)-2\nu_0H\frac{\partial u_n}{\partial x_m}\frac{\partial(s_nu_m^2)}{\partial x_m}. \tag{5}$$

Ренормализационная процедура. Используя выражение (3), уравнение (1) преобразуем к виду

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\nu_0\frac{\phi}{K}-J\nu_0\nabla^2\right)u_n=f-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_n}+\frac{\partial u_n u_m}{\partial x_m}-Hs_nu_m^2. \tag{6}$$

Применим преобразование Фурье [5] к параметрам скорости, давления и силы в (7). Подставим полученные выражения в (7) и сократим экспоненциальный множитель. В результате получим

$$G_0^{-1}U_n=F_n-i\kappa_n\frac{P}{\rho}-i\kappa_mW_{nm}-HW_{s_nu^2}, \tag{7}$$

где G_0 — пропагатор нулевого порядка,

$$G_0 = \left(-i\omega + \frac{\nu_0}{K} + J\nu_0\kappa^2\right)^{-1}; \tag{8}$$

F — Фурье-образ соленоидальной силы; P — Фурье-образ давления; β, κ, σ, — волновые числа, ω, ϖ, χ — частота.

Следующим шагом исключим Фурье-образ давления из (8), используя уравнение неразрывности и методику, приведенную в [3], получим

$$U_n - F_n = M_{nml}W_{ml} - HM_{nh}W_{s_h u^2}, \tag{9}$$

где

$$M_{nml} = \frac{1}{2i}(\kappa_m M_{nl} + \kappa_l M_{nm}) \qquad \text{и} \qquad M_{nl} = \delta_{nl} - \frac{\kappa_n\kappa_l}{\kappa^2}; \tag{10}$$

h, k, l, m, n, s — проекции на координаты.

Фурье-образ силы F_n, которая входит в уравнение (10), определяется через корреляционную функцию случайных сил выражением [6]

$$\langle F_n(\kappa,\omega)F_m(\kappa',\omega')\rangle = \frac{2(2\pi)^{d+1}}{\kappa^{d-4+\varepsilon*}}D_0M_{nm}(\kappa)\delta(\kappa+\kappa')\delta(\omega+\omega'). \tag{11}$$

Процедура ренормализационного анализа [5] состоит в том, что поля скорости и силы разбиваем на быстрые и медленные моды таким образом:

$$U(\kappa,\omega) = \begin{cases} U^{<}(\kappa,\omega), & 0 < \kappa < \kappa_c\exp(-\tau), \\ U^{>}(\kappa,\omega), & \kappa_c\exp(-\tau) < \kappa < \kappa_c, \end{cases} \tag{12}$$

$$F(\kappa,\omega) = \begin{cases} F^{<}(\kappa,\omega), & 0 < \kappa < \kappa_c\exp(-\tau), \\ F^{>}(\kappa,\omega), & \kappa_c\exp(-\tau) < \kappa < \kappa_c, \end{cases} \tag{13}$$

где τ — положительный параметр; $U^<$ и $F^<$ — медленные моды; $U^>$ и $F^>$ — быстрые моды.

Подставим выражения (13) и (14) в (10). В результате получим выражение для медленных и быстрых мод [3]. Далее исключим быстрые моды из выражения для медленных мод. Применим теорию возмущения для быстрых мод. Введем выражение

$$U^{>}(\widetilde{\kappa}) = \sum_{s=0}^{\infty}\lambda_0^s U_s^{>}(\widetilde{\kappa}), \tag{14}$$

где $\widetilde{\kappa} = (\kappa,\omega)$.

Подставим (15) в выражение для быстрых мод и приравняем члены при одинаковых степенях λ_0. Теперь с помощью осреднения можно исключить эффекты быстрых мод, учитывая правила [7].

Выражение, из которого были вычтены быстрые моды, включает два новых слагаемых. Далее рассмотрим их детально. Для удобства дальнейших выкладок используем компактную запись и пренебрегаем нижними буквенными индексами. Применим методику [6] и при расчете интеграла по $\widetilde{\upsilon}$ и используем свойство дельта-функции $\delta(\widetilde{\kappa}-\widetilde{\upsilon})$. В результате после преобразования первого из них получаем

$$8D_0M^{<}(\kappa)\int\frac{G_0(\widetilde{\kappa}-\widetilde{\sigma})M^{>}(\kappa-\kappa)G_0(\widetilde{\sigma})M(\sigma)d\widetilde{\sigma}}{(2\pi)^{d+1}\sigma^{d-4+\varepsilon*}}\int U^{<}(\widetilde{\upsilon})G_0(\widetilde{\kappa}-\widetilde{\sigma}-\widetilde{\upsilon})\delta(\widetilde{\kappa}-\widetilde{\upsilon})d\widetilde{\upsilon}=$$

$$=8D_0M^{<}(\kappa)\int\frac{G_0(\widetilde{\kappa}-\widetilde{\sigma})M^{>}(\kappa-\sigma)|G_0(\widetilde{\sigma})|^2M(\sigma)d\widetilde{\sigma}}{(2\pi)^{d+1}\sigma^{d-4+\varepsilon*}}U^{<}(\widetilde{\kappa}). \tag{15}$$

Аналогично выражение второе новое слагаемое может быть преобразовано к виду

$$4HM^{<}(\kappa)\int\frac{G_0(\widetilde{\kappa}-\widetilde{\sigma})M^{>}(\kappa-\sigma)d\widetilde{\sigma}d\widetilde{\upsilon}d\widetilde{\beta}}{(2\pi)^{3d+3}}\mathrm{S}(\widetilde{\beta})U_0^{>}(\widetilde{\sigma})U^{<}(\widetilde{\upsilon})U_0^{>}(\widetilde{\kappa}-\widetilde{\sigma}-\widetilde{\beta}-\widetilde{\upsilon})\times$$

$$\times 8HM^{<}(\kappa)D_0\int\frac{G_0(\widetilde{\kappa}-\widetilde{\sigma})|G_0(\widetilde{\sigma})|^2M^{>}(\kappa-\sigma)M_{mr}(\sigma)d\widetilde{\sigma}}{(2\pi)^{d+1}\sigma^{d-4+\varepsilon*}}\int\frac{S(\widetilde{\beta})U^{<}(\widetilde{\kappa}-\widetilde{\beta})}{(2\pi)^{d+1}}d\widetilde{\beta}. \tag{16}$$

Ограничимся случаем, когда $s=2$ в выражении для быстрых мод. В результате преобразования (22) получаем

$$\left[-i\omega+\frac{\nu_0}{K}+J(\nu_0+\Delta\nu)\kappa^2\right]\mathrm{U}^{<}(\widetilde{\kappa})=$$

$$=F^{<}(\widetilde{\kappa})+\lambda_0\left[M^{<}(\kappa)\int\frac{d\widetilde{\sigma}}{(2\pi)^{d+1}}U^{<}(\widetilde{\sigma})U^{<}(\widetilde{\kappa}-\widetilde{\sigma})-\right.$$

$$\left.-HM^{<}(\kappa)\int\frac{d\widetilde{\sigma}d\widetilde{\beta}}{(2\pi)^{2d+2}}\mathrm{S}(\widetilde{\beta})U^{<}(\widetilde{\sigma})U^{<}(\widetilde{\kappa}-\widetilde{\sigma}-\widetilde{\beta})\right]=$$

$$=\lambda_0^2\left[2M^{<}(\kappa)\int\frac{d\widetilde{\sigma}d\widetilde{\upsilon}}{(2\pi)^{2d+2}}G_0(\widetilde{\kappa}-\widetilde{\sigma})M^{>}(\kappa-\kappa)U^{<}(\widetilde{\sigma})U^{<}(\widetilde{\kappa}-\widetilde{\sigma}-\widetilde{\upsilon})U^{<}(\widetilde{\upsilon})-\right.$$

$$-2HM^{<}(\kappa)\left\{\int\frac{G_0(\widetilde{\kappa}-\widetilde{\sigma}-\widetilde{\beta})M^{>}(\kappa-\sigma-\beta)d\widetilde{\sigma}d\widetilde{\beta}d\widetilde{\upsilon}}{(2\pi)^{3d+3}}\mathrm{S}(\widetilde{\beta})U^{<}(\widetilde{\sigma})\times\right.$$

$$\times U^{<}(d\widetilde{\upsilon})U^{<}(\widetilde{\kappa}-\widetilde{\sigma}-\widetilde{\beta})-H\int\frac{G_0(\widetilde{\kappa}-\widetilde{\sigma}-\widetilde{\beta})M^{>}(\kappa-\sigma-\beta)d\widetilde{\upsilon}d\widetilde{\beta}d\widetilde{\upsilon}}{(2\pi)^{3d+3}}\times$$

$$\left.\left.\times S(\widetilde{\beta})U^{<}(\widetilde{\sigma})U^{<}(\widetilde{\upsilon})U^{<}(\widetilde{\kappa}-\widetilde{\sigma}-\widetilde{\beta}-\widetilde{\upsilon})\right\}\right]-\Delta N, \tag{17}$$

где

$$\Delta\nu(\widetilde{\kappa})=-8\lambda_0^2\kappa^{-2}J^{-1}D_0M_{sml}^{<}(\kappa)\int\frac{d\widetilde{\sigma}}{(2\pi)^{d+1}}G_0(\widetilde{\sigma}-\widetilde{\kappa})\frac{|G_0(\widetilde{\sigma})|^2M_{lts}^{>}(\kappa-\sigma)M_{mt}(\sigma)}{\sigma^{d-4+\varepsilon*}} \tag{18}$$

и

$$\Delta N=8\lambda_0^2HM_{rml}^{<}(\kappa)D_0\times$$

$$\times\int\frac{G_0(\widetilde{\kappa}-\widetilde{\sigma})|G_0(\widetilde{\sigma})|^2M_{nh}^{>}(\kappa-\sigma)M_{mr}(\sigma)d\widetilde{\sigma}}{(2\pi)^{d+1}\sigma^{d-4+\varepsilon*}}\int\frac{\mathrm{S}_h(\widetilde{\beta})U_n^{<}(\widetilde{\kappa}-\widetilde{\beta})}{(2\pi)^{d+1}}d\widetilde{\beta}. \tag{19}$$

Выражение (25) описывает ренормализированную составляющую нелинейного сопротивления Форхаймера. Процесс перенормировки продолжается до фиксированной точки. По мере приближения к этой фиксированной точке (25) примет вид

$$G^{-1}(\widetilde{\kappa})U_n^{<}(\widetilde{\kappa}) = F_n^{<}(\widetilde{\kappa}) + \lambda_0\Bigg[M_{nml}^{<}(\kappa)\int\frac{d\widetilde{\sigma}}{(2\pi)^{d+1}}U_m^{<}(\widetilde{\sigma})U_l^{<}(\widetilde{\kappa}-\widetilde{\sigma}) - \\ - HM_{nh}^{<}(\kappa)\int\frac{d\widetilde{\sigma}d\widetilde{\beta}}{(2\pi)^{2d+2}}S_h(\widetilde{\beta})U_r^{<}(\widetilde{\sigma})U_r^{<}(\widetilde{\kappa}-\widetilde{\sigma}-\widetilde{\beta})\Bigg], \qquad (20)$$

где

$$G(\widetilde{\kappa}) = \left[-i\left(\omega - \frac{\Delta N}{iU_n^{<}(\widetilde{\kappa})}\right) + \frac{\nu_0}{K} + J\kappa^2(\nu_0+\Delta\nu)\right]^{-1}. \qquad (21)$$

Первый этап ренормализации окончен. Следующим шагом будет определение турбулентного коэффициента кинематической вязкости с учетом пористости и поправки Форхаймера.

Для получения дифференциального уравнения, описывающего эффективную вязкость, вычислим интеграл (24) по всему спектру частот. Интегрирование соответствует суммированию вычетов подынтегральной функции в полюсах верхней полуплоскости. Рассмотрим случай, когда $(K/\varphi)\to\infty$, так как данное соотношение является условием возникновения турбулентности в пористой среде. Для этого раскладываем в ряд по (K/φ) выражение, полученное после интегрирования (24). Таким образом, мы получим

$$\int\frac{d^d\sigma}{(2\pi)^d}\frac{M_{lth}^{>}(\kappa-\sigma)M_{mt}(\sigma)}{\sigma^{d-4+\varepsilon*}}\times \\ \times\frac{(K/\varphi)^2}{\nu_0(1+J(K/\varphi)\sigma^2)[\nu_0(2+J(K/\varphi)(\kappa^2-2\kappa\sigma+2\sigma^2))-i(K/\varphi)\omega]}\approx \\ \approx\int\frac{d^d\sigma}{(2\pi)^d}\frac{M_{lth}^{>}(\kappa-\sigma)M_{mt}(\sigma)}{\sigma^{d+\varepsilon*}}\left[\frac{1}{2J^2}\left(1+\frac{\kappa\sigma}{\sigma}\right)-\frac{1}{J^3\sigma^2(K/\varphi)}\left(1+\frac{3}{2}\frac{\kappa\sigma}{\sigma}\right)\right]. \qquad (22)$$

Последующий процесс интегрирование по волновым числам с учетом правил [5] дает

$$\Delta\nu = A_dJ^{-3}\frac{\lambda_0^2D_0}{\nu_0^2\kappa_c^{\varepsilon*}}\frac{\exp(\varepsilon*\tau)-1}{\varepsilon*} - B_dJ^{-4}\frac{\lambda_0^2D_0}{\nu_0^2\kappa_c^{\varepsilon*+2}(K/\varphi)}\frac{\exp((2+\varepsilon*)\tau)-1}{2+\varepsilon*}, \qquad (23)$$

где

$$A_d = \frac{S_d}{(2\pi)^d}\frac{d-1}{2(d+2)}, \qquad B_d = \frac{S_d}{(2\pi)^d}\frac{d^2-d+3}{d(d+2)}. \qquad (24)$$

Чтобы получить дифференциальное уравнение для эффективной вязкости продифференцируем (29) по τ, когда $\tau\to 0$. Учитывая, то что $d\tau = -\kappa_A'^{-1}d\kappa_c'$, имеем

$$\frac{d\nu}{d\kappa_c} = A_dJ^{-3}\frac{\lambda_0^2D_0}{\nu^2\kappa_c^{1+\varepsilon*}}\left(1-\frac{2\varphi}{JK\kappa_c^2}\frac{d^2-d+3}{d(d-1)}\right). \qquad (25)$$

Учтем также граничное условие $\nu(\infty) = 0$ и получим выражение для ренормализированной эффективной вязкости с учетом пористости среды:

$$\nu = \left(\frac{3A_d D_0}{J^3 \kappa_c^{\varepsilon *}}\left(\frac{1}{\varepsilon *} - \frac{2\varphi}{JK\kappa_c^2(2+\varepsilon *)}\frac{d^2-d+3}{d(d-1)}\right)\right)^{1/3}, \tag{26}$$

Далее исключим волновое число из (26). Для этого вычисляем спектр энергии турбулентности по формуле [8]. Подставляем выражение для корреляционной функции эффективных случайных сил, а также учитывая выражение для эффективной вязкости (26), получим

$$E(\kappa) = \frac{d-1}{2}J\left(\frac{\varepsilon *}{3A_d}\right)^{1/3}\frac{S_d}{(2\pi)^d}D_0^{2/3}\kappa^{1-2\varepsilon */3}\left(1 - \frac{2\varphi\varepsilon *}{JK\kappa^2(2+\varepsilon *)}\frac{d^2-d+3}{d(d-1)}\right)^{-1/3}. \tag{27}$$

Теперь установим связь между D_0 и ϵ. Для этого используем уравнение

$$2D_0\frac{S_d}{(2\pi)^d} = \gamma\varepsilon = 1{,}575\varepsilon. \tag{28}$$

При значении $\gamma = 4/3$ получим

$$E(\kappa) = JC_K\varepsilon^{2/3}\kappa^{-5/3}\left(1 - \frac{\varphi}{JK\kappa^2}\frac{d^2-d+3}{d(d-1)}\right)^{-1/3}, \tag{29}$$

где

$$C_K = \left(\frac{16(d+2)}{27}\right)^{1/3}. \tag{30}$$

Используем выражение (35) для определения кинетической энергии турбулентности:

$$k = \int\limits_{\kappa_c}^{\infty} E(\kappa)d\kappa = \frac{3}{2}JC_K\varepsilon^{2/3}\kappa_c^{-2/3}{}_2\mathrm{F}_1\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{4}{3},\frac{\varphi}{JK\kappa_c^2}\frac{d^2-d+3}{d(d-1)}\right), \tag{31}$$

где ${}_2F_1$ — гипергеометрическая функция.

Следующей операцией исключим волновое число из (26), при этом используем (29). Для случая $\epsilon^* = 4$ и $K \to \infty$ — пористая среда отсутствует — (35) преобразуется в закон Колмогорова. В результате получим

$$\nu_t = \nu_{t0}\left(1 - \frac{16(3+(-1+d)d\varepsilon^*\varphi}{27C_K^3 d(1+d){}_2\mathrm{F}_1^3\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{4}{3},\frac{\varphi}{JK\kappa_c^2}\frac{d^2-d+3}{d(d-1)}\right)J^4(2+\varepsilon^*)}\frac{k^3}{K\varepsilon^2}\right)^{1/3}, \tag{32}$$

где ν_{t0} определяется в [9]. Как видно из формулы (32), при определенных значениях параметров течения и свойств пористой среды трубленная вязкость может вырождаться. Этот вопрос будет исследован ниже.

Теперь рассмотрим преобразование слагаемого ΔN (выражение (19)), которое появляется в ходе перенормировки. Учитывая правила [5] преобразуем выражение (25), а после, используя методику [3], получим

$$\Delta N = -4H\frac{d^2-2}{d^2-d}\Delta\nu Ji\kappa_m\int\frac{\mathrm{S}_m(\widetilde{\beta})U_n^{<}(\widetilde{\kappa}-\widetilde{\beta})}{(2\pi)^{d+1}}d\widetilde{\beta}. \tag{33}$$

В итоге, учитывая проведенные операции по перенормировке, получим окончательное выражение уравнения движения:

$$\frac{\partial u_n}{\partial t} + \frac{\partial u_n u_m}{\partial x_m} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_n} + \frac{\partial}{\partial x_m}\left[J(\nu_0+\nu_t)\frac{\partial u_n}{\partial x_m}\right] - \varphi\frac{\nu_0}{K}u_n - \varphi^2\frac{c_F}{\sqrt{K}}|V|u_n + \\ + 4\varphi^2\frac{c_F}{\sqrt{K}}\frac{d^2-2}{d^2-d}\nu_t J\frac{\partial}{\partial x_m}\frac{u_m u_n}{|V|}. \tag{34}$$

Далее получим уравнение для кинетической энергии турбулентности. Применим процедуру перенормировки, которая включает преобразование Фурье параметров (5), разбивку поля скоростей на быстрые и медленные моды, исключение образа давления, исключение быстрых мод из уравнения для медленных мод, используя для этого разложение в ряд. В итоге получим

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \overline{u}_n\frac{\partial k}{\partial x_n} = 2\nu_t S_{nm}^2 - J\varepsilon + \frac{\partial}{\partial x_n}\left[J\left(\nu_0+\frac{\nu_t}{\mathrm{Pr}_k}\right)\frac{\partial k}{\partial x_n}\right] - 2\nu_0\frac{\varphi}{K}k - 2\varphi\frac{c_F}{\sqrt{K}}|V|k + \\ + 8\varphi^2\frac{c_F}{\sqrt{K}}\frac{d^2-2}{d^2-d}\nu_t Jk\frac{\partial}{\partial x_m}\frac{u_m u_n}{|V|}, \tag{35}$$

где Pr_k — критерий Прандтля кинетической энергии.

Аналогичным образом получено уравнение для скорости диссипации энергии, которое с учетом пористости имеет вид

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \overline{u}_n\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_n} = 2C_{1\varepsilon}\nu_t\frac{\varepsilon}{k}S_{nm}^2 - C_{2\varepsilon}J\frac{\varepsilon^2}{k} + \frac{\partial}{\partial x_n}\left[J\left(\nu_0+\frac{\nu_t}{\mathrm{Pr}_\varepsilon}\right)\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_n}\right] - \\ - 2\nu_0\varphi^2\frac{c_F}{\sqrt{K}}\frac{\partial u_n}{\partial x_m}\frac{\partial(|V|u_n)}{\partial x_m} - 8\nu_0\varphi^2\frac{c_F}{\sqrt{K}}\frac{d^2-2}{d^2-d}\frac{\partial u_n}{\partial x_m}\frac{\partial}{\partial x_m}\left(\nu_t J\frac{\partial}{\partial x_m}\frac{u_m u_n}{|V|}\right), \tag{36}$$

где Pr_ε — критерий Прандтля скорости диссипации.

Гидродинамическая неустойчивость потока в пористой среде. Из ряда работ, где применялся метод ренормализационных групп (RNG), для моделирования особенностей течений, видно, что данная методика адекватно описывает ламинарный, переходной и турбулентный режимы. Поэтому для поверки работоспособности полученной модифицированной модели необходимо знать условия, при которых происходит потеря устойчивости потока в пористой среде.

Процесс линейной неустойчивости детально был рассмотрен в [1, 2]. В данной работе мы рассмотрим нелинейные эффекты, которые начинают возникать после линейных. Этот этап неустойчивости уже не может быть описан линейным уравнением Орра–Зоммерфельда. Для анализа указанного этапа неустойчивости в пористой среде можно воспользоваться зависимостью (26) для ренормализированной турбулентной вязкости. Из (26) следует, что эта вязкость равна нулю, т. е. все нелинейные возмущения затухают при условии

$$K < K_{cr} = \frac{2\varphi\varepsilon^*}{J\kappa_c^2(2+\varepsilon^*)}\frac{d^2-d+3}{d(d-1)}, \tag{37}$$

где κ_{cr} — критический параметр.

Исключив волновое число из (37) и использовав гауссовский фильтр

$$L = \frac{2\pi}{\kappa_c}, \tag{38}$$

получим критерий неустойчивости в форме числа Дарси:

$$\mathrm{Da} < \mathrm{Da}_{cr} = \frac{\varphi\varepsilon*}{2\pi^2 J(2+\varepsilon*)} \frac{d^2 - d + 3}{d(d-1)}, \tag{39}$$

где в качестве гауссовского фильтра используется размер d_{st}, средний размер частицы или диаметр фибра, которые формируют пористую среду. Следовательно,

$$\mathrm{Da} = \frac{K}{d_{st}^2}. \tag{40}$$

Если использовать для определения значения проницаемости соотношение Козени [10] и выражение для отношения вязкостей

$$J = \frac{1}{\varphi}, \tag{41}$$

то получим следующую формулу для критического значения пористости

$$\varphi_{cr} = \frac{360 + (\pi^2 + 120)d(d-1) + \pi\sqrt{d(d-1)(720 + (\pi^2 + 240)d(d-1))}}{120(d^2 - d + 3)}. \tag{42}$$

В случае для трехмерного течения из (42) следует

$$\varphi_{cr}^{3D} = 0{,}72, \tag{43}$$

для двумерного потока имеем

$$\varphi_{cr}^{2D} = 0{,}775. \tag{44}$$

Сравнение (43) и (44) показывает, что трехмерный поток менее устойчив по сравнению с двумерным. Этот вывод прямо противоположен теореме устойчивости Сквайра для линейного этапа развития неустойчивости, в том числе и в пористых средах.

В настоящей работе приведено алгоритм перенормировки уравнений макропористой $k-\varepsilon$ модели турбулентности с целью получить модифицированное выражения движения, кинетической энергии, скорости диссипации и кинематической вязкости. Используя выражение для ренормализированной кинематической вязкости, определено критерии нелинейной гидродинамической устойчивости двумерного и трехмерного потока в пористых средах, превышение которых ведет к затуханию турбулизации течения.

Цитированная литература

1. *Avramenko A. A., Kuznetsov A. V., Basok B. I., Blinov D. G.* Investigation of stability of a laminar flow in a parallel-plate channel filled with a fluid saturated porous medium // Phys. Fluids. — 2005. — **17**. — P. 094 102–1–094 102–6.
2. *Avramenko A. A., Kuznetsov A. V., Nield D. A.* Instability of slip-flow in a channel occupied by a hyperporous medium // J. of Porous Media. — 2007. — **10**. — P. 435–442.

3. *Avramenko A. A., Kuznetsov A. V.* Renormalization Group Model of Large-Scale Turbulence in Porous Media // Transport in Porous Media. — 2006. — **63**. — P 175–193.
4. *Antohe, B. V., Lage, J. L.* A general two-equation macroscopic model for incompressible flow in porous media // Intern. *J. of Heat and* Mass Transfer. — 1997. — **40**. — P. 3013–3024.
5. *Авраменко А. А.* Групповые методы в теплофизике. — Киев: Наук. думка, 2003. — 483 с
6. *Forster D., Nelson D. R., Stephen M. J.* Large-distance and long-time properties of a randomly stirred fluid // Phys. Rev. A. — 1977. — **16**, No 2. — P. 732–749.
7. *McComb W. D.* The physics of fluid turbulence. — Oxford: Clarendon Press, 1992. — 572 p.
8. *Fournier J. D., Frisch U.* Remarks on the renormalization group in statistical fluid dynamics // Phys. Rev. A. — 1983. — **28**, No 2. — P. 1000–1002.
9. *Авраменко А. А., Басок Б. И., Дмитренко Н. П. и др.* Ренормализационно-групповой анализ турбулентности. — Киев: ПЦ “Експрес”, 2013 — 299 с.
10. *Nield D. A., Bejan A.* Convection in porous media. — New York: Springer, 2006. — 640 p.

References

1. *Avramenko A. A., Kuznetsov A. V., Basok B. I., Blinov D. G.* Phys. Fluids, 2005, **17**: 094 102–1–094 102–6.
2. *Avramenko A. A., Kuznetsov A. V., Nield D. A.* J. Porous Media, 2007, **10**: 435–442.
3. *Avramenko A. A., Kuznetsov A. V.* Transrort in Porous Media, 2006, **63**: 175–193.
4. *Antohe, B. V., Lage, J. L.* International J. of Heat and Mass Transfer, 1997, No 40: 3013–3024.
5. *Avramenko A. A.* Group methods in thermal physics, Kiev: Nauk. Dumka, 2003 (in Russian).
6. *Forster D., Nelson D. R., Stephen M. J.* Phys. Rev. A., 1977, **16**, No 2: 732–749.
7. *McComb W. D.* The physics of fluid turbulence, Oxford: Clarendon Press, 1992.
8. *Fournier J. D., Frisch U.* Phys. Rev. A., 1983, **28**, No 2: 1000–1002.
9. *Avramenko A. A., Basok B. I., Dmitrenko N. P. et al.* Renomalizacionno-gruppovoi analiz turbulentnosti, Kiev: VPC “Ekspres”, 2013 (in Russian).
10. *Nield D.Ȧ, Bejan A.* Convection in porous media, New York: Springer, 2006.

Поступило в редакцию 15.06.2015

Член-кореспондент НАН України **А. О. Авраменко, Н. П. Дмитренко, А. І. Тирінов**

Інститут технічної теплофізики НАН України, Київ

E-mail: natdmitrenko@i.ua

Дослідження гідродинамічної стійкості потоку в пористому середовищі на основі методу ренормалізаційних груп

Використовуючи метод ренормалізаційних груп, розвинена вдосконалена мікроскопічна модель турбулентності для пористих середовищ. На основі цієї моделі, виведено вираз для ефективної кінематичної в'язкості з урахуванням пористості середовища. Отримано нелінійні характеристики переходу ламінарної течії в турбулентну, а саме, критичні значення числа Дарсі і пористості.

Ключові слова: ренормалізаційний аналіз, математична модель, пористість, нестійкість, турбулентність.

Corresponding Member of the NAS of Ukraine **A. A. Avramenko, N. P. Dmytrenko, A. I. Tyriniv**

Institute of Technical Heat Physics of the NAS of Ukraine, Kiev

E-mail: natdmitrenko@i.ua

Investigation of the hydrodynamic stability of a flow in the porous medium based on the renormalization group method

Using the renormalization group method, the advanced microscopic turbulence model for porous media is developed. Based on this model, an expression for the effective kinematic viscosity with accounting the porosity is derived. The nonlinear characteristics of the transition from the laminar flow to the turbulent one, namely, the critical values of Darcy number and porosity, are obtained.

Keywords: renormalization analysis, mathematical model, porosity, instability, turbulence.