ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

1 • 2016

ІНФОРМАТИКА ТА КІБЕРНЕТИКА

УДК 518.9 http://dx.doi.org/10.15407/dopovidi2016.01.026

С. В. Пашко

Институт программных систем НАН Украины, Киев

E-mail: pashko55@yahoo.com

Эффективные стратегии преследования, основанные на использовании функции Ляпунова

(Представлено академиком НАН Украины Ф. И. Андоном)

Данная работа посвящена дифференциальным играм преследования, в которых несколько игроков догоняют одного. В качестве критерия используется время захвата цели. Предполагается, что убегающий игрок окружен преследователями. Для известной стратегии параллельного сближения описана функция, задающая точное гарантированное время захвата цели. Эта функция используется в качестве функции Ляпунова для построения новой стратегии преследования, превосходящей стратегию параллельного сближения.

Ключевые слова: дифференциальная игра, стратегия преследования, время преследования, функция Ляпунова.

Задачи преследования — уклонения занимают одно из центральных мест в теории динамических игр. В данной работе рассматривается задача преследования одного убегающего несколькими преследователями. В качестве критерия выступает время захвата цели, которое преследователи стремятся минимизировать, а убегающий игрок стремится максимизировать.

В последнее время проявляется интерес к созданию многоагентных роботизированных систем защиты, систем беспилотных летательных аппаратов и т. д., поэтому рассматриваемая задача является актуальной.

В работах [1, 2] задача преследования — уклонения решена при условии, что убегающий игрок не принадлежит внутренности выпуклой оболочки, образованной преследователями. Найдены оптимальные стратегии игроков и цена игры. Доказано, что все игроки с постоянными максимальными скоростями движутся к определенной точке, где и происходит захват цели. В данной работе рассматриваются только игры, в которых убегающий игрок принадлежит внутренности выпуклой оболочки, образованной преследователями. Оптимальные стратегии известны не для всех таких игр.

Построенная в работе новая стратегия преследования существенно использует классическую стратегию параллельного сближения, которая состоит в следующем. Каждый преследователь, зная скорость преследуемого в данный момент времени, считает эту скорость постоянной и вычисляет на линии движения убегающего игрока точку захвата, в которой он может догнать его, двигаясь с постоянной максимальной скоростью. В текущий момент времени вектор скорости преследователя направлен на точку захвата, а величина скорости максимальна. Если максимальные скорости преследователя и убегающего равны, а точка захвата отсутствует, преследователь двигается параллельно убегающему игроку.

В работах [3–5] предполагается, что все преследователи применяют стратегию параллельного сближения. При этом условии найдена оптимальная стратегия уклонения и точное гарантированное время преследования T.

В данной работе время T, зависящее от координат игроков, используется как функция Ляпунова для построения стратегии преследования, которая обеспечивает время захвата цели меньшее, чем стратегия параллельного сближения.

Стратегии агентов и гарантированное время преследования. Пусть в точке $X_0 = X_0(t)$ n-мерного действительного евклидового пространства E^n в момент времени t расположен преследуемый игрок E, а в точках $X_i = X_i(t)$ находятся преследователи P_i, $i = 1, 2, \ldots, m$. Векторы $V_i = V_i(t)$ размерности n, $i = 0, 1, \ldots, m$, обозначают скорости игроков (нулевое значение индекса i относится к игроку E).

Пространство E^n состоит из n-мерных векторов $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ с вещественными компонентами, $2 \leqslant n < \infty$. Норма вектора X задается формулой $\|X\| = \langle X, X\rangle^{1/2}$, где $\langle X, Y\rangle = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i$ — скалярное произведение векторов $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$.

Игра начинается в момент времени $t = 0$. Уравнения движения игроков имеют вид $\dot{X}_i = V_i$, $i = 0, 1, \ldots, m$. Считаем, что выполняются ограничения $0 \leqslant \|V_i(t)\| \leqslant w_i$, $t \geqslant 0$, $i = 0, 1, \ldots, m$, где $0 < w_i < \infty$ — максимальная величина скорости. Пусть выполняются неравенства $w_0 \leqslant w_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$.

Движение игроков предполагается простым. В каждый момент времени игрок может выбрать произвольный вектор скорости движения, норма которого не превосходит заданной величины. Скорость $V_0(t)$ считается кусочно-непрерывной функцией от времени.

Обозначим $Z(t) = (X_0(t), X_1(t), \ldots, X_m(t))$ фазовый вектор, содержащий координаты игроков, зависящие от времени. Игрок E управляет своими координатами, выбирая в каждый момент времени вектор скорости V_0, являющийся функцией от времени и от точки $Z(t)$. Функцию $V_0(t, Z(t))$, $t \geqslant 0$, назовем стратегией убегающего игрока и обозначим S_E.

Преследователь P_i в каждый момент времени выбирает вектор скорости V_i, который зависит от времени, точки $Z(t)$ и от вектора $V_0(t)$. Функцию $V_i(t) = V_i(t, Z(t), V_0(t))$, $t \geqslant 0$, назовем стратегией преследователя и обозначим S_{P_i}, $i = 1, 2, \ldots, m$. Стратегией преследования назовем вектор $S_P = (S_{P_1}, S_{P_2}, \ldots, S_{P_m})$.

Временем завершения игры назовем величину

$$T(Z(0), S_E, S_P) = \inf\{t\colon \min_{i=1,\ldots,m} (\|X_i(t) - X_0(t)\| - l_i) < 0\},$$

где $l_i > 0$ — заданные числа. Игрок E стремится максимизировать величину $T(Z(0), S_E, S_P)$, а преследователи стремятся ее минимизировать. Считаем, что $\|X_i(0) - X_0(0)\| > l_i$, $i =$

$= 1, 2, \ldots, m$. Гарантированным временем преследования для стратегии S_P назовем величину $T(Z(0), S_P) = \sup\limits_{S_E} T(Z(0), S_E, S_P)$. Из двух стратегий преследования более эффективной будем считать ту, для которой гарантированное время преследования меньше.

Гарантированное время преследования для стратегии параллельного сближения. Пусть все преследователи используют стратегию параллельного сближения. Для этого случая в работах [3–5] исследована оптимальная стратегия убегающего игрока и найдено гарантированное время преследования.

Обозначим $\operatorname{conv}\{X_1, X_2, \ldots, X_m\}$ выпуклую оболочку точек X_1, X_2, …, X_m. Пусть $\operatorname{int} X$ — внутренность множества X. Рассмотрим случай, когда точка расположения убегающего X_0 принадлежит внутренности выпуклой оболочки точек X_1, $X_2, \ldots, X_m$, т. е. выполняется условие

$$X_0 \in \operatorname{int}\operatorname{conv}\{X_1, X_2, \ldots, X_m\}. \tag{1}$$

Стратегия параллельного сближения обладает следующим свойством. Углы между векторами $\overrightarrow{X_0X_i}$ и $\overrightarrow{X_0X_j}$ на протяжении игры остаются постоянными, потому что прямые $X_0(t)X_q(t)$ и $X_0(0)X_q(0)$ параллельны при каждом $t \geqslant 0$; $q = 1, 2, \ldots, m$ [2]. Поэтому из того, что условие (1) выполняется в начальный момент следует, что это условие выполняется на протяжении всей игры.

Из теоремы 1 [3] следует существование оптимальной стратегии уклонения $S_E^* = (t_1^*, t_2^*, \ldots, t_m^*, Z_1^*, Z_2^*, \ldots, Z_m^*)$, где величины t_i^*, Z_i^* означают следующее. Представим временной промежуток $[0, T^*)$, где $T^* = T(S_E^*) = \sum\limits_{i=1}^{m} t_i^*$ — момент окончания игры, в виде объединения m непересекающихся промежутков, $[0, T^*) = \bigcup\limits_{i=1}^{m} [\tau_i^{(1)}, \tau_i^{(2)})$. Длина промежутка $[\tau_i^{(1)}, \tau_i^{(2)})$ равна t_i^*, а вектор скорости стратегии уклонения S_E^* на промежутке $[\tau_i^{(1)}, \tau_i^{(2)})$ равен $w_0 Z_i^*$, причем $\|Z_i^*\| = 1$, $i = 1, 2, \ldots, m$, n-мерные векторы Z_i^* не изменяются с течением времени.

Теорема 2 [3] утверждает, что в каждый момент времени $t \in (0, T^*)$ такой, что оптимальная стратегия $V_0^*(t)$ непрерывна, выполняется равенство $\|V_0^*(t)\| = w_0$.

Из работы [3] следует, что с любой наперед заданной точностью можно получить оптимальную стратегию уклонения, решив задачу линейного программирования следующего вида

$$\sum_{R \in \{R\}} t_R \to \max, \tag{2}$$

$$\sum_{R \in \{R\}} u_{iR} t_R \leqslant d_i - l_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, m, \tag{3}$$

$$t_R \geqslant 0, \qquad R \in \{R\}. \tag{4}$$

Здесь R — $(n-1)$-мерный вектор; $\{R\}$ — конечное множество таких векторов, определенное в [3]; t_R — переменные, величины u_{iR} определяются в [3], $d_i = \|X_i(0) - X_0(0)\|$.

Обозначим $N_i = (X_i(0) - X_0(0))/\|X_i(0) - X_0(0)\|$, $i = 1, 2, \ldots, m$. При условии равенства скоростей всех игроков в работе [4] доказана теорема, позволяющая точно определить оптимальную стратегию уклонения, используя оптимальное решение следующей задачи линейного программирования

$$\sum_{I\in\{I\}}\sum_{k=1}^{2} t_{Ik} \to \max, \tag{5}$$

$$\sum_{I\in\{I\}}\sum_{k=1}^{2} u_{iIk}t_{Ik} \leqslant d_i - l_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, m, \tag{6}$$

$$t_{Ik} \geqslant 0, \qquad I \in \{I\}, \qquad k = 1, 2. \tag{7}$$

Здесь $I = \{i_1, i_2, \ldots, i_{n-1}\}$ — подмножество множества $\{1, 2, \ldots, m\}$ такое, что система векторов $H = \{N_{i_1}, N_{i_2}, \ldots, N_{i_{n-1}}\}$ линейно независима; $\{I\}$ — множество всех таких подмножеств; N_{I1}, N_{I2} — векторы единичной длины, ортогональные каждому вектору из системы H, причем $N_{I1} = -N_{I2}$; величины u_{iIk} расчитываются по формулам

$$u_{iIk} = \begin{cases} 0, & \langle N_i, N_{Ik}\rangle < 0, \\ 2w_0\langle N_i, N_{Ik}\rangle, & \langle N_i, N_{Ik}\rangle \geqslant 0, \end{cases} \qquad i = 1, 2, \ldots, m, \qquad I \in \{I\}, \qquad k = 1, 2.$$

Пусть три игрока преследуют одного на плоскости, т. е. $m = 3$, $n = 2$. Символами α, β, γ обозначим углы X_2, X_0, X_3, X_3, X_0, X_1, X_1, X_0, X_2 соответственно. Имеем $\alpha+\beta+\gamma = 2\pi$. Считаем, что $\gamma \leqslant \beta \leqslant \alpha$. Из условия (1) вытекают неравенства $\gamma > 0$, $\alpha < \pi$. Оптимальное значение целевой функции задачи (5)–(7) обозначим T^*. В [4] выведена формула

$$T^* = \frac{1}{2w_0}\left(\frac{d_1 - l_1}{\sin\beta} + \frac{d_2 - l_2 + d_3 - l_3}{\sin\alpha}\right). \tag{8}$$

Стратегия преследования, использующая функцию Ляпунова. В каждый момент времени $t \geqslant 0$ в пространстве E^n выберем декартову систему координат таким образом, чтобы игрок E находился в ее центре, $X_0(t) = (0, 0, \ldots, 0)$, $t \geqslant 0$. Считаем, что направления осей координат не изменяются со временем. Уравнения движения преследователей имеют вид $\dot{X}_i = V_i - V_0$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Фазовым вектором будем считать $Z(t) = (X_1(t), \ldots, X_m(t))$, фазовое пространство состоит из всех фазовых векторов.

Стратегия, построенная ниже, основана на использовании функции Ляпунова $W(Z)$. Считаем, что функция $W(Z)$, определенная на фазовом пространстве и принимающая конечные вещественные значения, удовлетворяет следующим условиям:

1) функция $W(Z)$ непрерывна и ограничена снизу;

2) существует такая стратегия преследования, что при любой стратегии уклонения почти в каждый момент времени $t \geqslant 0$, предшествующий моменту окончания игры, выполняется неравенство $\dot{W}(t) \leqslant c$, где $c < 0$ — константа.

Условия 1 и 2 гарантируют существование стратегии преследования, которая обеспечивает завершение игры за конечное время. В каждый момент времени преследователи выбирают свою скорость таким образом, чтобы функция $W(t) = W(X_1(t), X_2(t), \ldots, X_m(t))$ убывала наиболее быстро.

Выберем функцию W в виде $W = T^*$, где T^* — оптимальное значение целевой функции задачи (2)–(4) или (5)–(7). Очевидно, величина W является функцией от фазовой точки Z, $W = W(Z) = W(Z(t))$.

Если преследователи применяют стратегию параллельного сближения, а убегающий применяет описанную выше оптимальную стратегию S_E^*, то справедливо равенство $\dot{W}(t) = -1$. Но если преследователи выбирают скорости из условия минимума величины $\dot{W}(t)$ и почти всегда выполняется неравенство $\dot{W}(t) < -1$, то цель будет захвачена быстрее. Неравенство $\dot{W}(t) > -1$ невозможно, так как преследователи могут использовать стратегию параллельного сближения.

На множестве точек Z, удовлетворяющих условию (1) и неравенствам $\|X_i\| > l_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$, функция $W(Z)$ является кусочно-гладкой. Если фазовая точка принадлежит области гладкости, то скорости преследования, при которых величина $\dot{W}(t)$ принимает минимальное значение, легко рассчитать, используя градиент функции $W(Z)$. В противном случае для определения скоростей преследования достаточно решить несколько простых экстремальных задач, по одной для каждой прилегающей области гладкости.

Рассмотрим подробно стратегию преследования для простой игры при условиях

$$m = 3, \qquad n = 2, \qquad w_0 = w_1 = w_2 = w_3 = w. \tag{9}$$

Из условий (8), (9) вытекает, что функция W вычисляется по формуле

$$W = \frac{1}{2w}\left(\frac{d_1 - l_1}{\sin\beta} + \frac{d_2 - l_2 + d_3 - l_3}{\sin\alpha}\right), \tag{10}$$

где $0 < \gamma \leqslant \beta \leqslant \alpha < \pi$.

Если точка $X_0 = (0, 0)$, в которой расположен убегающий, принадлежит границе множества $\operatorname{conv}\{X_1, X_2, X_3\}$, и выполняются неравенства $\|X_i\| \geqslant l_i$, $i = 1, 2, 3$, то величина $W(X_1, X_2, X_3)$ принимает значение $+\infty$. При условии (1) справедливо соотношение $W(X_1, X_2, X_3) < \infty$. Если стратегия преследования такова, что $\dot{W}(t) \leqslant -1$, то из справедливости условия (1) в начальный момент следует его справедливость на протяжении всей игры. Из этого следует, что выполняются неравенства $0 < \alpha, \beta, \gamma < \pi$.

Пусть $X_i = (x_i, y_i)$, $i = 1, 2, 3$. Если выполняются соотношения $\alpha \neq \beta$, $\alpha \neq \gamma$, $\beta \neq \gamma$, то функция $W = W(Z) = W(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3)$ имеет непрерывные частные производные по переменным x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, иначе гладкость функции W нарушается. Используя (10), найдем градиент $G = (W_{x_1}, W_{y_1}, W_{x_2}, W_{y_2}, W_{x_3}, W_{y_3})$ функции $W(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3)$ при условиях $0 < \gamma < \beta < \alpha < \pi$. Здесь W_{x_i}, W_{y_i} означают производные функции W по переменным x_i, y_i соответственно. Имеем

$$\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \sqrt{1 - \frac{\langle X_2, X_3\rangle^2}{\|X_2\|^2\|X_3\|^2}} = \frac{\sqrt{(x_2^2 + y_2^2)(x_3^2 + y_3^2) - (x_2x_3 + y_2y_3)^2}}{(\|X_2\|\|X_3\|)} =$$

$$= \frac{\sqrt{x_2^2y_3^2 + x_3^2y_2^2 - 2x_2y_2x_3y_3}}{\|X_2\|\|X_3\|} = \frac{|D_{23}|}{(d_2d_3)}. \tag{11}$$

Здесь $D_{23} = x_2y_3 - x_3y_2$, $d_i = \|X_i\|$, $i = 1, 2, 3$. Аналогично выводим

$$\sin\beta = \frac{|D_{13}|}{d_1d_3}, \tag{12}$$

где $D_{13} = x_1y_3 - x_3y_1$. Из (10)–(12) имеем

$$W = \frac{d_3}{2w}\left(d_1\frac{d_1 - l_1}{|D_{13}|} + d_2\frac{d_2 - l_2 + d_3 - l_3}{|D_{23}|}\right). \tag{13}$$

Из неравенств $0 < \alpha,\ \beta,\ \gamma < \pi$ следует, что величины D_{13} и D_{23} не равны нулю. Пусть $s_{13} = \begin{cases} -1, & D_{13} < 0, \\ 1, & D_{13} > 0. \end{cases}$ Из определения D_{13} получаем формулы $\partial|D_{13}|/\partial x_1 = s_{13}y_3$, $\partial|D_{13}|/\partial y_1 = -s_{13}x_3$, с помощью которых из (14) выводим

$$W_{x_1} = \frac{d_3}{2wD_{13}^2}\left(D_{13}x_1\left(2x_1 - \frac{l_1x_1}{d_1}\right) - s_{13}y_3d_1(d_1 - l_1)\right),$$

$$W_{y_1} = \frac{d_3}{2}wD_{13}^2\left(\left(2y_1 - \frac{l_1y_1}{d_1}\right)D_{13} + s_{13}x_3d_1(d_1 - l_1)\right).$$

Остальные компоненты градиента вычисляются аналогично.

В области гладкости функции W найдем скорости игроков, для которых достигается минимакс $\dot{W}(t)$. Пусть $\psi(t)$ — угол, образующий с осью абсцисс вектор скорости $V_0(t)$; $\varphi_i(t)$ — угол, который образует с осью абсцисс вектор скорости $V_i(t)$, $i = 1, 2, 3$. Имеем $V_0(t) = w(\cos\psi(t), \sin\psi(t))$, $V_i(t) = w(\cos\varphi_i(t), \sin\varphi_i(t))$. Система уравнений $\dot{X}_i = V_i - V_0$, $i = 1, 2, 3$, принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= w(\cos\varphi_i(t) - \cos\psi(t)), \\ \dot{y}_i(t) &= w(\sin\varphi_i(t) - \sin\psi(t)), \end{aligned} \qquad i = 1, 2, 3.$$

Обозначим $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$. Имеем

$$\begin{aligned} \min_{\varphi}\max_{\psi}\dot{W}(t) &= \min_{\varphi}\max_{\psi}\left(\sum_{i=1}^{3}(W_{x_i}\dot{x}_i(t) + W_{y_i}\dot{y}_i(t))\right) = \\ &= w\min_{\varphi}\max_{\psi}\left(\sum_{i=1}^{3}(W_{x_i}(\cos\varphi_i - \cos\psi) + W_{y_i}(\sin\varphi_i - \sin\psi))\right) = \\ &= w\min_{\varphi}\max_{\psi}\left(\sum_{i=1}^{3}(W_{x_i}\cos\varphi_i + W_{y_i}\sin\varphi_i) - \left(\cos\psi\sum_{i=1}^{3}W_{x_i} + \sin\psi\sum_{i=1}^{3}W_{y_i}\right)\right) = \\ &= w\left(\sum\nolimits_{i=1}^{3}(W_{x_i}\cos\overline{\varphi}_i + W_{y_i}\sin\overline{\varphi}_i) - \left(\cos\overline{\psi}\sum_{i=1}^{3}W_{x_i} + \sin\overline{\psi}\sum\nolimits_{i=1}^{3}W_{y_i}\right)\right). \end{aligned} \qquad (14)$$

Здесь $\overline{\varphi}_i$, $\overline{\psi}$ — значения переменных, для которых достигается минимакс.

Обозначим $\rho_0 = \sqrt{\left(\sum\limits_{i=1}^{3}W_{x_i}\right)^2 + \left(\sum\limits_{i=1}^{3}W_{y_i}\right)^2}$, $\rho_i = \sqrt{(W_{x_i})^2 + (W_{y_i})^2}$, $i = 1, 2, 3$. Из (14) вытекают соотношения

$$\cos\overline{\psi} = -\frac{\sum\limits_{i=1}^{3}W_{x_i}}{\rho_0}, \qquad \sin\overline{\psi} = -\frac{\sum\limits_{i=1}^{3}W_{y_i}}{\rho_0},$$

$$\cos\overline{\varphi}_i = -\frac{W_{x_i}}{\rho_i}, \qquad \sin\overline{\varphi}_i = -\frac{W_{y_i}}{\rho_i}, \qquad i = 1, 2, 3.$$

Таким образом, для достижения минимакса функции $\dot{W}(t)$ в момент времени t игроки должны выбирать скорости по формулам

$$V_0 = -\frac{w}{\rho_0}\begin{pmatrix}\sum\limits_{i=1}^{3} W_{x_i}\\ \sum\limits_{i=1}^{3} W_{y_i}\end{pmatrix}, \qquad V_i = -\frac{w}{\rho_i}\begin{pmatrix}W_{x_i}\\ W_{y_i}\end{pmatrix}, \qquad i = 1, 2, 3.$$

Величина $\dot{W}(t)$ при этом вычисляется следующим образом

$$\dot{W}(t) = w\left(\rho_0 - \sum_{i=1}^{3}\rho_i\right). \tag{15}$$

Во всех рассмотренных примерах величина $\dot{W}(t)$, рассчитанная по формуле (15), оказалось меньше, чем -1, что обеспечивает меньшее время захвата цели по сравнению со стратегией параллельного сближения.

Найдем скорости преследователей в случае отсутствия непрерывных частных производных, т. е. в случае выполнения условий $\gamma = \beta < \alpha$, или $\gamma < \beta = \alpha$, или $\gamma = \beta = \alpha$.

Пусть в некоторой точке $\overline{Z}$ фазового пространства выполняются соотношения $\gamma = \beta < < \alpha$. Тогда $W = \max\{W_1, W_2\}$, где

$$W_1 = \frac{1}{2w}\left(\frac{d_1 - l_1}{\sin\beta} + \frac{d_2 - l_2 + d_3 - l_3}{\sin\alpha}\right), \qquad W_2 = \frac{1}{2w}\left(\frac{d_1 - l_1}{\sin\gamma} + \frac{d_2 - l_2 + d_3 - l_3}{\sin\alpha}\right).$$

Обозначим M — множество точек Z фазового пространства, удовлетворяющих уравнению $W_1(Z) = W_2(Z)$. Очевидно, $\overline{Z} \in M$. В некоторой окрестности точки $\overline{Z}$ множество M представляет собой гладкую пятимерную поверхность. Пусть G_1 и G_2 — градиенты функций W_1 и W_2 соответственно; H — вектор единичной длины, ортогональный к поверхности M в точке $\overline{Z}$. Нетрудно видеть, что $H = z(G_1 - G_2)$, где z — действительное число. Пусть $H = (G_1 - G_2)/\|G_1 - G_2\|$.

Обозначим $V = (V_1, V_2, V_3)$, $\overline{V}_0 = (V_0, V_0, V_0)$. Считая вектор $\overline{V}_0$ постоянным, решим две экстремальные задачи (16) и (17), и из двух полученных оптимальных решений выберем то, значение целевой функции для которого меньше:

$$\langle V - \overline{V}_0, G_1\rangle \underset{V}{\to} \min, \qquad \langle V - \overline{V}_0, H\rangle \geqslant 0, \qquad \|V_i\| \leqslant w, \qquad i = 1, 2, 3, \tag{16}$$

$$\langle V - \overline{V}_0, G_2\rangle \underset{V}{\to} \min, \qquad \langle V - \overline{V}_0, H\rangle \leqslant 0, \qquad \|V_i\| \leqslant w, \qquad i = 1, 2, 3. \tag{17}$$

Случаи $\gamma < \beta = \alpha$ и $\gamma = \beta = \alpha$ рассматриваются аналогично.

Таким образом, построена стратегия преследования на основе выбранной функции Ляпунова. Из построения следует, что для каждой игры эта стратегия обеспечивает время захвата цели, которое не больше, чем время, необходимое для стратегии параллельного сближения. Вместе с тем, для всех рассмотренных примеров время завершения игры оказалось строго меньшим, чем у стратегии параллельного сближения.

Цитированная литература

1. *Айзекс Р.* Дифференциальные игры. – Москва: Мир, 1967. – 480 с.
2. *Рихсиев Б. Б.* Дифференциальные игры с простыми движениями. – Ташкент: ФАН, 1989. – 232 с.
3. *Пашко С. В., Яловец А. Л.* Максимальное время преследования для стратегии параллельного сближения // Пробл. программирования. – 2014. – № 4. – С. 78–93.
4. *Пашко С. В.* Гарантированное время преследования для стратегии параллельного сближения в случае равенства скоростей игроков // Компьют. математика. – 2014. – № 1. – С. 140–149.
5. *Пашко С. В.* Гарантированное время преследования для стратегии параллельного сближения // Доп. НАН України. – 2014. – № 4. – С. 43–48.

References

1. *Isaacs R.* Differential games, New York: Dover Publications, 1999.
2. *Rikhsiev B. B.* Simple motion differential games, Tashkent: Fan, 1989 (in Russian).
3. *Pashko S. V., Yalovets A. L.* Problems in Programming, 2014, No 4: 78–93 (in Russian).
4. *Pashko S. V.* Maximal time of pursuit for the strategy of parallel approach in case of equal speeds, in Computer Mathematics, Kiev: Institute of Cybernetics of the NAS of Ukraine, 2014, No 1: 140-149 (in Russian).
5. *Pashko S. V.* Dopov. NAN Ukraine, 2014, No 4: 43–48 (in Russian).

Поступило в редакцию 27.08.2015

С. В. Пашко

Інститут програмних систем НАН України, Київ
E-mail: pashko55@yahoo.com

Ефективні стратегії переслідування, засновані на використанні функції Ляпунова

Дана робота присвячена диференційним іграм переслідування, в яких кілька гравців доганяють одного. Критерієм виступає час захоплення цілі. Вважається, що втікач оточений переслідувачами. Для відомої стратегії паралельного зближення описана функція, що задає точний гарантований час захоплення цілі. Ця функція використовується як функція Ляпунова для побудови нової стратегії переслідування, що перевершує стратегію паралельного зближення.

Ключові слова: диференційна гра, стратегія переслідування, час переслідування, функція Ляпунова.

S. V. Pashko

Institute of Software Systems of the NAS of Ukraine, Kiev
E-mail: pashko55@yahoo.com

Effective pursuit strategies based on the use of the Lyapunov function

This paper is concerned with differential pursuit-evasion games, in which several players chase one. The time of capture of a target is used as the criterion. It is assumed that the target is surrounded by pursuers. The function that sets the exact guaranteed time of a capture of the target for the well-known strategy of parallel approach is described. This function is used as a Lyapunov function for constructing the new chase strategy, which outperforms the strategy of parallel approach.

Keywords: differential game, chase strategy, time of capture, Lyapunov function.