УДК 517.5 http://dx.doi.org/10.15407/dopovidi2016.01.019

Р. Р. Салимов

Институт математики НАН Украины, Киев

E-mail: ruslan623@yandex.ru

Об оценке меры образа шара для нижних Q-гомеоморфизмов

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины Ю. Ю. Трохимчуком)

Рассмотрены нижние Q-гомеоморфизмы относительно p-модуля при $p \geqslant n$. Для таких классов отображений установлена оценка сверху меры образа шара и, как следствие, получен аналог известной леммы Икома–Шварца. Приведенная оценка является далеко идущим обобщением хорошо известного результата М. А. Лаврентьева об оценке площади образа круга при квазиконформных отображениях. Приведены приложения этих результатов к классам Орлича–Соболева $W^{1,\varphi}_{\mathrm{loc}}$ в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$ при условии типа Кальдерона на функцию φ и, в частности, к классам Соболева $W^{1,p}_{\mathrm{loc}}$ при $p > n-1$. Построены примеры отображений, показывающие точность полученных результатов.

Ключевые слова: нижние Q-гомеоморфизмы, пространство Орлича, классы Орлича–Соболева, отображения с конечным искажением, p-модуль семейства поверхностей.

1. Основные определения. Пусть D — область в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$. Напомним, что гомеоморфизм $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ называется *отображением с конечным искажением*, если $f \in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$ и

$$\|f'(x)\|^n \leqslant K(x) J(x,f)$$

для некоторой почти всюду конечной функции $K(x) \geqslant 1$, где $f'(x)$ — якобиева матрица f, $\|f'(x)\|$ — ее операторная норма: $\|f'(x)\| = \sup\limits_{|h|=1} |f'(x)\cdot h|$, и $J(x,f) = \det f'(x)$ — якобиан отображения f.

Пусть $p \in (1,\infty)$. В дальнейшем полагаем

$$K_p(x,f) = \begin{cases} \dfrac{\|f'(x)\|^p}{J(x,f)}, & \text{если } J(x,f) \neq 0, \\ 1, & \text{если } f'(x) = 0, \\ \infty, & \text{в остальных точках.} \end{cases}$$

Впервые понятие отображения с конечным искажением введено в случае плоскости для $f \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}$ в работе [1] (см. также [2]).

Следуя Орличу, для заданной выпуклой возрастающей функции $\varphi\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$, $\varphi(0) = 0$, обозначим символом L^{φ} пространство всех функций $f\colon D \to \mathbb{R}$ таких, что

$$\int\limits_D \varphi\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right) dm(x) < \infty$$

при некотором $\lambda > 0$ (см., например, [3]). Здесь m — мера Лебега в $\mathbb{R}^n$. Пространство L^φ называется *пространством Орлича*.

Классом Орлича–Соболева $W^{1,\varphi}_{\mathrm{loc}}(D)$ называется класс всех локально интегрируемых функций f, заданных в D, с первыми обобщенными производными по Соболеву, градиент ∇f которых принадлежит классу Орлича локально в области D. Если же, более того, ∇f принадлежит классу Орлича в области D, мы пишем $f \in W^{1,\varphi}(D)$. Заметим, что по определению $W^{1,\varphi}_{\mathrm{loc}} \subset W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$. Как обычно, мы пишем $f \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}$, если $\varphi(t) = t^p$, $p \geqslant 1$. Известно, что непрерывная функция f принадлежит классу $W^{1,p}_{\mathrm{loc}}$ тогда и только тогда, когда $f \in ACL^p$, т. е. если f локально абсолютно непрерывна на почти всех прямых, параллельных координатным осям, а первые частные производные f локально интегрируемы в степени p в области D (см., например, [4, разд. 1.1.3]).

Далее, если f — локально интегрируемая вектор-функция n вещественных переменных $x_1, \ldots, x_n$, $f = (f_1, \ldots, f_m)$, $f_i \in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$, $i = 1, \ldots, m$, и

$$\int\limits_D \varphi(|\nabla f(x)|)\, dm(x) < \infty,$$

где $|\nabla f(x)| = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{m} \sum\limits_{j=1}^{n} (\partial f_i / \partial x_j)^2}$, то мы снова пишем $f \in W^{1,\varphi}_{\mathrm{loc}}$. Мы также используем обозначение $W^{1,\varphi}_{\mathrm{loc}}$ в случае более общих функций φ, чем в классах Орлича, всегда предполагающих выпуклость функции φ и ее нормировку $\varphi(0) = 0$.

2. Нижние Q-гомеоморфизмы относительно p-модуля. Для любого числа $r > 0$ и $x_0 \in \mathbb{R}^n$ обозначим

$$B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n\colon |x - x_0| < r\}, \qquad S(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n\colon |x - x_0| = r\}.$$

Пусть

$$B_r = B(0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n\colon |x| < r\}, \qquad \mathbb{B}^n\colon = B(0,1),$$
$$S_r = S(0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n\colon |x| = r\}, \qquad \mathbb{S}^n\colon = S(0,1),$$

Ω_n — объем единичного шара в $\mathbb{R}^n$, ω_{n-1} — площадь единичной сферы $\mathbb{S}^{n-1}$ в $\mathbb{R}^n$.

Следуя [5, разд. 9.2, гл. 9], далее *k-мерной поверхностью* S в $\mathbb{R}^n$ называется произвольное непрерывное отображение $S\colon \omega \to \mathbb{R}^n$, где ω — открытое множество в $\overline{\mathbb{R}^k} := \mathbb{R}^k \bigcup \{\infty\}$ и $k = 1, \ldots, n-1$. *Функцией кратности* поверхности S называется число прообразов

$$N(S, y) = \operatorname{card} S^{-1}(y) = \operatorname{card}\{x \in \omega\colon S(x) = y\}, \qquad y \in \mathbb{R}^n.$$

Другими словами, символ $N(S, y)$ обозначает кратность накрытия точки y поверхностью S. Известно, что функция кратности является полунепрерывной снизу и, значит, измерима относительно произвольной хаусдорфовой меры H^k (см. [5, разд. 9.2]).

Для борелевской функции $\rho\colon \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ ее *интеграл над поверхностью* S определяется равенством

$$\int\limits_S \rho\, d\mathcal{A} := \int\limits_{\mathbb{R}^n} \rho(y) N(S, y)\, dH^k y.$$

Пусть Γ — семейство k-мерных поверхностей S. Борелева функция $\rho\colon \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$ называется *допустимой* для семейства Γ, пишут $\rho \in \operatorname{adm}\Gamma$, если

$$\int\limits_S \rho^k d\mathcal{A} \geqslant 1$$

для каждой поверхности $S \in \Gamma$. Пусть $p \in (1,\infty)$ — заданное фиксированное число. Тогда *p-модулем* семейства Γ называется величина

$$M_p(\Gamma) = \inf_{\rho\in\operatorname{adm}\Gamma} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \rho^p(x)\, dm(x).$$

Будем говорить, что свойство P имеет место для *p-почти всех* (p-п. в.) k-мерных поверхностей S семейства Γ, если подсемейство всех поверхностей семейства Γ, для которых свойство P нарушается, имеет p-модуль нуль.

Говорят (см. [5, разд. 9.2]), что измеримая по Лебегу функция $\rho\colon \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$ является *обобщенно p-допустимой* для семейства Γ, состоящего из $(n-1)$-мерных поверхностей S в $\mathbb{R}^n$, пишут $\rho \in \operatorname*{ext}_p \operatorname{adm}\Gamma$, если

$$\int\limits_S \rho^{n-1}(x)\, d\mathcal{A} \geqslant 1$$

для p-почти всех $S \in \Gamma$.

В работе [6, разд. 13] Ф. Геринг определил K-квазиконформное отображение как гомеоморфизм, изменяющий модуль кольцевой области не более чем в K раз. Следующее понятие мотивировано кольцевым определением Геринга.

Пусть D и D' — области в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, $x_0 \in D$, $Q\colon D \to (0,\infty)$ — измеримая по Лебегу функция. Гомеоморфизм $f\colon D \to D'$ будем называть *нижним Q-гомеоморфизмом относительно p-модуля в точке* x_0, если

$$M_p(f\Sigma_R) \geqslant \inf_{\rho\in\operatorname{ext}_p\operatorname{adm}\Sigma_R} \int\limits_R \frac{\rho^p(x)}{Q(x)} dm(x)$$

для каждого кольца

$$R = R(x_0,\varepsilon_1,\varepsilon_2) = \{x \in \mathbb{R}^n\colon \varepsilon_1 < |x - x_0| < \varepsilon_2\}, \qquad 0 < \varepsilon_1 \leqslant \varepsilon_2 < d_0,$$

где $d_0 = \operatorname{dist}(x_0, \partial D)$, а Σ_R обозначает семейство всех сфер $S(x_0,r)$, $r \in (\varepsilon_1,\varepsilon_2)$.

В работе [7] показано, что гомеоморфизмы f с конечным искажением, принадлежащие классам $W^{1,\varphi}_{\mathrm{loc}}$ в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$ при условии типа Кальдерона на функцию φ, в частности $f \in W^{1,q}_{\mathrm{loc}}$, $q > n-1$, являются нижними Q-гомеоморфизмами относительно конформного модуля.

Заметим, что соответствующий плоский случай был изучен в работе [8], где установлено, что любой гомеоморфизм f конечного искажения на плоскости является нижним Q-гомеоморфизмом относительно p-модуля. В работах [9, 10] приводятся приложения нижних Q-гомеоморфизмов к исследованию локального и граничного поведения гомеоморфных решений с обобщенными производными и к задаче Дирихле для уравнений Бельтрами с вырождением.

3. Оценка меры образа шара. В этом пункте найдена оценка меры образа шара при нижних Q-гомеоморфизмах в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, и, как следствие, получен аналог леммы Икома–Шварца. Впервые оценка площади образа круга при квазиконформных отображениях встречается в монографии Лаврентьева М. А. [11]. Кругликовым В. И. была получена оценка меры образа шара для отображений квазиконформных в среднем в $\mathbb{R}^n$ (см. [12, лемма 9]).

Теорема 1. *Пусть $Q\colon \mathbb{B}^n \to (0,\infty)$ — измеримая по Лебегу функция и $f\colon \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^n$ — нижний Q-гомеоморфизм относительно p-модуля. Тогда при $p = n$ имеет место оценка*

$$m(fB_r) \leqslant \Omega_n \exp\left(-n\omega_{n-1}^{1/(n-1)} \int\limits_r^1 \frac{d\tau}{\|Q\|_{n-1}(\tau)}\right),$$

а при $p > n$

$$m(fB_r) \leqslant \Omega_n \left(1 + \omega_{n-1}^{(p-n+1)/(n-1)}(p-n) \int\limits_r^1 \frac{d\tau}{\|Q\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(\tau)}\right)^{-n/(p-n)},$$

где

$$\|Q\|_{(n-1)/(p-n+1)}(\tau) = \left(\int\limits_{S_\tau} Q^{(n-1)/(p-n+1)}(x)\, d\mathcal{A}\right)^{(p-n+1)/(n-1)}.$$

Из теоремы 1 следует аналог известной леммы Икома–Шварца (см. [13, предложение 1]).

Теорема 2. *Пусть $Q\colon \mathbb{B}^n \to (0,\infty)$ — измеримая по Лебегу функция и $f\colon \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^n$ — нижний Q-гомеоморфизм относительно p-модуля с нормировкой $f(0) = 0$. Тогда при $p > n$ имеет место оценка*

$$\liminf_{x\to 0} |f(x)| \left(1 + \omega_{n-1}^{(p-n+1)/(n-1)}(p-n) \int\limits_{|x|}^1 \frac{d\tau}{\|Q\|_{(n-1)/(p-n+1)}(\tau)}\right)^{1/(p-n)} \leqslant 1,$$

а при $p = n$

$$\liminf_{x\to 0} |f(x)| \exp\left(\omega_{n-1}^{1/(n-1)} \int\limits_{|x|}^1 \frac{d\tau}{\|Q\|_{n-1}(\tau)}\right) \leqslant 1,$$

где

$$\|Q\|_{(n-1)/(p-n+1)}(\tau) = \left(\int\limits_{S_\tau} Q^{(n-1)/(p-n+1)}(x)\, d\mathcal{A}\right)^{(p-n+1)/(n-1)}.$$

4. Приложения к классам Орлича–Соболева. В этом пункте найдена точная оценка меры образа шара при отображениях класса Орлича–Соболева $W^{1,\varphi}_{\mathrm{loc}}$ в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$ при условии типа Кальдерона на функцию φ и, как следствие, получен аналог леммы Икома–Шварца.

Лемма 1. *Пусть D и D' — области в $\mathbb{R}^n$. Предположим, что $\varphi\colon (0,\infty)\to(0,\infty)$ — неубывающая функция такая, что для некоторого $t_*\in(0,\infty)$*

$$\int\limits_{t_*}^{\infty}\left[\frac{t}{\varphi(t)}\right]^{1/(n-2)}dt<\infty. \tag{1}$$

Тогда любой гомеоморфизм $f\colon D\to D'$ конечного искажения класса $W^{1,\varphi}_{\mathrm{loc}}$ является нижним $K_p(x,f)$-гомеоморфизмом относительно p-модуля с $p>n-1$.

Теорема 3. *Предположим, что $f\colon\mathbb{B}^n\to\mathbb{B}^n$ — гомеоморфизм с конечным искажением класса $W^{1,\varphi}_{\mathrm{loc}}$, где φ удовлетворяет условию (1). Тогда при $p=n$ имеет место оценка*

$$m(fB_r)\leqslant\Omega_n\exp\left(-n\omega_{n-1}^{1/(n-1)}\int\limits_r^1\frac{d\tau}{\|K_n\|_{n-1}(\tau)}\right), \tag{2}$$

а при $p>n$

$$m(fB_r)\leqslant\Omega_n\left(1+\omega_{n-1}^{(p-n+1)/(n-1)}(p-n)\int\limits_r^1\frac{d\tau}{\|K_p\|_{(n-1)/(p-n+1)}(\tau)}\right)^{-n/(p-n)}, \tag{3}$$

где

$$\|K_p\|_{(n-1)/(p-n+1)}(\tau)=\left(\int\limits_{S_\tau}[K_p(x,f)]^{(n-1)/(p-n+1)}d\mathcal{A}\right)^{(p-n+1)/(n-1)}.$$

Замечание 1. Пусть $p\geqslant n$ и $f_p\colon\mathbb{B}^n\to\mathbb{B}^n$, где

$$f_n(x)=\frac{x}{|x|}|x|^{1/K},\qquad f(0)=0,\qquad K\geqslant1, \tag{4}$$

$$f_p(x)=\frac{x}{|x|}(1-K^{-1}+K^{-1}|x|^{n-p})^{-1/(p-n)},\qquad f(0)=0,\qquad K\geqslant1. \tag{5}$$

Примеры (4) и (5) показывают точность оценок (2) и (3).

Комбинируя лемму 1 с теоремой 2, получаем аналог леммы Икома–Шварца для отображений классов Орлича–Соболева.

Теорема 4. *Предположим, что $f\colon\mathbb{B}^n\to\mathbb{B}^n$ — гомеоморфизм с конечным искажением класса $W^{1,\varphi}_{\mathrm{loc}}$ с условием (1) и $f(0)=0$. Тогда при $p>n$ имеет место оценка*

$$\liminf_{x\to0}|f(x)|\left(1+\omega_{n-1}^{(p-n+1)/(n-1)}(p-n)\int\limits_{|x|}^1\frac{d\tau}{\|K_p\|_{(n-1)/(p-n+1)}(\tau)}\right)^{1/(p-n)}\leqslant1, \tag{6}$$

а при $p=n$

$$\liminf_{x\to0}|f(x)|\exp\left(\omega_{n-1}^{1/(n-1)}\int\limits_{|x|}^1\frac{d\tau}{\|K_n\|_{n-1}(\tau)}\right)\leqslant1, \tag{7}$$

где

$$\|K_p\|_{(n-1)/(p-n+1)}(\tau) = \left(\int\limits_{S_\tau} [K_p(x,f)]^{(n-1)/(p-n+1)}\, d\mathcal{A}\right)^{(p-n+1)/(n-1)}.$$

Замечание 2. Примеры (4) и (5) показывают точность оценок (6) и (7).

Таким образом, метод модулей еще раз продемонстрировал свою эффективность при исследовании современных классов отображений.

Цитированная литература

1. *Iwaniec T., Sverák V.* On mappings with integrable dilatation // Proc. Amer. Math. Soc. – 1993. – **118**. – P. 181–188.
2. *Iwaniec T., Martin G.* Geometric Function Theory and Non-linear Analysis. – Oxford: Clarendon Press, 2001. – 568 p.
3. *Красносельский М. А., Рутицкий Я. Б.* Выпуклые функции и пространства Орлича. – Москва: Физматгиз, 1958. – 278 с.
4. *Мазья В. Г.* Пространства С. Л. Соболева. – Ленинград: Изд-во Ленингр. ун-та, 1985. – 416 с.
5. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* Moduli in Modern Mapping Theory. – New York etc.: Springer, 2009. – 367 p. – (Springer Monographs in Mathematics).
6. *Gehring F. W.* Rings and quasiconformal mappings in space // Trans. Amer. Math. Soc. – 1962. – **103**. – P. 353–393.
7. *Ковтонюк Д. А., Рязанов В. И., Салимов Р. Р., Севостьянов Е. А.* К теории классов Орлича–Соболева // Алгебра и анализ. – 2013. – **25**, № 6. – С. 50–102.
8. *Салимов Р. Р.* Нижние оценки p-модуля и отображения класса Соболева // Алгебра и анализ. – 2014. – **26**, № 6. – С. 143–171.
9. *Ryazanov V., Salimov R., Srebro U., Yakubov E.* On Boundary Value Problems for the Beltrami Equations // Contemp. Math. – 2013. – **591**. – P. 211–242.
10. *Ковтонюк Д. А., Петков И. В., Рязанов В. И., Салимов Р. Р.* Граничное поведение и задача Дирихле для уравнений Бельтрами // Алгебра и анализ. – 2013. – **25**, № 4. – С. 101–124.
11. *Лаврентьев М. А.* Вариационный метод в краевых задачах для систем уравнений эллиптического типа. – Москва: Изд-во АН СССР, 1962. – 136 с.
12. *Кругликов В. И.* Емкости конденсаторов и пространственные отображения, квазиконформные в среднем // Матем. сб. – 1986. – **130**, № 2. – С. 185–206.
13. *Ikoma K.* On the distortion and correspondence under quasiconformal mappings in space // Nagoya Math. J. – 1965. – **25**. – P. 175–203.

References

1. *Iwaniec T., Sverák V.* Proc. Amer. Math. Soc., 1993, **118**: 181–188.
2. *Iwaniec T., Martin G.* Geometrical Function Theory and Non-Linear Analysis, Oxford: Clarendon Press, 2001.
3. *Krasnoselskii M. A., Rutickii J. B.* Convex functions and Orlicz spaces, Moscow: Fizmatgiz, 1958 (in Russian).
4. *Maz'ya V. G.* Sobolev spaces, Leningrad: Izd-vo Leningr. Univ., 1985 (in Russian).
5. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* Moduli in Modern Mapping Theory, Springer Monographs in Mathematics, New York etc.: Springer, 2009.
6. *Gehring F. W.* Trans. Amer. Math. Soc., 1962, **103**: 353–393.
7. *Kovtonyuk D. A., Ryazanov V. I., Salimov R. R., Sevost'yanov E. A.* Algebra i Analiz, 2013, **25**, No 6: 50–102 (in Russian).
8. *Salimov R.* Algebra i Analiz, 2014, **26**, No 6: 143–171 (in Russian).
9. *Ryazanov V., Salimov R., Srebro U., Yakubov E.* Contemp. Math., 2013, **591**: 211–242.

10. *Kovtonyuk D. A., Petkov I. V., Ryazanov V. I., Salimov R. R.* Algebra i Analiz, 2013, **25**, No 4: 101–124 (in Russian).
11. *Lavrent'ev, M. A.*, The variational method in boundary-value problems for systems of equations of elliptic type, Moscow: Izd-vo AN SSSR, 1962 (in Russian).
12. *Kruglikov V. I.* Mat. Sb., 1986, **130**, No 2: 185–206 (in Russian).
13. *Ikoma K.* Nagoya Math. J., 1965, **25**: 175–203.

Поступило в редакцию 23.06.2015

Р. Р. Салімов

Інститут математики НАН України, Київ

E-mail: ruslan623@yandex.ru

Про оцінку міри образу кулі для нижніх Q-гомеоморфізмів

Розглянуто нижні Q-гомеоморфізми відносно p-модуля при $p \geqslant n$. Для таких класів відображень встановлено оцінку зверху міри образу кулі і, як наслідок, отримано аналог відомої леми Ікома–Шварца. Наведена оцінка є далекосяжним узагальненням добре відомого результату М. О. Лаврентьєва про оцінку площі образу круга при квазіконформних відображеннях. Наведено застосування цих результатів до класів Орліча–Соболева $W^{1,\varphi}_{\mathrm{loc}}$ в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$ за умовою типу Кальдерона на функцію φ і, зокрема, до класів Соболєва $W^{1,p}_{\mathrm{loc}}$ при $p > n-1$. Побудовані приклади відображень, що показують точність отриманих результатів.

Ключові слова: нижні Q-гомеоморфізми, простір Орліча, класи Орліча–Соболєва, відображення зі скінченним спотворенням, p-модуль сім'ї поверхонь.

R. R. Salimov

Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine, Kiev

E-mail: ruslan623@yandex.ru

On estimations of the measure of the image of a ball under lower Q-homeomorphisms

We consider the lower Q-homeomorphisms with respect to p-modulus for $p \geqslant n$. For such classes of mappings, we establish an upper estimate of the measure of the image of balls and, as a consequence, obtain one analog of the known Ikoma–Schwartz lemma. The present estimate is a far-reaching generalization of the well-known Lavrent'ev result on the estimate of the area of the image of a disk under quasiconformal mappings. We give also the corresponding applications of these results to the Orlicz–Sobolev classes $W^{1,\varphi}_{\mathrm{loc}}$ in $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, under a condition of the Calderon type on φ and, in particular, to the Sobolev classes $W^{1,p}_{\mathrm{loc}}$ with $p > n-1$. The constructed examples of mappings demonstrate a precision of the obtained results.

Keywords: lower Q-homeomorphism, Orlicz space, Orlicz–Sobolev classes, mappings with finite distortion, p-modulus of a family of surfaces.