

Академік НАН України В. Л. Макаров<sup>1</sup>, І. І. Демків<sup>2</sup><sup>1</sup>Інститут математики НАН України, Київ<sup>2</sup>Національний університет "Львівська політехніка"*E-mail:* makarovimath@gmail.com, ihor.demkiv@gmail.com

## Інтегральний інтерполяційний ланцюговий дріб типу Тіле

*Побудовано інтерполяційний інтегральний ланцюговий дріб типу Тіле, який є природним узагальненням класичного дроби Тіле.*

**Ключові слова:** інтерполяційні вузли, ланцюговий дріб, дріб Тіле.

Узагальнення дроби Тіле досліджували ряд авторів (див., наприклад, [1–3] та ін.). В роботі [4] було показано, як граничним переходом у інтерполяційному інтегральному поліномі типу Ньютона одержати інтерполяційний інтегральний поліном типу Ерміта. Тому природним чином виникло питання: чи не можна подібним граничним переходом у інтерполяційному інтегральному ланцюговому дроби (ПЛД) [5] перейти до інтерполяційного інтегрального ланцюгового дроби типу Ерміта із довільною кратністю кожного з інтерполяційних вузлів. Стосовно дробового випадку з точки зору складності ситуація виявилася протилежною. Справедливим є таке твердження.

**Лема.** *Нехай  $Q_n^{IS}(x)$  — скалярний інтерполяційний ланцюговий дріб, одержаний з інтегрального ланцюгового дроби  $Q_n^I(x(\cdot))$  у припущенні, що всі інтерполяційні вузли з карткаса  $x_i(z)$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ , і аргумент  $x(z)$  є тотожними сталими. Для того щоб існував ПЛД типу Ерміта  $Q_n^E(x(\cdot))$  з довільною кратністю інтерполяційних вузлів, отриманий граничним переходом з  $Q_n^I(x(\cdot))$ , необхідно і достатньо, щоб існував ЛД типу Ерміта  $Q_n^E(x)$  з такою ж кратністю інтерполяційних вузлів, одержаний граничним переходом з  $Q_n^{IS}(x)$ .*

Доведення не викликає жодних ускладнень.

Проілюструємо вищенаведене твердження на такому прикладі. Для сталих  $x(z)$ ,  $x_i(z)$ ,  $i = 0, 1, 2$ , будемо мати

$$Q_2^{IS}(x) = F(x_0) + \frac{(x - x_0)l_1}{1 + (x - x_0)(x - x_1)l_2}, \quad (1)$$

де  $l_1, l_2$  — інтеграли від відповідних ядер. Покладемо  $x_1 = x_0 + \alpha$  та підставимо цей вираз у (1). Тоді одержимо

$$l_1 = \frac{f(x_0 + \alpha) - f(x_0)}{\alpha}, \quad l_2 = \frac{f(x_0 + 2\alpha) - 2f(x_0 + \alpha) + f(x_0)}{2\alpha^2(f(x_0) - f(x_0 + 2\alpha))}.$$

Перейдемо до границі, коли  $\alpha \rightarrow 0$ . Отримаємо

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} Q_2^{IS}(x) = f(x_0). \quad (2)$$

Із (2) випливає, що не існує інтерполяційного дробу типу Ерміта  $Q_2^E(x)$ , у якого  $x_0$  є трикратним інтерполяційним вузлом, а отже, не існує ПЛД  $Q_2^E(x(\cdot))$  типу Ерміта з трикратним інтерполяційним вузлом.

Таким чином, одержати ПЛД типу Ерміта шляхом граничного переходу з ПЛД типу Ньютона можна тільки тоді, коли кожний з інтерполяційних вузлів має кратність не вище двох.

Отже, виникають такі задачі:

1) знайти такий звичайний ПЛД, щоб шляхом граничного переходу одержати звичайний ПЛД типу Ерміта з довільною кратністю кожного з вузлів;

2) узагальнити одержаний результат на ПЛД типу Ерміта.

Розв'язком першої задачі є інтерполяційний дріб Тіле. Так, з двоповерхового ПЛД Тіле

$$T_2(x) = f(x_0) + \frac{(x - x_0)f(x_0, x_1)}{1 + (x - x_1)\frac{f(x_0, x_1, x_2)}{f(x_0, x_2)}} \quad (3)$$

застосуванням граничного переходу одержуємо ПЛД типу Ерміта з трикратним інтерполяційним вузлом

$$T_2^E(x) = (f(x_0) + \frac{(x - x_0)f'(x_0)}{1 - \frac{(x - x_0)f''(x_0)}{2[f'(x_0)]}}$$

(після очевидних перетворень).

Справедливість твердження леми для загального випадку випливає із результатів, викладених у монографії [6].

Переходимо до розв'язування другої задачі. Почнемо з часткового випадку. Узагальнення формули Тіле на двоповерховий ПЛД є таким:

$$\begin{aligned} T_2(x(\cdot)) &= F(x_0(\cdot)) + \frac{l_1(x(\cdot) - x_0(\cdot))}{1 + l_2(x(\cdot) - x_1(\cdot))}, \\ l_1(x(\cdot) - x_0(\cdot)) &= \int_0^1 [x(s_1) - x_0(s_1)] K_1(s_1) ds_1 = \\ &= - \int_0^1 \frac{x(s_1) - x_0(s_1)}{x_1(s_1) - x_0(s_1)} \frac{d}{ds_1} [F(x_{0,1}(\cdot, s_1)) - F(x_0(\cdot))] ds_1, \\ l_2(x(\cdot) - x_1(\cdot)) &= \int_0^1 [x(s_2) - x_1(s_2)] K_2(s_2) ds_2 = \end{aligned} \quad (4)$$

$$= - \int_0^1 \frac{x(s_2) - x_1(s_2)}{x_2(s_2) - x_1(s_2)} \frac{d}{ds_2} \left[ \frac{\int_0^1 K_1(s_1) [x_{1,2}(s_1, s_2) - x_0(s_1)] ds_1}{F(x_{1,2}(\cdot, s_2)) - F(x_0(\cdot))} \right] ds_2,$$

$$x_{i-1,i}(s_{i-1}, s_i) = x_{i-1}(s_{i-1}) + H(s_{i-1} - s_i)(x_i(s_{i-1}) - x_{i-1}(s_{i-1})).$$

Перевіримо інтерполяційні умови. Підставимо в (4)  $x_{1,2}(z, \xi) = x_1(z) + H(z - \xi)(x_2(z) - x_1(z))$ , тоді отримаємо

$$\begin{aligned}
 & l_2(x_{1,2}(\cdot, \xi) - x_1(\cdot)) = \\
 & = - \int_0^1 \frac{x_{1,2}(s_2, \xi) - x_1(s_2)}{x_2(s_2) - x_1(s_2)} \frac{d}{ds_2} \left[ \frac{\int_0^1 K_1(s_1)[x_{1,2}(s_1, s_2) - x_0(s_1)] ds_1}{F(x_{1,2}(\cdot, s_2)) - F(x_0(\cdot))} \right] ds_2 = \\
 & = - \int_{\xi}^1 \frac{d}{ds_2} \left[ \left( \int_0^{s_2} K_1(s_1)[x_1(s_1) - x_0(s_1)] ds_1 + \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \int_{s_2}^1 K_1(s_1)[x_2(s_1) - x_0(s_1)] ds_1 \right) (F(x_{1,2}(\cdot, s_2)) - F(x_0(\cdot)))^{-1} \right] ds_2 = \\
 & = - \frac{\int_0^1 K_1(s_1)[x_1(s_1) - x_0(s_1)] ds_1}{F(x_1(\cdot)) - F(x_0(\cdot))} + \\
 & \quad + \frac{\int_0^{\xi} K_1(s_1)[x_1(s_1) - x_0(s_1)] ds_1 + \int_{\xi}^1 K_1(s_1)[x_2(s_1) - x_0(s_1)] ds_1}{F(x_{1,2}(\cdot, \xi)) - F(x_0(\cdot))} = \\
 & = -1 + \frac{-F(x_{0,1}(\cdot, \xi)) + F(x_1(\cdot)) + \int_{\xi}^1 K_1(s_1)[x_2(s_1) - x_0(s_1)] ds_1}{F(x_{1,2}(\cdot, \xi)) - F(x_0(\cdot))}, \\
 & l_1(x_{1,2}(\cdot, \xi) - x_0(\cdot)) = -F(x_{0,1}(\cdot, \xi)) + F(x_1(\cdot)) + \int_{\xi}^1 K_1(s_1)[x_2(s_1) - x_0(s_1)] ds_1
 \end{aligned}$$

i

$$T_2(x_{1,2}(\cdot, \xi)) = F(x_0(\cdot)) + \frac{l_1(x_{1,2}(\cdot, \xi) - x_1(\cdot))}{1 + l_2(x_{1,2}(\cdot, \xi) - x_1(\cdot))} = F(x_{1,2}(\cdot, \xi)),$$

тобто інтерполяційна умова на континуальному вузлі  $x_{1,2}(z, \xi) = x_1(z) + H(z - \xi)(x_2(z) - x_1(z))$  є виконаною. Перевірка виконання інтерполяційної умови у вузлі  $x_0(z)$  не викликає жодних ускладнень.

Перейдемо до одержання загальної інтегральної формули типу Тіле. Шукаємо цю формулу, використовуючи форму запису У. Джонса, В. Трона [7] у вигляді

$$T_n(x(\cdot)) = F(x_0(\cdot)) + \frac{l_1(x(\cdot) - x_0(\cdot))}{|1} + \frac{l_2(x(\cdot) - x_1(\cdot))}{|1} + \dots$$

$$\dots + \frac{l_{n-1}(x(\cdot) - x_{n-2}(\cdot))|}{|1|} + \frac{l_n(x(\cdot) - x_{n-1}(\cdot))|}{|1|}. \quad (5)$$

Позначимо у такий спосіб  $i$ -й підхідний дріб дроби (5) (див. [6, 7]):

$$\begin{aligned} T_i(x(\cdot)) &= \frac{A_i(x(\cdot))}{B_i(x(\cdot))}, \\ B_i(x(\cdot)) &= B_{i-1}(x(\cdot)) + l_i(x(\cdot) - x_{i-1}(\cdot))B_{i-2}(x(\cdot)), \\ i = 1, 2, \dots, \quad B_{-1}(x(\cdot)) &= 0, \quad B_0(x(\cdot)) = 1, \\ A_i(x(\cdot)) &= A_{i-1}(x(\cdot)) + l_i(x(\cdot) - x_{i-1}(\cdot))A_{i-2}(x(\cdot)), \\ i = 1, 2, \dots, \quad A_{-1}(x(\cdot)) &= 1, \quad A_0(x(\cdot)) = F(x_0(\cdot)). \end{aligned} \quad (6)$$

Із (6) знаходимо

$$l_i(x(\cdot) - x_{i-1}(\cdot)) = -\frac{A_{i-1}(x(\cdot)) - T_i(x(\cdot))B_{i-1}(x(\cdot))}{A_{i-2}(x(\cdot)) - T_i(x(\cdot))B_{i-2}(x(\cdot))}, \quad i = 1, 2, \dots \quad (7)$$

Аналіз скалярної формули Тіле вказує на структуру, яку повинен мати функціонал  $l_i(x(\cdot) - x_{i-1}(\cdot))$ , а саме:

$$l_i(x(\cdot) - x_{i-1}(\cdot)) = \int_0^1 K_i(s_i)[x(s_i) - x_{i-1}(s_i)] ds_i. \quad (8)$$

Із (7), (8) ми можемо визначити ядро  $K_i(s)$ . Замінімо  $x(s)$  на

$$x_{i-1,i}(s, \xi) = x_{i-1}(s) + H(s - \xi)[x_i(s) - x_{i-1}(s)].$$

Тоді після диференціювання за змінною  $\xi$  одержуємо

$$K_i(\xi) = \frac{1}{x_i(\xi) - x_{i-1}(\xi)} \frac{d}{d\xi} \frac{A_{i-1}(x_{i-1,i}(\cdot, \xi)) - F(x_{i-1,i}(\cdot, \xi))B_{i-1}(x_{i-1,i}(\cdot, \xi))}{A_{i-2}(x_{i-1,i}(\cdot, \xi)) - F(x_{i-1,i}(\cdot, \xi))B_{i-2}(x_{i-1,i}(\cdot, \xi))}. \quad (9)$$

**Теорема.** *Нехай для функціонала  $F(x(\cdot))$ , що діє з простору кусково-неперервних функцій зі скінченною кількістю розривів першого роду  $Q^{(0)}[0, 1]$  у  $R^1$ , виконуються умови*

$$F(x_i(\cdot)) = g_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad F(x_{n-1,n}(\cdot, \xi)) = g_{n-1,n}(\xi), \quad \xi \in [0, 1],$$

*і нехай  $F(x(\cdot))$  належить до класу функціоналів, для яких визначений та існує інтегральний дріб (5). Тоді цей дріб є ПЛД на множині інтерполяційних вузлів  $x_i(s)$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ ,  $x_{n-1,n}(s, \xi)$ ,  $\xi \in [0, 1]$ , тобто задовольняє умови*

$$T_n(x_i(\cdot)) = g_i, \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad T_n(x_{n-1,n}(\cdot, \xi)) = g_{n-1,n}(\xi), \quad \xi \in [0, 1],$$

*остання з яких є континуальною.*

Неважко переконалися, що коли  $x(s)$ ,  $x_i(s)$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ , є сталими, формула (5) з урахуванням (7)–(9) має вигляд скалярного дроби Тіле. Дійсно, в цьому випадку із (9) отримуємо інтерполяційний дріб

$$F(x_0) + \frac{(x - x_0)l_1(1)|}{|1|} + \frac{(x - x_1)l_2(1)|}{|1|} + \dots + \frac{(x - x_{n-2})l_{n-1}(1)|}{|1|} + \frac{(x - x_{n-1})l_n(1)|}{|1|},$$

який буде дробом Тіле за умови виконання співвідношень

$$v_i(x_i) = \frac{1}{l_i(1)}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (10)$$

де  $v_i(x_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , — обернені розділені різниці (див. [7]). Доведення (10) здійснюється за допомогою методу математичної індукції.

Отже, ми показали, що для ПЛД (5) вищенаведена лема є справедливою.

Для того щоб одержати ПЛД типу Тіле, який задовольняє континуальні інтерполяційні умови

$$T_n(x_{i-1,i}(\cdot, \xi)) = F_n(x_{i-1,i}(\cdot, \xi)), \quad \xi \in [0, 1], \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

треба визначити ядра у формулах (8) у іншій спосіб. Для ілюстрації зупинимося на двоповерховому дробі та заради спрощення візьмемо за каркас

$$x_1(s) = x_0(s) + \alpha, \quad x_2(s) = x_0(s) + \alpha + \gamma.$$

Тоді для визначення ядер  $K_i(s_i)$ ,  $i = 1, 2$ , отримаємо систему інтегральних рівнянь

$$T_2(x_{i-1,i}(\cdot, \xi)) = F(x_{i-1,i}(\cdot, \xi)), \quad i = 1, 2,$$

розв'язком якої є

$$K_2(\xi) = \frac{d}{d\xi} \left\{ \frac{1}{\alpha} [F(x_{0,1}(\cdot, \xi)) - F(x_0(\cdot, \xi))] - \frac{1}{\gamma} \left[ \frac{F(x_{1,2}(\cdot, \xi)) - F(x_0(\cdot))}{F(x_2(\cdot)) - F(x_0(\cdot))} (\alpha + \gamma) - \alpha \right] \times \right. \\ \left. \times \int_0^1 K_1(s_1) ds_1 \right\} [F(x_{0,1}(\cdot, \xi)) + F(x_{1,2}(\cdot, \xi)) - 2F(x_0(\cdot))]^{-1},$$

$$\int_0^1 K_1(s_1) ds_1 = \frac{1}{\alpha} [F(x_1(\cdot)) - F(x_0(\cdot))],$$

$$K_1(\xi) = -\frac{1}{\alpha} \frac{d}{d\xi} [F(x_{0,1}(\cdot, \xi)) - F(x_0(\cdot))] \left[ 1 - \alpha \int_0^\xi K_2(s_2) ds_2 \right].$$

Якщо  $x(s)$ ,  $x_0(s)$  тотожно стали, то з попередніх формул одержимо дріб Тіле у формі (3).

Наведемо деякі міркування стосовно граничного переходу у формулі (5) з метою одержання ПЛД типу Тіле–Ерміта, і зробимо це на прикладі часткового випадку (4). Нехай

$$x_1(s) = x_0(s) + \alpha, \quad x_2(s) = x_0(s) + 2\alpha.$$

Тоді для всіх  $x(s)$ , для яких  $x(s) - x_0(s) \equiv \text{const}$ , існує границя дроби (4), коли  $\alpha \rightarrow 0$ , і вона є такою:

$$T_2^E(x(\cdot)) = F(x_0(\cdot)) + \frac{(x(0) - x_0(0))F'(x_0(\cdot))}{1 - \frac{(x(0) - x_0(0))F''(x_0(\cdot))}{2[F'(x_0(\cdot))]} \quad (11)$$

Неважко перевірити, що дріб (11) дійсно має трикратний інтерполяційний вузол  $x_0(s)$ .

У загальному випадку граничного переходу із (6), коли  $\alpha$  прямує до 0 і за інтерполяційні вузли вибрано  $x_i(s) = x_0(s) + i\alpha$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , можна одержати формулу типу Тіле–Тейлора аналогічно до відповідної формули Тіле–Тейлора (3.42) із [6, с. 48]. Технічно набагато складніше за допомогою граничного переходу з (5) одержати формулу типу Тіле–Ерміта з довільними кратностями інтерполяційних вузлів. При цьому жодних теоретичних ускладнень не виникає.

*Зауваження.* Якщо покласти у (5)  $x_i(s) \equiv \text{const}$ ,  $x(s) \equiv \text{const}$ , то одержимо звичайний ІЛД, який не містить обернених різниць, що може бути корисним у застосуваннях. Разом з тим після деяких перетворень ІЛД набуває вигляду дробу Тіле.

## Цитована література

1. Bultheel A., Levrie P. A note on Thiele  $n$ -fractions // Numerical Algorithms. – 1993. – 4, Iss. 2. – P. 225–239.
2. Tan J., Fang Y. Newton-Thiele's rational interpolants // Numerical Algorithms. – 2000. – 24, Iss. 1. – P. 141–157.
3. Gensane Th. Interpolation on the hypersphere with Thiele type rational interpolants // Numerical Algorithms. – 2012. – 60, Iss. 3. – P. 523–529.
4. Макаров В. Л., Хлобистов В. В., Демків І. І. Функціональні поліноми Ерміта в просторі  $Q[0, 1]$  // Доп. НАН України. – 2007. – № 8. – С. 21–25.
5. Макаров В. Л., Демків І. І. Новий клас інтерполяційних інтегральних ланцюгових дробів // Доп. НАН України. – 2008. – № 11. – С. 17–23.
6. Скоробогатько В. Я. Теория ветвящихся цепных дробей и ее применение в вычислительной математике. – Москва: Наука, 1983. – 312 с.
7. Джоунс У., Трон В. Непрерывные дроби. Аналитическая теория и приложения. – Москва: Мир, 1985. – 414 с.

## References

1. Bultheel A., Levrie P. Numerical Algorithms, 1993, 4, Iss. 2: 225–239.
2. Tan J., Fang Y. Numerical Algorithms, 2000, 24, Iss. 1: 141–157.
3. Gensane Th. Numerical Algorithms, 2012, 60, Iss. 3: 523–529.
4. Makarov V. L., Khlobistov V. V., Demkiv I. I. Dop. NAN Ukraine, 2007, No 8: 21–25 (in Ukrainian).
5. Makarov V. L., Demkiv I. I. Dop. NAN Ukraine, 2008, No 11: 17–23 (in Ukrainian).
6. Skorobogat'ko V. Ya. Theory of Branching Continued Fractions and Its Application in Computational Mathematics, Moscow: Nauka, 1983 (in Russian).
7. Jones W., Tron W. Continued fractions. Analytic theory and applications, Moscow: Mir, 1985 (in Russian).

Надійшло до редакції 21.07.2015

Академик НАН України В. Л. Макаров<sup>1</sup>, И. И. Демкив<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Институт математики НАН України, Киев

<sup>2</sup>Национальный университет “Львовская политехника”

E-mail: makarovimath@gmail.com

## Интегральная интерполяционная цепная дробь типа Тиле

Построена интерполяционная интегральная цепная дробь типа Тиле, которая является естественным обобщением классической дроби Тиле.

**Ключевые слова:** интерполяционные узлы, цепная дробь, дробь Тиле.

Academician of the NAS of Ukraine **V. L. Makarov<sup>1</sup>, I. I. Demkiv<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine, Kiev

<sup>2</sup>Lviv Polytechnic National University

*E-mail:* makarovimath@gmail.com

## **An integral interpolation chain fraction of the Thiele type**

*An integral interpolation chain fraction of the Thiele type has been constructed. This fraction is a natural generalization of the classical Thiele continued fraction.*

**Keywords:** interpolation points, continued fraction, Thiele fraction.