Доповіді
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

1 • 2016

МАТЕМАТИКА

УДК 517.54 http://dx.doi.org/10.15407/dopovidi2016.01.007

Г. П. Бахтина, И. Я. Дворак, И. В. Денега

Институт математики НАН Украины, Киев

E-mail: bakhtina_galina@mail.ru, dvorakinna@gmail.com, iradenega@yandex.ru

О произведении внутренних радиусов взаимно непересекающихся областей

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины Ю. Ю. Трохимчуком)

Изучается одна известная проблема об описании экстремальных конфигураций, которые максимизируют произведение внутренних радиусов взаимно непересекающихся областей.

Ключевые слова: внутренний радиус, неналегающие области, n-лучевая система точек, “управляющий” функционал, квадратичный дифференциал.

Пусть $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ — множество натуральных и вещественных чисел соответственно, $\mathbb{C}$ — комплексная плоскость, $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C}\bigcup\{\infty\}$ — расширенная комплексная плоскость или сфера Римана, $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$. Пусть $\chi(t) = (t + t^{-1})/2$, $t \in \mathbb{R}^+$ — функция Жуковского. Пусть $r(B, a)$ — внутренний радиус области $B \subset \overline{\mathbb{C}}$, относительно точки $a \in B$ [1–6].

Системой непересекающихся областей называется конечный набор произвольных областей $\{B_k\}_{k=1}^n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, таких, что $B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $B_k \bigcap B_m = \varnothing$, $k \neq m$, k, $m = \overline{1, n}$.

Систему точек $A_n := \{a_k \in \mathbb{C}, k = \overline{1, n}\}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, назовем n-лучевой, если $|a_k| \in \mathbb{R}^+$ при $k = \overline{1, n}$, $0 = \arg a_1 < \arg a_2 < \ldots < \arg a_n < 2\pi$.

Введем обозначения $\alpha_k := \dfrac{1}{\pi} \arg \dfrac{a_{k+1}}{a_k}$, $\alpha_{n+1} := \alpha_1$, $k = \overline{1, n}$, $\displaystyle\sum_{k=1}^n \alpha_k = 2$.

Для произвольной n-лучевой системы точек $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ рассмотрим следующий “управляющий” функционал:

$$\mathcal{M}^{(0)}(A_n) := \prod_{k=1}^n \chi\left(\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|^{1/(2\alpha_k)}\right)|a_k|.$$

В данной работе рассматривается задача об экстремизации функционала

$$J_n(\gamma) = [r(B_0, 0) r(B_\infty, \infty)]^\gamma \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \tag{1}$$

при $\gamma > 0$, $n \geqslant 2$ на множестве всех систем взаимно непересекающихся областей $\{B_k\}_{k=0}^{n+1}$ таких, что $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{0, (n+1)}$, $a_0 = 0$, $a_{n+1} = \infty$.

При $\gamma = 1/2$ и $n \geqslant 2$ оценка для функционала (1) для систем непересекающихся областей была впервые получена в работе [6]. В работе [7] результат [6] был усилен при $\gamma \in (0, n^2/8]$, $n \geqslant 2$. Задача об оценке функционала (1) при начальных значениях натурального параметра n также рассматривалась в [8, 9]. В данной работе получены оценки функционала (1) при $n = \overline{2, 5}$ на более широком интервале значений параметра γ.

Теорема 1. *Пусть $n = \overline{2, 5}$, $0 < \gamma \leqslant \gamma_n$, $\gamma_2 = 0{,}72$, $\gamma_3 = 1{,}40$, $\gamma_4 = 2{,}27$, $\gamma_5 = 3{,}33$. Тогда для $0 < \gamma \leqslant \gamma_n$ любой n-лучевой системы точек $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$, $n = \overline{2, 5}$, такой, что $\mathcal{M}^{(0)}(A_n) = 1$ и любого набора взаимно непересекающихся областей B_0, B_k, B_∞ ($a_0 = 0 \in$ $\in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $\infty \in B_\infty \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$) справедливо неравенство*

$$[r(B_0, 0) r(B_\infty, \infty)]^\gamma \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leqslant [r(\Lambda_0, 0) r(\Lambda_\infty, \infty)]^\gamma \prod_{k=1}^{n} r(\Lambda_k, \lambda_k),$$

где области Λ_0, Λ_∞, Λ_k и точки 0, ∞, λ_k ($k = \overline{1, n}$, $n = \overline{2, 5}$) — круговые области и, соответственно, полюсы квадратичного дифференциала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{\gamma w^{2n} + (n^2 - 2\gamma) w^n + \gamma}{w^2 (w^n - 1)^2} dw^2.$$

Доказательство теоремы 1. Применяя к системе точек $\{a_k\}_{k=1}^n$ и областей $\{B_k\}_{k=1}^n$ кусочно-разделяющее преобразование, развитое в [4, с. 120], [5, с. 48–50], аналогично работам [6, 8, 9, 10], получаем неравенство

$$J_n(\gamma) \leqslant 2^n \left(\prod_{k=1}^{n} \alpha_k \right) \left[\prod_{k=1}^{n} \Phi(\tau_k) \right] \leqslant \frac{4}{\gamma} \left[\prod_{k=1}^{n} \tau_k^{2\tau_k^2 + 2} |1 - \tau_k|^{-(1-\tau_k)^2} (1 + \tau_k)^{-(1+\tau_k)^2} \right],$$

где $\Phi(\tau) = \tau^{2\tau^2} |1 - \tau|^{-(1-\tau)^2} (1 + \tau)^{-(1+\tau)^2}$, $\tau \geqslant 0$, $\tau_k = \sqrt{\gamma}\alpha_k$, $k = \overline{1, n}$.

Пусть

$$\Psi(x) = x^{2x^2+2} |1 - x|^{-(1-x)^2} (1 + x)^{-(1+x)^2} \qquad \text{и} \qquad F(x) = \ln(\Psi(x)).$$

Рассмотрим экстремальную задачу

$$\prod_{k=1}^{n} \Psi(x_k) \longrightarrow \max, \qquad \sum_{k=1}^{n} x_k = 2\sqrt{\gamma}, \qquad x_k = \alpha_k \sqrt{\gamma}.$$

Пусть $X^{(0)} = \{x_k^{(0)}\}_{k=1}^n$ — произвольный экстремальный набор точек выше указанной задачи. Далее, следуя работе [11], получаем

$$F'(x_k^{(0)}) = F'(x_j^{(0)}), \qquad k, j = \overline{1, n}, \tag{2}$$

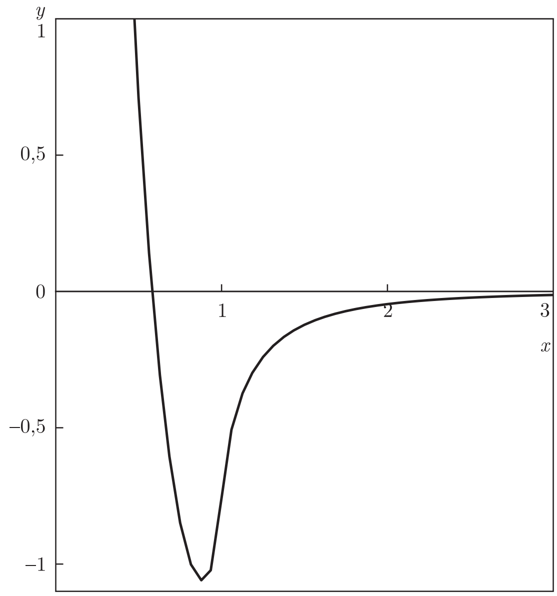

Рис. 1. График функции $y = F'\ (x)$

$$F'(x) = 4x \ln(x) - 2(x-1)\ln|x-1| - 2(x+1)\ln(x+1) + \frac{2}{x}$$

(рис. 1). На основании соотношения (2) и следуя работе [11], докажем, что

$$x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = \ldots = x_n^{(0)}.$$

Пусть $F'(x) = t$, $y_0 \leqslant t < 0$, $y_0 \approx -1{,}06$. Найдем решение уравнения $F'(x) = t_k$, $k = \overline{1,20}$. Для $\forall t_k \in [y_0, 0)$ уравнение имеет два решения: $x_1(t) \in (0, x_0]$, $x_2(t) \in (x_0, \infty]$.

Таблица 1

k	t_k	$x_1(t_k)$	$x_2(t_k)$	$x_1(t_k)+x_2(t_{k+1})$	$2x_1(t_k)+x_2(t_{k+1})$	$3x_1(t_k)+x_2(t_{k+1})$	$4x_1(t_k)+x_2(t_{k+1})$
1	−0,10	0,595614	1,588941				
2	−0,15	0,603048	1,416199	2,011813	2,607427	3,203041	3,798655
3	−0,20	0,610729	1,310498	1,913546	2,516594	3,119642	3,722690
4	−0,25	0,618678	1,237691	1,848420	2,459149	3,069878	3,680607
5	−0,30	0,626917	1,184045	1,802723	2,421401	3,040079	3,65875
6	−0,35	0,635472	1,142792	1,769709	2,396626	3,023543	3,650460
7	−0,40	0,644375	1,110153	1,745625	2,381097	3,016569	3,652041
8	−0,45	0,653662	1,083829	1,728204	2,372579	3,016954	3,661329
9	−0,50	0,663378	1,062338	1,716000	2,369662	3,023324	3,676986
10	−0,55	0,673576	1,044684	1,708062	2,371440	3,034818	3,698196
11	−0,60	0,684325	1,030184	1,703760	2,377336	3,050912	3,724488
12	−0,65	0,695709	1,018378	1,702703	2,387028	3,071315	3,755678
13	−0,70	0,707842	1,008999	1,704708	2,400417	3,096126	3,791835
14	−0,75	0,720873	1,002054	1,709896	2,417738	3,125580	3,833422
15	−0,80	0,735017	0,997389	1,718262	2,439135	3,160008	3,880881
16	−0,85	0,750597	0,990083	1,725100	2,460117	3,195134	3,930151
17	−0,90	0,768137	0,979982	1,730579	2,481176	3,231773	3,982370
18	−0,95	0,788621	0,966394	1,734531	2,502668	3,270805	4,038942
19	−1,00	0,814378	0,947119	1,735740	2,524361	3,312982	4,101603
20	−1,06	0,884406	0,884406	1,698784	2,513162	3,327540	4,141918

Рассмотрим следующие значения t: $t_1 = -0{,}1$, $t_2 = -0{,}15$, $t_3 = -0{,}2$, $t_4 = -0{,}25$, $\ldots$, $t_{18} = -0{,}95$, $t_{19} = -1{,}00$, $t_{20} = y_0$. Непосредственные вычисления приведены в табл. 1. Учитывая свойства функции $F'(x)$ и условия теоремы, получаем следующее неравенство: $x_1(t) + x_2(t) > x_1(t_k) + x_2(t_{k+1}) \geqslant 2\sqrt{\gamma_n}$, $t_k \leqslant t \leqslant t_{k+1}$, $k = \overline{1,20}$, $n = \overline{2,5}$. Отсюда, используя значения, приведенные в табл. 1, получаем, что теорема 1 доказана при всех $0 < \gamma \leqslant \gamma_n$. Далее, аналогично рассуждениям работы [11] имеем, что для экстремального набора $X^{(0)}$ возможен только случай, когда $\{x_k^{(0)}\}_{k=1}^{n} \in (0, x_0]$, $x_0 \approx 0{,}88441$, $n = \overline{2,5}$, и, следовательно, $x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = \ldots = x_n^{(0)}$. Утверждение о знаке равенства проверяется непосредственно. Теорема 1 доказана.

Авторы выражают благодарность А. К. Бахтину за постановку задачи и полезные обсуждения.

Цитированная литература

1. *Лаврентьев М. А.* К теории конформных отображений // Тр. Физ.-мат. ин-та АН СССР. – 1934. – **5**. – С. 159–245.
2. *Голузин Г. М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. – Москва: Наука, 1966. – 628 с.
3. *Дженкинс Дж. А.* Однолистные функции и конформные отображения. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1962. – 256 с.
4. *Дубинин В. Н.* Емкости конденсаторов и симметризация в геометрической теории функций комплексного переменного. – Владивосток: Дальнаука ДВО РАН, 2009. – 390 с.
5. *Дубинин В. Н.* Метод симметризации в геометрической теории функций комплексного переменного // Успехи мат. наук. – 1994. – **49**, № 1. – С. 3–76.
6. *Дубинин В. Н.* Разделяющее преобразование областей и задачи об экстремальном разбиении // Зап. научн. сем. ЛОМИ. – 1988. – **168**. – С. 48–66.
7. *Кузьмина Г. В.* Задачи об экстремальном разбиении римановой сферы // Зап. научн. сем. ПОМИ. – 2001. – **276**. – С. 253–275.
8. *Бахтин А. К., Денега И. В.* Некоторые оценки функционалов для N-лучевых систем точек // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2011. – **8**, № 1. – С. 12–21.
9. *Бахтін А. К., Бахтіна Г. П., Вьюн В. Є.* Про деякі нерівності в теорії неперетинних областей // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2014. – **11**, № 1. – С. 141–152.
10. *Бахтин А. К., Бахтина Г. П., Зелинский Ю. Б.* Тополого-алгебраические структуры и геометрические методы в комплексном анализе. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2008. – 308 с. – (Праці Ін-ту математики НАН України; Т. 73).
11. *Ковалев Л. В.* К задаче об экстремальном разбиении со свободными полюсами на окружности // Дальневост. мат. сб. – 1996. – **2**. – С. 96–98.

References

1. *Lavrent'ev M. A.* Tr. Fiz.-Mat. Inst. AN SSSR, 1934, **5**, 159–245 (in Russian).
2. *Golusin G. M.* Geometric Theory of Functions of a Complex Variable, Translations of Mathematical Monographs, 26, Providence, R. I.: Amer. Math. Soc., 1969.
3. *Jenkins J. A.* Univalent functions and conformal mapping, Ergebnisse Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Vol. 18, Berlin: Springer, 1958.
4. *Dubinin V. N.* Capacities of condensers and symmetrization in geometric function theory of complex variables, Vladivostok: Dal'nayka, 2009 (in Russian).
5. *Dubinin V. N.* Uspekhi Mat. Nauk, 1994, **49**, No 1: 3–76 (in Russian); translation in Russian Math. Surveys, 1994, **49**, No 1: 1–79.

6. *Dubinin V. N.* Zap. Nauchn. Semin. Leningr. Otd. Mat. Inst. Steklov. (LOMI), 1988, **168**: 48–66 (in Russian); translation in J. Soviet Math., 1991, **53**, No 3: 252–263.
7. *Kuz'mina G. V.* Zap. Nauchn. Semin. POMI, 2001, **276**: 253–275 (in Russian).
8. *Bakhtin A. K., Denega I. V.* Proc. of the Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine, 2011, **8**, No 1: 12–21 (in Russian).
9. *Bakhtin A. K., Bakhtina G. P., Vjun V. E.* Proc. of the Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine, 2014, **11**, No 1: 141—152 (in Ukrainian).
10. *Bakhtin A. K., Bakhtina G. P., Zelinskii Yu. B.* Topological-algebraic structures and geometric methods in complex analysis, Proc. of the Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine, Vol. 73, Kiev, 2008 (in Russian).
11. *Kovalev L. V.* Dal'nevost. Mat. Sb., 1996, **2**: 9–98 (in Russian).

Поступило в редакцию 30.06.2015

Г. П. Бахтіна, І. Я. Дворак, І. В. Денега

Інститут математики НАН України, Київ

E-mail: bakhtina_galina@mail.ru, dvorakinna@gmail.com, iradenega@yandex.ru

Про добуток внутрішніх радіусів взаємно неперетинних областей

Вивчається одна загальна проблема про опис екстремальних конфігурацій, які максимізують добуток внутрішніх радіусів взаємно неперетинних областей.

Ключові слова: внутрішній радіус, неперетинні області, n-променева система точок, "керуючий" функціонал, квадратичний диференціал.

G. P. Bakhtina, I. Y. Dvorak, I. V. Denega

Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine, Kiev

E-mail: bakhtina_galina@mail.ru, dvorakinna@gmail.com, iradenega@yandex.ru

About the product of inner radii of pairwise non-overlapping domains

A general problem of the description of extremal configurations maximizing the product of the inner radii of mutually non-overlapping domains is studied.

Keywords: inner radius, non-overlapping domains, n-radial system of points, "control" functional, quadratic differential.