ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

doi: https://doi.org/10.15407/dopovidi2017.12.003
УДК 517.36

А.А. Мартынюк, академик НАН Украины

Институт механики им. С.П.Тимошенко НАН Украины, Киев
E-mail: center@inmech.kiev.ua

Инвариантность решений семейства регуляризованных уравнений

Рассматривается начальная задача для семейства уравнений, регуляризованных по параметру неточности. Вводятся определения слабой и строгой инвариантности решений. Установлены условия слабой и строгой инвариантности множества эйлеровых решений и указывается на возможность рассмотрения разрывных семейств уравнений

Ключевые слова: *множество неточных уравнений, эйлеровы решения, слабая и строгая инвариантность.*

1. Постановка задачи. Рассмотрим начальную задачу для семейства регуляризованных уравнений (см. [1] и библиографию там)

$$D_H W = F_\beta(t, W), \quad W(t_0) = W_0 \in K_c(R^n), \tag{1}$$

где $W \in K_c(R^n)$, $F_\beta(t, W) \in C(I \times K_c(R^n), \quad K_c(R^n))$ при всех $\beta \in [0, 1]$.

Предположим, что в $K_c(R^n)$ существует непустое замкнутое множество $\Omega \subset K_c(R^n)$. Пусть для любого $U \in K_c(R^n)$, непересекающегося с множеством Ω и для любого $S \in \Omega$ существует $Z \in K_c(R^n)$ такое, что $U = S + Z$. При этом множество $U - S$ является разностью Хукухары (см. [2]). Далее предположим, что для любого $U \in K_c(R^n)$ существует $S_0 \in \Omega$, расстояние от которого до U является минимальным, т. е.

$$D[U, \Omega] = \|U - S_0\| = \inf_{s_0 \in \Omega} \|U - S_0\|.$$

Множество S является проекцией U на Ω и обозначается $\mathrm{proj}_\Omega(U)$. Любое неотрицательное произведение $\Phi = (U - S)t, \ t \geqslant 0$, является ближайшей нормалью к Ω в точке множества S. Множество всех Φ, полученных таким способом, образует нормальный конус, примыкающий к Ω в точке множества S, и обозначается $N_\Omega(S)$ (см. [4]).

Напомним, что от любого $A \in K_c(R^n)$ до нулевого элемента $\Theta_0 \in K_c(R^n)$ расстояние определяется формулой

$$D[A, \Theta_0] = \|A\| = \sup_{a \in A} \|a\|.$$

Для $A, B \in K_c(R^n)$ точную верхнюю грань декартового произведения обозначим так:

$$(A \times B) = \sup\{(a \cdot b) : a \in A, b \in B\}.$$

© А.А. Мартынюк, 2017

Нетрудно показать, что

$$\|A+B\|^2 \leqslant \|A\|^2 + \|B\|^2 + 2(A \times B).$$

Целью этой статьи является получение условий слабой (строгой) инвариантности эйлеровых решений семейства уравнений (1).

2. Условия слабой инвариантности. Сформулируем следующее определение.

Определение 1. Пара (Ω, F_β) называется слабо инвариантной, если при любом $W_0 \in \Omega$ существует эйлерово решение $W(t)$ семейства уравнений (1) на $[t_0, \infty)$ при всех $\beta \in [0,1]$ такое, что $W(t_0) = W_0$ и $W(t) \in \Omega$ при всех $t \geqslant t_0$.

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть выполняются следующие условия*:

1) *при любом* $\beta \in [0,1]$ *семейство многозначных отображений* F_β *принадлежит* $C(R_+ \times K_c(R^n), K_c(R^n))$ *и существует функция* $g_\beta(t, w)$, *неубывающая по* w, *такая, что*

$$D[F_\beta(t, W), \Theta_0] \leqslant g_\beta(t, D[W, \Theta_0])$$

при всех $(t, W) \in R_+ \times K_c(R^n)$;

2) *максимальное решение семейства уравнений*

$$\frac{dw}{dt} = g_\beta(t, w), \quad w(t_0) = w_0,$$

существует на $[t_0, \infty)$;

3) *существует открытое множество* $Q \subset K_c(R^n)$, *в котором при всех* $t \geqslant t_0$ *находится эйлерово решение семейства* (1) *и для каждой пары* $(t, Z) \in R_+ \times Q$ *существует* $S \in \mathrm{proj}_\Omega(Z)$ *такое, что*

$$(F_\beta(t, Z) \times (Z - S)) \leqslant \frac{1}{2} q_\beta(t, D^2[Z, \Omega]),$$

где $q_\beta \in C([t_0, \infty) \times R_+, R)$ *при любом* $\beta \in [0,1]$;

4) *существует максимальное решение* $r(t) = r(t, t_0, w_0)$ *семейства уравнений*

$$\frac{du}{dt} = q_\beta(t, u), \quad u(t_0) = u_0 \geqslant 0,$$

при всех $t \in [t_0, \infty)$ и $\beta \in [0,1]$.

Тогда

а) верна оценка

$$D^2[W(t), \Omega] \leqslant r(t, t_0, D^2[W_0, \Omega])$$

при всех $t \geqslant t_0$ и $\beta \in [0,1]$;

б) при $r(t, t_0, 0) \equiv 0$, $W_0 \in \Omega$ *верно включение* $W(t) \in \Omega$ *при всех* $t \geqslant t_0$ *и* $\beta \in [0,1]$, *т. е пара* (F_β, Ω) — *слабо инвариантна.*

Доказательство. При выполнении условий (1) — (2) теоремы 1 существует по крайней мере одно семейство отображений $W_\beta(t)$, являющееся эйлеровым решением семейства уравнений (1). Далее, в точках $t_i \in T = [t_0, t_1, \ldots, t_N]$ значение $W(t)$ обозначим W_i. Согласно условию (3) теоремы 1, для каждого i существует элемент $S_i \in \mathrm{proj}_\Omega(W_i)$ такой, что

$$(F_\beta(t_i, W_i) \times (W_i - S_i)) \leqslant \frac{1}{2} q_\beta(t_i, D^2[W_i, \Omega])$$

при всех $\beta \in [0,1]$. Из теоремы 12 статьи [1] следует, что $D[D_H W_\beta, \Theta_0]\big\|_T \leqslant \psi$ при $\mathrm{diam} T \to 0$, $N \to \infty$ и всех $\beta \in [0,1]$. Поэтому имеем

$$D^2[W_1, \Omega] \leqslant \|W_i - S_0\|^2,$$

так как $S_0 \in \Omega$. Учитывая, что $W_1 = W_0 + Z_1$, где $Z_1 = F_\beta(t_0, W_0)(t_1 - t_0)$ и $W_0 = S_0 + Z_0$, получаем оценку

$$D^2[W_1, \Omega] \leqslant \|Z_1 + Z_0\|^2 \leqslant \|Z_1\|^2 + \|Z_0\|^2 + 2(Z_1 \times Z_0) \leqslant \psi^2 (t_1 - t_0)^2 + D^2[W_0, \Omega] +$$
$$2\int_{t_0}^{t_1} (D_H W_\beta(t_0) \times Z_0) dt \leqslant \psi^2 (t_1 - t_0)^2 + D^2[W_0, \Omega] + 2\int_{t_0}^{t_1} (F_\beta(t_0, W_0) \times (W_0 - S_0)) dt \leqslant$$
$$\leqslant \psi^2 (t_1 - t_0)^2 + D^2[W_0, \Omega] + q_\beta(t_0, D^2[W_0, \Omega])(t_1 - t_0)$$

при всех $\beta \in [0,1]$.

Аналогичные оценки имеют место для любой точки $t_i \in T$, поэтому верна оценка

$$D^2[W_i, \Omega] \leqslant \psi^2 (t_i - t_{i-1})^2 + D^2[W_{i-1}, \Omega] + q_\beta(t_{i-1}, D^2[W_{i-1}, \Omega])(t_i - t_{i-1}) \leqslant$$
$$\leqslant D^2[W_0, \Omega] + \psi^2 \sum_{j=1}^{i} (t_j - t_{j-1})^2 + \sum_{j=1}^{i} q_\beta(t_{j-1}, D^2[W_{j-1}, \Omega])(t_j - t_{j-1}) \leqslant$$
$$\leqslant D^2[W_0, \Omega] + \psi^2 \mathrm{diam} T \sum_{j=1}^{i} (t_j - t_{j-1}) + \sum_{j=1}^{i} q_\beta(t_{j-1}, D^2[W_{j-1}, \Omega])(t_j - t_{j-1}) \leqslant$$
$$\leqslant D^2[W_0, \Omega] + \psi^2 \mathrm{diam} T (d - t_0) + \sum_{j=1}^{i} q_\beta(t_{j-1}, D^2[W_{j-1}, \Omega])(t_j - t_{j-1}), \qquad (2)$$

где $d \in (t_0, \infty)$.

Из неравенства (2) нетрудно получить интегральное неравенство

$$D^2[W(t), \Omega] \leqslant D^2[W_0, \Omega] + \int_{t_0}^{t} q_\beta(s, D^2[W(s), \Omega])\, ds, \qquad (3)$$

для $t_0 \leqslant t \leqslant d$ рассматривая покрытие $W(t)$ “дугами” $W_\beta(t)$ в узлах T при любом $\beta \in [0,1]$. Применяя к неравенству (3) теорему 1.6.1 из монографии [3], получим оценку

$$D^2[W(t), \Omega] \leqslant r(t, t_0, D^2[W - 0, \Omega]) \text{ при всех } t \geqslant t_0. \qquad (4)$$

Если $r(t, t_0, 0) \equiv 0$, то из (4) имеем $W(t) \in \Omega$ при всех $t \geqslant t_0$ как только $W_0 \in \Omega$. Следовательно, пара (Ω, F_β) — слабо инвариантна.

3. Условия строгой инвариантности. Приведем такое определение.

Определение 2. Пара (Ω, F_β) называется строго инвариантной, если любое эйлерово решение семейства (1) существует на $[t_0, \infty)$ и удовлетворяет условию $W(t) \in \Omega$ при всех $t \geqslant t_0$ и $\beta \in [0,1]$ как только $W(t_0) = W_0 \in \Omega$.

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 2. *Предположим, что для семейства уравнений* (1)

1) *выполняются условия* (1), (2) *теоремы* 1*;*

2) *существует множество* $C \in K_c(R^n)$*, для которого* $A = B + C$ *при любых* $A, B \in K_c(R^n)$*, и выполняется обобщенное условие Липшица*

$$(F_\beta(t, A) \times C) - (F_\beta(t, B) \times C) \leqslant L_\beta \|C\|^2,$$

где $L_\beta = \mathrm{const} > 0$ *при всех* $\beta \in [0,1]$*;*

3) *при всех* $\beta \in [0,1]$ *выполняется неравенство*

$$(F_\beta(t, B) \times C) \leqslant 0\,.$$

Тогда пара (Ω, F_β) *— строго инвариантна.*

Доказательство. Пусть $W_\beta(t)$ — семейство эйлеровых решений, существующих на $[t_0, \infty)$ и $W_\beta(t_0) = W_0 \in \Omega$. Согласно теореме 12 из статьи [1], существует постоянная $\Phi > 0$ такая, что

$$W_\beta(t_0)\Big|_T = W_0, \; D[W_\beta(t), W_0] \leqslant \Phi \tag{5}$$

при всех $\beta \in [0,1]$. Если $W_\beta(t) \in \overline{B}[W_0, \Phi]$ при всех $\beta \in [0,1]$ и $S \in \mathrm{proj}_\Omega(W_\beta)$, то получаем оценку

$$D[S, W_0] \leqslant D[S, W_\beta] + D[W_\beta, W_0] \leqslant 2D[W_\beta, W_0] \leqslant 2\Phi$$

Отсюда следует, что $S \in \overline{B}[W_0, 2\Phi]$.

Пусть L_β — постоянная Липшица для $F_\beta(t, W)$ при всех $\beta \in [0,1]$ в множестве $\overline{B}[W_0, 2\Phi]$. Для любого $W_\beta \in \overline{B}[W_0, \Phi]$ и $S \in \mathrm{proj}_\Omega(W_\beta)$ получаем $W_\beta - S \in N_\Omega(S)$. Следовательно,

$$(F_\beta(t, W) \times (W - S)) \leqslant \frac{1}{2} D^2[W, \Omega]$$

при всех $\beta \in [0,1]$. Это неравенство является частным случаем условия (3) теоремы 1 с функцией $q_\beta(t, W) = \dfrac{L_\beta}{2} W$, поэтому

$$D^2[W(t), \Omega] \leqslant D^2[W_0, \Omega] \exp\left[\frac{L_\beta}{2}(t - t_0)\right]$$

при всех $\beta \in [0,1]$ и $t \geqslant t_0$.

Поскольку, по предположению, $W_0 \in \Omega$, то $W(t) \in \Omega$ при всех $t \geqslant t_0$ и $\beta \in [0,1]$, т.е. пара (Ω, F_β) — строго инвариантна.

4. Заключительные замечания. Проблема инвариантности эйлеровых решений для множества уравнений рассматривалась в статье [4]. В данной работе применяется техника регуляризации множества уравнений с неточным параметром, предложенная в работе [1]. Если совокупность уравнений

$$D_H X = F(t, X, \alpha), \tag{6}$$

где $X \in K_c(R^n)$, $F: R_+ \times K_c(R^n) \times I \to K_c(R^n)$ (здесь $\alpha \in I$ — параметр неточности) является разрывной по X, то регуляризация семейства уравнений (6) может быть проведена по способу Филиппова (см. [5]).

Условия инвариантности множества решений могут быть получены аналогично теоремам 1 и 2 с необходимыми изменениями, обусловленными разрывностью системы (6).

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Мартынюк А.А., Мартынюк-Черниенко Ю.А. Существование, единственность и оценка решений множества уравнений возмущенного движения. *Укр. мат. журн.* 2013. **65**, № 2. С. 273—295.
2. Lakshmikantham V., Tolstonogov A. Existence and interrelation between set and fuzzy differential equations. *Nonlinear Analysis: TMA*. 2003. № 55. P. 255—268.
3. Lakshmikantham V., Leela S., Martynyuk A. A. Stability Analysis of Nonlinear Systems. New York: Marcel Dekker, 1989. 315 p.
4. Bhaskar G.T., Lakshmikantham V. Set differential equation and flow invariance. *Appl. Anal.* 2003. № 82. P. 357—368.
5. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. Москва: Наука, 1985. 222 с.

Поступило в редакцию 08.06.2016

REFERENCES

1. Martynyuk, A. A. & Martynyuk-Chernienko, Yu. A. (2013). Existence, uniqueness, and estimation of solutions of the set of equations of perturbed motion. Ukr. Math. Journal. 65, No. 2, pp. 273-295 (in Russian).
2. Lakshmikantham, V. & Tolstonogov, A. (2003). Existence and interrelation between set and fuzzy differential equations. Nonlinear Analysis: TMA. No. 55, pp. 255-268.
3. Lakshmikantham, V., Leela, S. & Martynyuk, A. A. (1989). Stability Analysis of Nonlinear Systems. New York: Marcel Dekker.
4. Bhaskar, G. T. & Lakshmikantham, V. (2003). Set differential equation and flow invariance Appl. Anal. No. 82, pp. 357-368.
5. Filippov, A. F. (1985). Differential equations with discontinuous right-hand side. Moscow: Nauka (in Russian).

Received 08.06.2017

А.А. Мартинюк

Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, Київ
E-mail: center@inmech.kiev.ua

ІНВАРІАНТНІСТЬ РОЗВ'ЯЗКІВ СІМЕЙСТВА РЕГУЛЯРИЗОВАНИХ РІВНЯНЬ

Розглядається початкова задача для сімейства рівнянь, регуляризованих за параметром неточності. Вводяться означення слабкої і строгої інваріантності розв'язків. Встановлено умови слабкої і строгої інваріантності множини ейлерових розв'язків і вказується на можливість розгляду розривних сімейств рівнянь.

Ключові слова: *множина неточних рівнянь, ейлерові розв'язки, слабка і строга інваріантність.*

A.A.Martynyuk

S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of the NAS of Ukraine, Kiev
E-mail: center@inmech.kiev.ua

INVARIANCE OF SOLUTIONS OF THE SET OF REGULARIZED EQUATIONS

We consider the initial problem for a family of equations regularized with respect to the inaccuracy parameter. Definitions of the weak and strict invariances of solutions are introduced. The conditions for weak and strict invariances of the set of Euler solutions are established, and the possibility to consider discontinuous families of equations is indicated.

Keywords: *set of uncertain equations, Eulerian solutions, strict and weak invariances.*