ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

МЕХАНІКА

doi: https://doi.org/10.15407/dopovidi2017.10.034
УДК 539.375

А.А. Каминский[1], Л.А. Кипнис[2], Т.В. Полищук[2]

[1] Институт механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины, Киев
[2] Уманский государственный педагогический университет им. Павла Тычины
E-mail: dfm11@ukr.net, polischuk_t@ukr.net

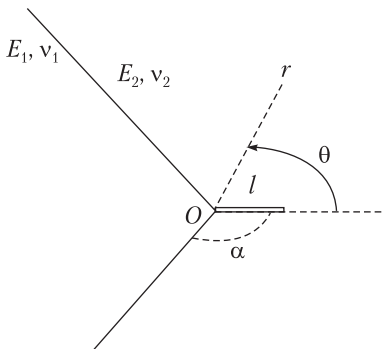
Об упругом равновесии кусочно-однородной плоскости с трещиной в угловой точке границы раздела

Представлено академиком НАН Украины В.Л. Богдановым

Рассмотрена статическая симметричная задача теории упругости для кусочно-однородной изотропной плоскости с границей раздела сред в форме сторон угла и трещиной в угловой точке. Построено точное решение уравнения Винера—Хопфа задачи. Определен коэффициент интенсивности напряжений в конце трещины.

Ключевые слова: *кусочно-однородная плоскость, граница раздела, угловая точка, трещина, коэффициент интенсивности напряжений.*

Задачам механики разрушения об определении коэффициентов интенсивности напряжений в концах трещин и других линий разрыва смещения, исходящих из угловых точек упругих тел, посвящено много работ. В основном, исследовались задачи теории упругости о разрезах в вершине однородного клина [1—4], а также о линиях разрыва смещения в концах трещин в однородных телах [5]. Эти линии разрыва моделируют узкие полосы пластичности, развивающиеся из концов трещин. Для кусочно-однородного тела в указанном направлении изучались случаи, когда угловыми точками являются концы межфазных трещин и трещин, выходящих на границу раздела сред [6—9]. В [10, 11] решены задачи теории упругости для кусочно-однородной плоскости с межфазными линиями разрыва касательного (нормального) смещения в угловой точке границы раздела сред.



Ниже дано точное решение задачи механики разрушения об определении коэффициента интенсивности напряжений в конце трещины нормального разрыва в кусочно-однородной плоскости, исходящей из угловой точки границы раздела сред.

© А.А. Каминский, Л.А. Кипнис, Т.В. Полищук , 2017

Постановка задачи. В условиях плоской деформации в рамках статической симметричной задачи теории упругости рассмотрим кусочно-однородную изотропную плоскость с границей раздела сред в форме сторон угла (см. рис.). Из угловой точки исходит трещина со свободными от напряжений берегами. На бесконечности задана асимптотика поля напряжений, представляющая собой решение аналогичной задачи без трещины (задача К), порождаемое единственным в полосе $-1<\operatorname{Re}\lambda<0$ корнем $\lambda_0\in]-1;0[$ ее характеристического уравнения

$$[\sin 2(\lambda+1)\alpha+(\lambda+1)\sin 2\alpha][æ_1\sin 2(\lambda+1)(\pi-\alpha)+(\lambda+1)\sin 2\alpha]+$$
$$+\{(1+æ_1)(1+æ_2)\sin^2\lambda\pi-[\sin 2(\lambda+1)\alpha+(\lambda+1)\sin 2\alpha]\times$$
$$\times[æ_1\sin 2(\lambda+1)(\pi-\alpha)+(\lambda+1)\sin 2\alpha]-[\sin 2(\lambda+1)(\pi-\alpha)-(\lambda+1)\sin 2\alpha]\times$$
$$\times[æ_2\sin 2(\lambda+1)\alpha-(\lambda+1)\sin 2\alpha]\}e+$$
$$+[\sin 2(\lambda+1)(\pi-\alpha)-(\lambda+1)\sin 2\alpha][æ_2\sin 2(\lambda+1)\alpha-(\lambda+1)\sin 2\alpha]e^2=0,$$
$$e=\frac{1+\nu_2}{1+\nu_1}e_0,\quad e_0=\frac{E_1}{E_2},\quad æ_{1,2}=3-4\nu_{1,2}$$

(E_1, E_2 — модули Юнга; ν_1, ν_2 — коэффициенты Пуассона). Произвольная постоянная C, входящая в это решение, считается заданной. Она характеризует интенсивность внешнего поля и должна определяться из решения каждой конкретной внешней задачи.

Учитывая симметрию, граничные условия рассматриваемой задачи теории упругости (см. рис.) запишем так:

$$\begin{aligned}&\theta=\alpha,\quad \langle\sigma_\theta\rangle=\langle\tau_{r\theta}\rangle=0,\quad \langle u_\theta\rangle=\langle u_r\rangle=0;\\&\theta=\pi,\quad \tau_{r\theta}=0,\quad u_\theta=0;\quad \theta=0,\quad \tau_{r\theta}=0;\end{aligned}\tag{1}$$

$$\theta=0,\quad r<l,\quad \sigma_\theta=0;\quad \theta=0,\quad r>l,\quad u_\theta=0;\tag{2}$$

$$\theta=0,\quad r\to\infty,\quad \sigma_\theta=Cgr^{\lambda_0}+o\left(\frac{1}{r}\right).\tag{3}$$

Здесь $0\leqslant\theta\leqslant\pi$; $\langle a\rangle$ — скачок a.

Функция g выражается формулой

$$g=g_1+(\lambda_0+2)g_2,$$
$$g_1=(1+æ_2)\lambda_0{}^2\sin 2\alpha\sin\lambda_0\alpha\cos\lambda_0\alpha\cos(\lambda_0+2)\alpha-$$
$$-(1+æ_1)\lambda_0^2\sin 2\alpha\sin\lambda_0\alpha\cos\lambda_0(\pi-\alpha)\cos[\lambda_0(\pi-\alpha)-2\alpha]-$$
$$-(1+æ_1)(1-æ_2)\lambda_0\sin\lambda_0\alpha\cos\lambda_0\alpha\sin(\lambda_0+2)\alpha\cos\lambda_0(\pi-\alpha)\cos[\lambda_0(\pi-\alpha)-2\alpha]-$$
$$-(1-æ_1)(1+æ_2)\lambda_0\sin\lambda_0\alpha\cos\lambda_0\alpha\cos(\lambda_0+2)\alpha\cos\lambda_0(\pi-\alpha)\sin[\lambda_0(\pi-\alpha)-2\alpha]-$$
$$-(1-e)(\lambda_0+1-ж_2)\lambda_0^2\sin^2 2\alpha\cos\lambda_0\alpha-$$
$$-(2e-1+æ_1)\lambda_0(\lambda_0+1-æ_2)\sin 2\alpha\cos\lambda_0\alpha\cos\lambda_0(\pi-\alpha)\sin[\lambda_0(\pi-\alpha)-2\alpha]-$$
$$-[2-e(1-æ_2)]\lambda_0(\lambda_0+1-æ_2)\sin 2\alpha\cos^2\lambda_0\alpha\sin(\lambda_0+2)\alpha-$$
$$-2[(1-æ_2)e-1+æ_1](\lambda_0+1-æ_2)\cos^2\lambda_0\alpha\sin(\lambda_0+2)\alpha\cos\lambda_0(\pi-\alpha)\sin[\lambda_0(\pi-\alpha)-2\alpha],$$

$$g_2 = (1+æ_1)\lambda_0 \sin 2\alpha \sin(\lambda_0+2)\alpha \cos\lambda_0(\pi-\alpha)\cos[\lambda_0(\pi-\alpha)-2\alpha]+$$
$$+(1+æ_1)(1-æ_2)\cos\lambda_0\alpha \sin^2(\lambda_0+2)\,\alpha\cos\lambda_0(\pi-\alpha)\cos[\lambda_0(\pi-\alpha)-2\alpha]-$$
$$-(1+æ_2)\lambda_0 \sin 2\alpha\cos\lambda_0\alpha\sin(\lambda_0+2)\alpha\cos(\lambda_0+2)\alpha+$$
$$+(1-æ_1)(1+æ_2)\cos\lambda_0\alpha\sin(\lambda_0+2)\alpha\cos(\lambda_0+2)\alpha\cos\lambda_0(\pi-\alpha)\sin[\lambda_0(\pi-\alpha)-2\alpha]+$$
$$+(1-e)\lambda_0^2\sin^2 2\alpha\cos(\lambda_0+2)\alpha+$$
$$+(2e-1+æ_1)\lambda_0\sin 2\alpha\cos(\lambda_0+2)\,\alpha\cos\lambda_0(\pi-\alpha)\sin[\lambda_0(\pi-\alpha)-2\alpha]+$$
$$+[2-e(1-æ_2)]\lambda_0\sin 2\alpha\cos\lambda_0\alpha\sin(\lambda_0+2)\alpha\cos(\lambda_0+2)\alpha+$$
$$+2[(1-æ_2)\,e-1+æ_1]\cos\lambda_0\alpha\sin(\lambda_0+2)\alpha\cos(\lambda_0+2)\,\alpha\cos\lambda_0(\pi-\alpha)\sin[\lambda_0(\pi-\alpha)-2\alpha].$$

Результаты расчетов показывают, что $\lambda_0 > -1/2$; $\lambda_0(0) = \lambda_0(\pi/2) = \lambda_0(\pi) = 0$; $g(\alpha) < 0$ при $\alpha \in]0, \pi/2[$; $g(\alpha) > 0$ при $\alpha \in]\pi/2, \pi[$; $g(0) = g(\pi/2) = g(\pi) = 0$. Если материалы одинаковы, то λ_0 и g равны нулю. Предполагается, что $Cg > 0$.

Некоторые значения λ_0 приведены в табл. 1 ($\nu_1 = \nu_2 = 0,3$), где значения α даны в градусах.

Решение сформулированной задачи теории упругости (см. рис.) представляет собой сумму решений следующих двух задач. Первая отличается от нее тем, что вместо первого из условий (2) имеем

$$\theta = 0, \quad r < l, \quad \sigma_\theta = -Cgr^{\lambda_0}, \tag{4}$$

а на бесконечности напряжения затухают как $o(1/r)$ (в (3) отсутствует первое слагаемое). Вторая задача — задача К. Поскольку решение второй задачи известно, достаточно построить решение первой.

Для построения точного решения первой задачи будем использовать метод Винера—Хопфа в сочетании с аппаратом интегрального преобразования Меллина [12].

Решение уравнения Винера—Хопфа задачи. Применяя преобразование Меллина

$$m^*(p) = \int_0^\infty m(r) r^p dr$$

с комплексным параметром p к уравнениям равновесия, условию совместности деформаций, закону Гука, условиям (1) и учитывая второе из условий (2) и условие (4), приходим к следующему функциональному уравнению Винера—Хопфа:

ТАБЛИЦА 1

e_0	α, град									
	15	30	45	60	75	105	120	135	150	165
2	–0,036	–0,075	–0,112	–0,112	–0,086	–0,025	–0,054	–0,089	–0,117	–0,104
3	–0,068	–0,132	–0,180	–0,184	–0,127	–0,037	–0,081	–0,130	–0,173	–0,168
5	–0,122	–0,232	–0,258	–0,248	–0,167	–0,049	–0,104	–0,168	–0,228	–0,241
10	–0,215	–0,310	–0,332	–0,308	–0,203	–0,059	–0,124	–0,202	–0,278	–0,318

$$\Phi^+(p)+\frac{s}{p+\lambda_0+1}=ctgp\pi G(p)\Phi^-(p),\ \ G(p)=\frac{\Delta(p)\sin p\pi}{2\Delta_0(p)\cos p\pi}, \tag{5}$$

$$\Delta_0(p)=(\sin 2p\alpha+p\sin 2\alpha)[æ_1\sin 2p(\pi-\alpha)+p\sin 2\alpha]+$$
$$+\{(1+æ_1)(1+æ_2)\sin^2 p\pi-(\sin 2p\alpha+p\sin 2\alpha)[æ_1\sin 2p(\pi-\alpha)+p\sin 2\alpha]-$$
$$-[\sin 2p(\pi-\alpha)-p\sin 2\alpha](æ_2\sin 2p\alpha-p\sin 2\alpha)\}e+$$
$$+[\sin 2p(\pi-\alpha)-p\sin 2\alpha](æ_2\sin 2p\alpha-p\sin 2\alpha)e^2,$$
$$\Delta(p)=-4(\sin^2 p\alpha-p^2\sin^2\alpha)[æ_1\sin 2p(\pi-\alpha)+p\sin 2\alpha]+$$
$$+\{(1+æ_1)(1+æ_2)\sin 2p\pi+4(\sin^2 p\alpha-p^2\sin^2\alpha)[æ_1\sin 2p(\pi-\alpha)+p\sin 2\alpha]-$$
$$-[\sin 2p(\pi-\alpha)-p\sin 2\alpha][(1+æ_1)(1+æ_2)-4(æ_2\sin^2 p\alpha+p^2\sin^2\alpha)]\}e+$$
$$+[\sin 2p(\pi-\alpha)-p\sin 2\alpha][(1+æ_2)^2-4(æ_2\sin^2 p\alpha+p^2\sin^2\alpha)]e^2,\ s=-Cgl^{\lambda_0},$$

$$\Phi^+(p)=\int_1^\infty\sigma_\theta(\rho l,0)\rho^p d\rho,\qquad \Phi^-(p)=\frac{E_2}{2(1-\nu_2^2)}\int_0^1\left.\frac{\partial u_\theta}{\partial r}\right|_{\substack{r=\rho l\\ \theta=0}}\rho^p d\rho.$$

Здесь $-\varepsilon_1<\operatorname{Re}p<\varepsilon_2,\varepsilon_{1,2}$ — достаточно малые положительные числа.

Функция $G(it)(-\infty<t<\infty)$ представляет собой действительную положительную четную функцию t, стремящуюся к единице при $t\to\infty$. Следовательно, индекс функции $G(p)$ по мнимой оси равен нулю. Поскольку, кроме того, функция $G(p)$ на мнимой оси удовлетворяет условию Гельдера, имеет место факторизация

$$G(p)=\frac{G^+(p)}{G^-(p)}\ \ (\operatorname{Re}p=0),\ \ \exp\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{\ln G(z)}{z-p}dz\right]=\begin{cases}G^+(p)\ \ (\operatorname{Re}p<0),\\ G^-(p)\ \ (\operatorname{Re}p>0).\end{cases} \tag{6}$$

Функция $G^+(p)$ аналитическая, не имеет нулей и стремится к единице при $p\to\infty$ в полуплоскости $\operatorname{Re}p<0$, а функция $G^-(p)$ аналитическая, не имеет нулей и стремится к единице при $p\to\infty$ в полуплоскости $\operatorname{Re}p<0$.

Функцию $p\operatorname{ctg}p\pi$ можно факторизовать так:

$$p\operatorname{ctg}p\pi=K^+(p)K^-(p),\quad K^\pm(p)=\frac{\Gamma(1\mp p)}{\Gamma(1/2\mp p)} \tag{7}$$

($\Gamma(z)$ — гамма-функция). Функция $K^+(p)$ аналитическая и не имеет нулей в полуплоскости $\operatorname{Re}p<1/2$, а функция $K^-(p)$ аналитическая и не имеет нулей в полуплоскости $\operatorname{Re}p>-1/2$. Справедливы асимптотики

$$K^+(p)\sim\sqrt{-p},\quad K^-(p)\sim\sqrt{p}\ \ (p\to\infty). \tag{8}$$

С помощью факторизаций (6), (7) уравнение (5) перепишем в виде

$$\frac{\Phi^+(p)}{K^+(p)G^+(p)}+\frac{s}{(p+\lambda_0+1)K^+(p)G^+(p)}=\frac{K^-(p)\Phi^-(p)}{pG^-(p)}\ \ (\operatorname{Re}p=0). \tag{9}$$

Имеет место представление

$$\frac{s}{(p+\lambda_0+1)K^+(p)G^+(p)}=\frac{s}{p+\lambda_0+1}\left[\frac{1}{K^+(p)G^+(p)}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{K^+(-\lambda_0-1)G^+(-\lambda_0-1)}\right]+\frac{s}{(p+\lambda_0+1)K^+(-\lambda_0-1)G^+(-\lambda_0-1)}\ (\mathrm{Re}\,p=0). \qquad (10)$$

Подставляя (10) в (9), получаем

$$\frac{\Phi^+(p)}{K^+(p)G^+(p)}+\frac{s}{(p+\lambda_0+1)}\left[\frac{1}{K^+(p)\,G^+(p)}-\frac{1}{K^+(-\lambda_0-1)\,G^+(-\lambda_0-1)}\right]=$$

$$=\frac{K^-(p)\,\Phi^-(p)}{pG^-(p)}-\frac{s}{(p+\lambda_0+1)K^+(-\lambda_0-1)\,G^+(-\lambda_0-1)}\ (\mathrm{Re}\,p=0). \qquad (11)$$

Функция в левой части (11) аналитична в полуплоскости $\mathrm{Re}\,p<0$, а функция в правой части (11) аналитична в полуплоскости $\mathrm{Re}\,p>0$. В силу принципа аналитического продолжения эти функции равны одной и той же функции, аналитической во всей плоскости p.

Исходя из известных асимптотик

$$\theta=0,\quad r\to l+0,\quad \sigma_\theta\sim\frac{K_I}{\sqrt{2\pi(r-l)}},$$

$$\theta=0,\quad r\to l-0,\quad \frac{\partial u_\theta}{\partial r}\sim-\frac{2(1-\nu_2^2)}{E_2}\frac{K_I}{\sqrt{2\pi(l-r)}}$$

(K_I — коэффициент интенсивности напряжений в конце трещины), по теореме абелева типа находим

$$\Phi^+(p)\sim\frac{K_I}{\sqrt{-2pl}},\quad \Phi^-(p)\sim-\frac{K_I}{\sqrt{2pl}}\ (p\to\infty). \qquad (12)$$

Таблица 2

e_0	α, град									
	15	30	45	60	75	105	120	135	150	165
0,1	1,829	4,323	4,835	2,541	0,325	1,867	4,580	6,227	4,428	1,244
0,2	1,479	3,669	3,278	1,875	0,192	1,514	4,095	5,186	3,394	0,814
0,3	1,116	3,327	2,799	1,562	0,179	1,245	3,696	4,818	2,855	0,599
0,5	0,942	3,144	2,524	1,331	0,167	0,999	3,322	4,501	2,514	0,375
2	0,703	1,775	1,953	1,145	0,202	0,071	0,674	1,202	0,830	0,168
3	0,977	2,178	2,209	1,221	0,208	0,100	0,933	1,601	1,031	0,194
5	1,327	2,669	2,510	1,306	0,219	0,155	1,434	2,364	1,412	0,237
10	1,928	3,907	2,924	1,410	0,229	0,290	2,662	4,236	2,338	0,334

Из (6), (8) и (12) следует, что функции в левой и правой частях (11) стремятся к нулю при $p \to \infty$ в полуплоскостях $\operatorname{Re} p < 0$ и $\operatorname{Re} p > 0$ соответственно. В силу теоремы Лиувилля единая аналитическая функция тождественно равна нулю во всей плоскости p.

Таким образом, решение уравнения Винера—Хопфа (5) имеет вид

$$\Phi^+(p) = \frac{sK^+(p)G^+(p)}{p+\lambda_0+1}\left[\frac{1}{K^+(-\lambda_0-1)G^+(-\lambda_0-1)} - \frac{1}{K^+(p)G^+(p)}\right] \quad (\operatorname{Re} p < 0),$$

$$\Phi^-(p) = \frac{s\, pG^-(p)}{K^+(-\lambda_0-1)G^+(-\lambda_0-1)(p+\lambda_0+1)K^-(p)} \quad (\operatorname{Re} p > 0). \tag{13}$$

Определение коэффициента интенсивности напряжений. С помощью (13) находим асимптотику

$$\Phi^-(p) \sim \frac{s}{K^+(-\lambda_0-1)G^+(-\lambda_0-1)\sqrt{p}} \quad (p \to \infty). \tag{14}$$

Согласно (12), (14) получаем следующую формулу для коэффициента интенсивности напряжений:

$$K_I = K_I^0 |C| l^{\lambda_0+1/2}, \quad K_I^0 = \frac{\sqrt{2}|g|\Gamma(\lambda_0+3/2)}{\Gamma(\lambda_0+2)G^+(-\lambda_0-1)}.$$

Некоторые значения K_I^0 приведены в табл. 2.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Саврук М.П. Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами. Киев: Наук. думка, 1988. 620 с.
2. Храпков А.А. Задачи об упругом равновесии бесконечного клина с несимметричным надрезом в вершине, разрешимые в замкнутой форме. *Прикл. математика и механика*. 1971. **35**, № 6. С. 1062—1069.
3. Kaminskii A.A., Kipnis L.A., Khazin G.A. Analysis of the Plastic Zone at a Corner Point by the Trident Model. *Int. Appl. Mech*. 2002. **38**, № 5. P. 611—616.
4. Некислых Е.М., Острик В.И. Задачи об упругом равновесии клина с трещинами на оси симметрии. *Изв. РАН. Механика твердого тела*. 2010. № 5. С. 111—129.
5. Panasyuk V.V., Savruk M.P. Model for plasticity bands in elastoplastic failure mechanics. *Mater. Sci*. 1992. № 1. P. 41—57.
6. Loboda V.V., Sheveleva A.E. Determining Prefracture Zones at a Crack Tip Between Two Elastic Orthotropic Bodies. *Int. Appl. Mech*. 2003. **39**, № 5. P. 566—572.
7. Kaminsky A.A., Dudik M.V., Kipnis L.A. Initial kinking of an interface crack between two elastic media. *Int. Appl. Mech*. 2007. **43**, № 10. P. 1090—1099.
8. Кулиев В.Д., Работнов Ю.Н., Черепанов Г.П. Торможение трещины на границе раздела различных упругих сред. *Изв. АН СССР. Механика твердого тела*. 1978. № 4. С. 120—128.
9. Kaminsky A.A., Kipnis L.A., Kolmakova V.A. Model of the fracture process zone at the tip of a crack reaching the nonsmooth interface between elastic media. *Int. Appl. Mech*. 2008. **44**, № 10. P. 1084—1092.
10. Kipnis L.A., Polishchuk T.V. Analysis of the plastic zone at the corner point of interface. *Int. Appl. Mech*. 2009. **45**, № 2. P. 159–168.
11. Kaminsky A.A., Kipnis L.A., Polishchuk T.V. Initial fracture process zone at the corner point of the interface between elastic bodies. *Int. Appl. Mech*. 2012. **48**, № 6. P. 700—709.
12. Нобл Б. Применение метода Винера—Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. Москва: Изд-во иностр. лит., 1962. 279 с.

Поступило в редакцию 03.04.2017

REFERENCES

1. Savruk, M. P. (1988). Stress intensity factors in bodies with cracks. Kiev: Naukova Dumka (in Russian).
2. Khrapkov, A. A. (1971). Closed form solutions of problems on the elastic equilibrium of an infinite wedge with nonsymmetric notch at the apex. Appl. Math. Mech., 35, No. 6, pp. 1062-1069 (in Russian).
3. Kaminskii, A. A., Kipnis, L. A. & Khazin, G. A. (2002). Analysis of the Plastic Zone at a Corner Point by the Trident Model. Int. Appl. Mech., 38, No. 5, pp. 611-616.
4. Nekislykh, K. M., & Ostrik, V. I. (2010). Problems on elastic equilibrium of a wedge with cracks on the axis of symmetry. Mech. of Solids, No. 5, pp. 111-129 (in Russian).
5. Panasyuk, V. V. & Savruk, M. P. (1992). Model for plasticity bands in elastoplastic failure mechanics. Mater. Sci., No. 1, pp. 41-57.
6. Loboda, V. V. & Sheveleva, A. E. (2003). Determining Prefracture Zones at a Crack Tip Between Two Elastic Orthotropic Bodies. Int. Appl. Mech., 39, No. 5, pp. 566-572.
7. Kaminsky, A. A., Dudik, M. V. & Kipnis, L. A. (2007). Initial kinking of an interface crack between two elastic media. Int. Appl. Mech., 43, No. 10, pp. 1090-1099.
8. Kuliev, V. D., Rabotnov, Yu. N. & Cherepanov, G. P. (1978). Crack retardation at the boundary separating different elastic materials. Mech. of Solids, No. 4, pp. 120-128 (in Russian).
9. Kaminsky, A. A., Kipnis, L. A. & Kolmakova, V. A. (2008). Model of the fracture process zone at the tip of a crack reaching the nonsmooth interface between elastic media. Int. Appl. Mech., 44, No. 10, pp. 1084-1092.
10. Kipnis, L. A. & Polishchuk, T. V. (2009). Analysis of the plastic zone at the corner point of interface. Int. Appl. Mech., 45, No. 2, pp. 159-168.
11. Kaminsky, A. A., Kipnis, L. A. & Polishchuk, T. V. (2012). Initial fracture process zone at the corner point of the interface between elastic bodies. Int. Appl. Mech., 48, No. 6, pp. 700-709.
12. Noble, B. (1962). Using of the Wiener–Hopf method for the solve the Partial derivative equations. Moscow: Izdatelstvo Inostr. lit. (in Russian).

Received 03.04.2017

А.О. Камінський[1], *Л.А. Кіпніс*[2], *Т.В. Поліщук*[2]

[1] Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, Київ
[2] Уманський державний педагогічний університет ім. Павла Тичини
E-mail*:* dfm11@ukr.net, polischuk_t@ukr.net

ПРО ПРУЖНУ РІВНОВАГУ КУСКОВО-ОДНОРІДНОЇ ПЛОЩИНИ З ТРІЩИНОЮ У КУТОВІЙ ТОЧЦІ МЕЖІ ПОДІЛУ

Розглянуто статичну симетричну задачу теорії пружності для кусково-однорідної ізотропної площини з межею поділу середовищ у формі сторін кута і тріщиною в кутовій точці. Побудовано точний розв'язок рівняння Вінера—Гопфа задачі. Визначено коефіцієнт інтенсивності напружень у кінці тріщини.

Ключові слова: *кусково-однорідна площина, межа поділу, кутова точка, тріщина, коефіцієнт інтенсивності напружень.*

A.A. Kaminsky[1], *L.A. Kipnis*[2], *T.V. Polischuk*[2]

[1] S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of the NAS of Ukraine, Kiev
[2] Pavlo Tychyna Uman State Pedagogical University
E-mail*:* dfm11@ukr.net, polischuk_t@ukr.net

ON THE ELASTIC EQUILIBRIUM OF A PIECEWISE HOMOGENEOUS PLANE WITH A CRACK AT THE CORNER POINT OF THE INTERFACE

The static symmetric problem of the theory of elasticity for a piecewise homogeneous isotropic plane with the interface in the form of angle sides and a crack at the corner point is considered. The exact solution of the Wiener—Hopf equation of the problem is constructed. The stress intensity factor at the crack tip is determined.

Keywords: *piecewise homogeneous plane, interface, corner point, crack, stress intensity factor.*