

doi: <https://doi.org/10.15407/dopovidi2017.10.003>

УДК 517.98

Е.Н. Ашурова¹, В.Л. Островський², Ю.С. Самойленко²

¹ Український центр клінічних досліджень компанії “Chiltern”, Київ

² Інститут математики НАН України, Київ

E-mail: work1991@ukr.net, vo@imath.kiev.ua, yurii_sam@imath.kiev.ua

Про зображення алгебр, породжених скінченним розкладом одиниці та набором ортогональних проекторів

Представлено академіком НАН України Ю.С. Самойленком

Досліджено властивості зображень інволютивної алгебри, породженої самоспряженими ідемпотентами $q_1, \dots, q_n$ та $p_1, \dots, p_m$, що задовольняють співвідношення $q_1 + \dots + q_n = e$, $p_j p_k = 0$, $j \neq k$. Відповідні набори проекторів у гільбертовому просторі виникають при дослідженні фредгольмовості тепліцевих операторів. Зокрема, для незвідних зображень загального положення з $\dim P_j = 1$, $j = 1, \dots, m$, знайдено комутативний набір нормальних операторів, сумісний спектр якого визначає зображення з точністю до унітарної еквівалентності.

Ключові слова: набори ортопроекторів, тепліцеві оператори.

Один з ефективних методів дослідження фредгольмовості тепліцевих операторів полягає у відображенні опертора у певну C^* -алгебру, породжену набором ортопроекторів і її реалізації неперервними матричними полями (див., наприклад, [1] та наведену там бібліографію). Зокрема, вивчалися властивості C^* -алгебри, породженої наборами ортопроекторів $P, Q_1, \dots, Q_n$ у деякому гільбертовому просторі H , що задовольняють співвідношення $Q_1 + \dots + Q_n = I$, а також більш загальними наборами ортопроекторів $P_1, \dots, P_m, Q_1, \dots, Q_n$ в H , які задовольняють співвідношення

$$P_j \perp P_k, \quad k \neq j, \quad Q_1 + \dots + Q_n = I \quad (1)$$

(див. [2]). У вказаних роботах досліджувалися властивості C^* -алгебри, породженої незвідними наборами ортопроекторів, для яких образ проектора P чи образи проекторів $P_1, \dots, P_m$ є одновимірними просторами. Саме такі набори виникають у конкретних реалізаціях локальних алгебр, пов'язаних з операторами Тепліца з кусково-неперервними символами. Зокрема, показано, що відповідна C^* -алгебра вкладається в алгебру неперервних матричнозначних функцій на певній множині параметрів. У випадку $m = 1$ мно-

© Е.Н. Ашурова, В.Л. Островський, Ю.С. Самойленко, 2017

ISSN 1025-6415. Допов. Нац. акад. наук Укр. 2017. № 10

жина параметрів $c_1, \dots, c_n$, що індексують незвідні зображення, є симплексом

$$c_1 + \dots + c_n = 1, \quad c_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad (2)$$

і розклад довільного зображення на незвідні задається спектральним розкладом відповідного комутативного набору самоспряжених операторів $C_1, \dots, C_n$.

Проте у разі $m \geq 2$ подібного опису множини, що параметризує незвідні зображення, наведено не було. Питання про параметризацію незвідних зображень таких алгебр у випадку $m \geq 2$ досліджується в даній роботі.

Зручним інструментом дослідження наборів ортопроекторів у гільбертовому просторі є операторна матриця Грама (див. [3]). У першому пункті викладено конструкцію операторної матриці Грама та її основні властивості, що використовуються у подальшому.

У другому пункті розглядаються загальні властивості наборів ортопроекторів з умовами (1) при $m \geq 2$. Зокрема, показано, що за умови, коли кожна пара проекторів (P_j, Q_k) , (P_j, Q_k) , $j = 1, \dots, m$, $k = 1, \dots, n$, знаходиться у загальному положенні, задача опису з точністю до унітарної еквівалентності наборів еквівалентна задачі опису блочних $m \times m$ додатних самоспряжених матриць $A_1, \dots, A_n$ з умовою $A_1 + \dots + A_n = I$. Ця умова є природним аналогом умови (2) у випадку $m = 1$.

Відомо [4], що навіть у випадку $m = 1$, $n \geq 3$, задача опису наборів ортопроекторів з умовами (1) з точністю до унітарної еквівалентності є надзвичайно складною (*-дикою). У третьому пункті досліджуються набори з додатковими комутаційними співвідношеннями, які еквівалентні умові, що у незвідному зображенні образи ортопроекторів $P_1, \dots, P_m$ одновимірні. У цьому випадку задача опису незвідних наборів є ручною. Основним результатом є теорема 4, яка описує комутативний набір нормальних операторів, спектральний розклад яких дає розклад набору на незвідні набори.

Дана робота є узагальненням попередньої роботи [5], де аналогічні питання досліджувались у випадку $m = 2$.

1. Операторна матриця Грама. Нехай $P_1, \dots, P_n$ — набір проекторів у H і нехай $H_j = \text{Im } P_j$, $j = 1, \dots, n$. Позначимо $S_j: H_j \rightarrow H$ ізометричними вкладеннями, так що $S_j S_j^* = P_j$, $S_j^* S_j = I_{H_j}$. Розглянемо простір $\tilde{H} = H_1 \oplus \dots \oplus H_n$ та оператор $J = (S_1, \dots, S_n): \tilde{H} \rightarrow H$.

Означення 1 [3, 6]. Оператор $G = J^* J: \tilde{H} \rightarrow \tilde{H}$ називається операторною матрицею Грама системи підпросторів $(H; H_1, \dots, H_n)$.

Блочні елементи операторної матриці Грама мають вигляд $(S_j^* S_k)_{j,k=1}^n$, отже, у випадку одновимірних проекторів P_j маємо $H_j = \mathbb{C}\langle e_j \rangle$, $\|e_j\| = 1$ та G є матрицею Грама системи векторів $(e_1, \dots, e_n)$.

Теорема 1 [3]. Операторна матриця Грама має такі властивості:

1. $G = G^*$, $G \geq 0$.
2. Діагональні блоки G є одиничними операторами, $G_{jj} = I_{H_j}$, $j = 1, \dots, n$.
3. $G_{jk} = 0 \Leftrightarrow H_j \perp H_k$.

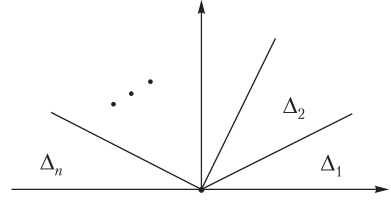
Нехай $Q_1, \dots, Q_n$ — проектори на H_j в $\tilde{H}$.

Теорема 2 [3]. Набір $(P_1, \dots, P_n)$ в H незвідний тоді і лише тоді, коли набір $(G, Q_1, \dots, Q_n)$ незвідний в $\tilde{H}$.

1. Набори $(P_1, \dots, P_n)$ та $(P'_1, \dots, P'_n)$ унітарно еквівалентні тоді і лише тоді, коли відповідні набори $(G, Q_1, \dots, Q_n)$ та $(G', Q'_1, \dots, Q'_n)$ унітарно еквівалентні.

Таким чином, маючи набір проекторів $P_1, \dots, P_n$ в H , можна побудувати відповідний оператор $G \geq 0$ та набір ортопроекторів $Q_1, \dots, Q_n$, для яких

$$\sum_{j=1}^n Q_j = I, \quad Q_j G Q_j = Q_j.$$



Навпаки, маючи набір проекторів $Q_1, \dots, Q_n$ у гільбертовому просторі $\tilde{H}$, для яких $\sum_{k=1}^n Q_k = I$, та обмежений оператор $B \geq 0$ в $\tilde{H}$, для якого $Q_j B Q_j = Q_j$, $j = 1, \dots, n$, можна однозначно з точністю до унітарної еквівалентності відновити набір $P_1, \dots, P_n$, для якого B буде операторною матрицею Грама.

2. Алгебри “all but one”. Розглянемо $*$ -алгебру $\mathcal{P}_{abo,n}$ (див. [1]), породжену твірними $p, q_1, \dots, q_n$ та співвідношеннями

$$p^2 = p^* = p, \quad q_j^2 = q_j^* = q_j, \quad j = 1, \dots, n, \\ q_1 + \dots + q_n = e.$$

Зображення цієї алгебри – набір проекторів $P, Q_1, \dots, Q_n$ з умовою $Q_1 + \dots + Q_n = I$. При $n \geq 2$ задача унітарної класифікації усіх зображень є дуже складною ($*$ -диною). Водночас, за додаткової умови $\dim P = 1$ опис усіх незвідних зображень є $*$ -ручною задачею. Множина незвідних зображень загального положення параметризується n -ками додатних чисел $c_1, \dots, c_n$, для яких $c_1 + \dots + c_n = 1$. При цьому усі незвідні зображення мають розмірність $\leq n$.

Приклад (простір Бергмана). Нехай Π позначає верхню комплексну півплощину. Функції з $L_2(\Pi)$, що є аналітичними всередині Π , утворюють підпростір $\mathcal{A}^2(\Pi)$ (підпростір Бергмана). Позначимо P проектор на $\mathcal{A}^2(\Pi)$ в $L_2(\Pi)$ (проектор Бергмана). Поділимо Π на сектори $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ з вершинами у точці 0 (рисунок), $\bigcup_1^n \Delta_k = \Pi$, і покладемо $Q_j = M_{\chi_j}$, $j = 1, \dots, m$, – оператори множення на індикатори множин $\Delta_1, \dots, \Delta_n$. Тоді $Q_1 + \dots + Q_n = I$ і набір $P, Q_1, \dots, Q_n$ розкладається на незвідні набори з $\dim P \leq 1$. Такі набори виникають при вивченні фредгольмовості певних класів теплицевих операторів (див. [1]).

3. Набори “All but m ” проекторів.

Приклад (простори типу Бергмана). Для кожного $k = 1, 2, \dots$, розглянемо підпростір бергманівського типу $\mathcal{A}_k^2, \mathcal{A}_{-k}^2 \subset L_2(\Pi)$, породжений функціями f , для яких відповідно $\frac{\partial^k}{\partial \bar{z}^k} f = 0$ чи $\frac{\partial^k}{\partial z^k} f = 0$. Означимо

$$\mathcal{A}_1^2 = \mathcal{A}_1^2 = \mathcal{A}^2, \quad \mathcal{A}_k^2 = \mathcal{A}_k^2 \ominus \mathcal{A}_{k-1}^2, \quad k > 1,$$

$$\mathcal{A}_{-1}^2 = \mathcal{A}_{-1}^2, \quad \mathcal{A}_{-k}^2 = \mathcal{A}_{-k}^2 \ominus \mathcal{A}_{-k+1}^2, \quad k < -1,$$

і розглянемо проектор P_k на підпростір $\mathcal{A}_k$ в $L_2(\Pi)$. Тоді $\sum_{k=1}^{\infty} (P_k + P_{-k}) = I$ [7].

Нехай $P_1, \dots, P_m$ – скінченний піднабір проекторів з набору (P_k) . Тоді проектори $Q_1, \dots, Q_n, P_1, \dots, P_m$ задовольняють умови

$$Q_1 + \dots + Q_n = I, \quad P_j P_k = 0, \quad j \neq k.$$

Більш того, такий набір розкладається на незвідні набори, для яких $\dim P_j \leq 1$, $j = 1, \dots, m$ (див. [2]).

Нижче ми вивчатимемо структуру з точністю до унітарної еквівалентності наборів проєкторів $Q_1, \dots, Q_n$, $P_1, \dots, P_m$, для яких

$$\sum_{i=1}^n Q_i = I, \quad P_j \perp P_k, \quad 1 \leq j \neq k \leq m. \quad (3)$$

Такі набори є зображеннями відповідної $*$ -алгебри “all but m ”. Як і у випадку $m = 1$, унітарний опис усіх зображень цієї алгебри є $*$ -дикою задачею. Нижче ми вивчимо деякі загальні властивості таких наборів та вкажемо природну додаткову умову, за якої задача класифікації стає ручною.

Розглянемо ізометричні вкладення $S_j : \text{Im } Q_j \rightarrow H$, $j = 1, \dots, n$ та ізометричні вкладення $T_i : \text{Im } P_i \rightarrow H$, $i = 1, \dots, m$, так що

$$S_j^* S_j = I_{\text{Im } Q_j}, \quad S_j S_j^* = Q_j, \quad T_i^* T_i = I_{\text{Im } P_i}, \quad T_i T_i^* = P_i.$$

Операторна матриця Грама G набору проєкторів $P_1, \dots, P_m$, $Q_1, \dots, Q_n$ має вигляд

$$G = \begin{pmatrix} I & \dots & 0 & T_1^* S_1 & \dots & T_1^* S_n \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & I & T_m^* S_1 & \dots & T_m^* S_n \\ S_1^* T_1 & \dots & S_1^* T_m & I & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_n^* T_1 & \dots & S_n^* T_m & 0 & \dots & I \end{pmatrix}.$$

Позначимо $H_j = \text{Im } P_j$, $j = 1, \dots, m$, $H_0 = \bigoplus_{j=1}^m H_j$ та розглянемо проєктори P'_j в H_0 на підпростори H_j , $j = 1, \dots, m$. Розглянемо оператори

$$B_j = \begin{pmatrix} T_1^* S_j \\ \vdots \\ T_m^* S_j \end{pmatrix} : \text{Im } Q_j \rightarrow H_0,$$

$$A_j = B_j B_j^* : H_0 \rightarrow H_0, \quad j = 1, \dots, n. \quad (4)$$

Твердження 1. *Набір операторів $(P'_1, \dots, P'_m, A_1, \dots, A_n)$ в H_0 має такі властивості:*

1) $P'_1 + \dots + P'_m = I_{H_0}$, $A_1 + \dots + A_n = I_{H_0}$;

2) якщо набори проєкторів $(P_1, \dots, P_m, Q_1, \dots, Q_n)$ та $(\tilde{P}_1, \dots, \tilde{P}_m, \tilde{Q}_1, \dots, \tilde{Q}_n)$ унітарно еквівалентні, то відповідні набори операторів $(P'_1, \dots, P'_m, A_1, \dots, A_n)$ та $(\tilde{P}'_1, \dots, \tilde{P}'_m, \tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_n)$ унітарно еквівалентні.

Зауваження 1. Обернене твердження до п. 2 невірне: легко вказати приклади унітарно нееквівалентних наборів $(P_1, \dots, P_m, Q_1, \dots, Q_n)$ та $(\tilde{P}_1, \dots, \tilde{P}_m, \tilde{Q}_1, \dots, \tilde{Q}_n)$, які породжують той самий набір $(P'_1, \dots, P'_m, A_1, \dots, A_n)$.

Будемо казати, що підпростори $E \subset H$ та $K \subset H$ знаходяться в загальному положенні, якщо $E \cap K = 0$, $E \cap K^\perp = 0$, $E^\perp \cap K = 0$.

Позначимо $P_0 = P_1 + \dots + P_m$.

Теорема 3. Нехай $P_1, \dots, P_m, Q_1, \dots, Q_n$ у просторі H задовольняють умови (3) і нехай $A_1, \dots, A_n$ — відповідні невід’ємні оператори в H_0 , побудовані вище, та нехай також кожна з пар $P_0, Q_j, j = 1, \dots, n$, знаходиться у загальному положенні. Тоді

$$\dim P_0 = \dim Q_j, \quad \ker A_j = 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

Навпаки, якщо задано проектори $P'_1, \dots, P'_m$ та невід’ємні оператори $A_1, \dots, A_n$ в H_0 , для яких

$$P'_1 + \dots + P'_m = I, \quad A_1 + \dots + A_n = I, \quad \ker A_j = 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

то існує єдиний з точністю до унітарної еквівалентності набір проекторів $P_1, \dots, P_m, Q_1, \dots, Q_n$ з умовою (3), для яких $P_0, Q_j, j = 1, \dots, n$, знаходяться у загальному положенні, і який породжує за наведеною вище конструкцією набір проекторів $P'_1, \dots, P'_m$ та операторів $A_1, \dots, A_n$.

4. Незвідні зображення. Позначимо Λ множину всіх мультиіндексів вигляду

$$\alpha = (j_1, k_1, j_2, \dots, k_{l-1}, j_l, k_l, j_1),$$

$$j_s = 1, \dots, m; \quad k_s = 1, \dots, n; \quad s = 1, \dots, l; \quad l = 0, 1, \dots$$

Розглянемо таку множину операторів $C_\alpha, \alpha \in \Lambda$:

$$C_\alpha = P_{j_1} Q_{k_1} P_{j_2} \dots Q_{k_{l-1}} P_{j_l} Q_{k_l} P_{j_1}. \quad (5)$$

Твердження 2. Нехай $Q_1, \dots, Q_n, P_1, \dots, P_m$ — незвідний набір проекторів з умовами (3), для яких $P_j \neq 0, j = 1, \dots, m$. Тоді $\dim P_j = 1, j = 1, \dots, m$ тоді і лише тоді, коли оператори $C_\alpha, \alpha \in \Lambda$, утворюють комутативний набір.

Нехай $\Lambda_i \subset \Lambda$ — підмножина індексів, що починаються та закінчуються на $i, i = 1, \dots, m$, так що $\Lambda = \Lambda_1 \cup \dots \cup \Lambda_m$.

Теорема 4. Нехай набір проекторів $P_1, \dots, P_m, Q_1, \dots, Q_n$ породжує незвідне зображення (3), причому:

i) $P_i \neq 0, i = 1, \dots, m$;

ii) для кожного $j = 1, \dots, n$ пара проекторів $P_0 = P_1 + \dots + P_m$ та Q_j знаходяться у загальному положенні;

iii) оператори $C_\alpha, \alpha \in \Lambda$, утворюють комутативний набір.

Тоді $C_\alpha = c_\alpha P_j, c_\alpha \in \mathbb{C}, \alpha \in \Lambda_j$, та скінченний набір чисел

$$c_\alpha, \quad |\alpha| \in \{3, 5, 7\},$$

визначає проектори $P_1, \dots, P_m, Q_1, \dots, Q_n$ однозначно з точністю до унітарної еквівалентності.

Зауваження. 1. У загальному (звідному) випадку спектральний розклад комутативного набору нормальних операторів $C_\alpha, \alpha \in \Lambda$ дає розклад набору $P_1, \dots, P_m, Q_1, \dots, Q_n$ на незвідні набори.

2. Скінченний набір параметрів, описаний у попередній теоремі, є надлишковим. Для різних конкретних зображень можна вказати різні підмножини цього набору, яких достатньо для відновлення зображення.

3. Наведена теорема не дає опису множини всіх можливих наборів параметрів. Ця множина визначається умовами $A_1 + \dots + A_n = I, A_j > 0$ в $\mathbb{C}^m$.

ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Vasilevski N.L. C^* -algebras generated by orthogonal projections and their applications. *Integr. Equ. Oper. Theory*. 1998. **31**. P. 113–132.
2. Karlovich Yu.I., Pessoa L.V. C^* -algebras of Bergmann type operators with piecewise continuous coefficients. *Integr. Equ. Oper. Theory*. 2007. **57**. P. 521–565.
3. Стрелец А.В., Фещенко И.С. О системах подпространств гильбертова пространства, удовлетворяющих условиям на углы между каждой парой подпространств. *Алгебра и анализ*. 2012. **24**, № 5. С. 181–214.
4. Кругляк С.А., Самойленко Ю.С. Об унитарной эквивалентности наборов самосопряженных операторов. *Функц. анализ из его прил.* 1980. **14**, вып. 1. С. 60–62.
5. Ашурова Е.Н., Островський В.Л. Про зображення “all but two” алгебр. *Зб. праць Інституту математики НАН України*. 2015. **12**, № 1. С. 8–21.
6. Самойленко Ю.С., Стрелец А.В. О простых n -ках подпространств гильбертова пространства. *Укр. мат. журн.* 2009. **61**, № 12. С. 1668–1703.
7. Vasilevski N.L. On the structure of Bergmann and poly-Bergmann spaces. *Integr. Equ. Oper. Theory*. 1999. **33**. P. 471–488.

Надійшло до редакції 27.06.2017

REFERENCES

1. Vasilevski, N. L. (1998). C^* -algebras generated by orthogonal projections and their applications. *Integr. Equ. Oper. Theory*, 31, pp. 113-132.
2. Karlovich, Yu. I. & Pessoa, L. V. (2007). C^* -algebras of Bergmann type operators with piecewise continuous coefficients. *Integr. Equ. Oper. Theory*, 57, pp. 521-565.
3. Strelets, A. V. & Feshchenko, I. S. (2012). On systems of subspaces of a Hilbert space that satisfy conditions on the angles between every pair of subspaces. *St. Petersburg Math. J.*, 24, No. 5, pp. 823–846.
4. Kruglyak, S. A. & Samoilenko, Ju. S. (1980). Unitary equivalence of sets of self-adjoint operators. *Funct. Anal. Appl.*, 14, No. 1, pp. 48-50.
5. Ashurova, E.N. & Ostrovskiy, V.L. (2015). On representations of “all but two” algebras. *Zbirnyk Prats Instytutu Matematyky NAN Ukrainy*, 12, No. 1. pp. 8-21 (in Ukrainian).
6. Samoilenko, Yu. S. & Strelets, A. V. (2009). On simple n -tuples of subspaces of a Hilbert space. *Ukr. Math. J.*, 61, No. 12, pp. 1956-1994.
7. Vasilevski, N.L. (1999). On the structure of Bergmann and poly-Bergmann spaces. *Integr. Equ. Oper. Theory*, 33, pp. 471-488.

Received 27.06.2017

Е.Н. Ашурова¹, В.Л. Островський², Ю.С. Самойленко²

¹ Український центр клінічних досліджень компанії “Chiltern”, Київ

² Інститут математики НАН України, Київ

E-mail: work1991@ukr.net, vo@imath.kiev.ua, yurii_sam@imath.kiev.ua

О ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ АЛГЕБР, ПОРОЖДЕННЫХ КОНЕЧНЫМ РАЗЛОЖЕНИЕМ ЕДИНИЦЫ И НАБОРОМ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ПРОЕКТОРОВ

Исследованы свойства представлений инволютивной алгебры, порожденной самосопряженными идемпотентами $q_1, \dots, q_n$ и $p_1, \dots, p_m$, удовлетворяющими соотношениям $q_1 + \dots + q_n = e$, $p_j p_k = 0$, $j \neq k$. Соответствующие наборы проекторов в гильбертовом пространстве возникают при исследовании фредгольмовости матричных операторов. В частности, для неприводимых представлений общего положения с $\dim P_j = 1$, $j = 1, \dots, m$, найден набор коммутирующих нормальных операторов, совместный спектр которых определяет соотношение с точностью до унитарной эквивалентности.

Ключевые слова: наборы ортопроекторов, матричные операторы.

*E.N. Ashurova*¹, *V.L. Ostrovskyi*², *Yu.S. Samoilenko*²

¹ Chiltern Clinical Research in Ukraine, Kiev

² Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine, Kiev

E-mail: work1991@ukr.net, vo@imath.kiev.ua, yurii_sam@imath.kiev.ua

ON REPRESENTATIONS OF THE ALGEBRAS GENERATED
BY A FINITE RESOLUTION OF THE IDENTITY
AND A COLLECTION OF JOINTLY ORTHOGONAL PROJECTIONS

We study properties of representations of the involutive algebra generated by self-adjoint idempotents, $q_1, \dots, q_n$ and $p_1, \dots, p_m$, which satisfy the conditions $q_1 + \dots + q_n = e$, $p_j p_k = 0$, $j \neq k$. The corresponding collections of projections in a Hilbert space arise in the study of the Fredholm properties of Toeplitz operators. In particular, for generic irreducible representations with $\dim P_j = 1$, $j = 1 \dots, m$, we have constructed a commuting family of normal operators, whose joint spectrum determines the representation up to unitary equivalence.

Keywords: *families of orthoprojections, Toeplitz operators.*