ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

doi: https://doi.org/10.15407/dopovidi2017.09.026
УДК 519.85

С.В. Яковлев

Национальный аэрокосмический университет
им. Н.Е. Жуковского “Харьковский авиационный институт”
E-mail: svsyak7@gmail.com

О комбинаторной структуре задач оптимального размещения геометрических объектов

Представлено членом-корреспондентом НАН Украины Ю.Г. Стояном

Рассматривается задача оптимального размещения геометрических объектов с заданными формой и фиксированными физико-метрическими параметрами. Выделяется комбинаторная структура задачи путем формирования множества кортежей физико-метрических параметров. На основе функционального представления множества перестановок кортежей формулируется эквивалентная постановка, в которой физико-метрические параметры рассматриваются как независимые переменные. Предложенный подход иллюстрируется при решении задачи упаковки кругов заданных радиусов в круге минимального радиуса.

Ключевые слова: *упаковка, оптимизация, комбинаторное множество, кортеж.*

Задачи оптимального размещения геометрических объектов вызывают постоянный интерес исследователей [1—5]. Это касается как выделения специальных классов задач, для которых можно предложить новые эффективные методы решения, так и применения современных методов теории оптимизации для решения задач в довольно общей постановке. Толчком к развитию этого направления послужило создание теории Ф-функций Ю.Г. Стояна, получившей свое развитие в работах [6, 7]. В настоящей статье предлагается новый взгляд на формализацию и методы решения задач размещения как задач математического программирования путем выделения их комбинаторной структуры.

Рассмотрим задачу размещения геометрических объектов в следующей постановке. Заданы объекты $S_0, S_1, \ldots, S_n$ фиксированной формы, каждый из которых в соответствующем пространстве характеризуется своими параметрами размещения $p^i = (p_1^i, p_2^i \ldots, p_\alpha^i)$ и физико-метрическими параметрами $r^i = (r_1^i, r_2^i, \ldots, r_\beta^i)$, $i \in \{0\} \cup J_n$, $J_n = \{1, 2, \ldots, n\}$. $i \in \{0\} \cup J_n$. Параметры размещения задают положение объекта в пространстве, а физико-метрическими параметрами являются, например, линейные размеры объекта, его масса и др.

Объект S_0 назовем областью размещения. Зафиксируем его положение в пространстве, положив $p^0 = (0, 0, \ldots, 0)$. Физико-метрические параметры $r^0 = (r_1^0, r_2^0, \ldots, r_\beta^0)$ области размещения могут быть переменными. Объекты S_i с параметрами размещения p^i назовем размещаемыми объектами и обозначим $S_i(p^i)$, $i \in J_n$. При этом физико-метрические параметры размещаемых объектов принимают фиксированные значения, т.е. каждому $S_i(p^i)$ соответствует единственный набор $r^i = (r_1^i, r_2^i, \ldots, r_\beta^i)$, $i \in J_n$.

Сформулируем оптимизационную задачу размещения в виде

$$F(r^0, p^1, p^2 .., p^n) \to \text{extr} \tag{1}$$

при ограничениях

$$\Phi_{ij}(p^i, p^j) \geqslant 0, \ i \in J_n, \ j \in J_n, \ i < j, \tag{2}$$

$$\Phi_{0j}(p^i, r^0) \geqslant 0, \ i \in J_n, \tag{3}$$

где $F(\cdot)$ — заданная функция, а неравенства (1)—(3) задают соответственно условия непересечения объектов $S_i(p^i)$ и $S_j(p^j)$ и их размещения в области $S_0(p^0)$. Для формализация указанных условий для различных классов объектов используется теория Ф-функций.

Осуществим следующие эквивалентные преобразования задачи (1)—(3). С одной стороны, положим, что физико-метрические параметры r^i, $i \in J_n$ являются независимыми переменными. С другой стороны, сформируем такую систему ограничений задачи, чтобы допустимыми были те и только те значения переменных r^i, $i \in J_n$, которые совпадают с исходными фиксированными значениями.

С этой целью выделим следующую комбинаторную структуру задачи. Каждому объекту S_i поставим в соответствие кортеж его физико-метрических параметров r^i, $i \in J_n$. Объект S_i с параметрами размещения p^i и физико-метрическими параметрами r^i обозначим $S_i(p^i)$, $i \in \{0\} \cup J_n$.

Пусть $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_n)$ — произвольная перестановка первых n натуральных чисел. Каждому элементу $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_n)$ поставим в соответствие точку $x \in R^m$, $m = n\beta$ по следующему правилу:

$$x = (x_1, \ldots, x_m) = (r_1^{\pi_1}, r_2^{\pi_1}, \ldots, r_\beta^{\pi_1}, r_1^{\pi_2}, r_2^{\pi_2}, \ldots, r_\beta^{\pi_2}, \ldots, r_1^{\pi_n}, r_2^{\pi_n}, \ldots, r_\beta^{\pi_n}). \tag{4}$$

Совокупность точек вида (4) обозначим $E(r^1, r^2, \ldots, r^n)$. Нетрудно видеть, что множество $E(r^1, r^2, \ldots, r^n)$ представляет собой множество перестановок векторов r^i, $i \in J_n$ и является конечным в пространстве R^m. Важным является тот факт, что множество $E(r^1, r^2, \ldots, r^n)$ является вершинно расположенным, т.е.

$$E(r^1, r^2, \ldots, r^n) = \text{vert conv}\, E(r^1, r^2, \ldots, r^n).$$

Для аналитического описания множества $E(r^1, r^2, \ldots, r^n)$ в пространстве R^m воспользуемся результатами, связанными с функциональными представлениями комбинаторных множеств [8]. Это позволяет описать множество $E(r^1, r^2, \ldots, r^n)$ в виде системы функциональных ограничений вида

$$\varphi_i(r^1, r^2, \ldots, r^n) \geqslant 0, \quad i \in J_l, \tag{5}$$

$$\varphi_i(r^1, r^2, \ldots, r^n) = 0, \quad i \in J_q \setminus J_l, \tag{6}$$

причем точки множества $E(r^1, r^2, \ldots, r^n)$, и только они, будут удовлетворять (5)—(6).

Рассмотрим задачу оптимизации функции (1) при ограничениях (5), (6) и

$$\widetilde{\Phi}_{ij}(p^i, r^i, p^j, r^j) \geqslant 0,\ i \in J_n,\ j \in J_n,\ i < j, \tag{7}$$

$$\widetilde{\Phi}_{ij}(p^i, r^i, r^0) \geqslant 0,\ i \in J_n, \tag{8}$$

где $\widetilde{\Phi}_{ij}(\cdot)$ — Ф-функции объектов $S_i(p^i, r^i)$ и $S_j(p^j, r^j)$, $i \in J_n$, $j \in J_n$, $i < j$, а $\widetilde{\Phi}_{0i}(\cdot)$ — Ф-функции объектов $S_i(p^i, r^i)$ и $cS_0(p^0, r^0)$, $i \in J_n$.

Таким образом, задача (1)—(3) размерности $n\alpha + \beta$ в пространстве переменных $r^0, p^1, p^2, \ldots, p^n$ эквивалентно формулируется как оптимизационная задача (1), (5)—(8) размерности $n\alpha + (n+1)\beta$ в пространстве переменных $r^0, p^1, p^2, \ldots, p^n, r^1, r^2, \ldots, r^n$. Такой подход назовем *методом искусственного расширения пространства*. Достоинством метода при реализации различных вычислительных схем нелинейной оптимизации является возможность покидать области притяжения локальных экстремумов в исходной задаче. Этот факт позволяет рассматривать *метод искусственного расширения пространства* как способ улучшения локальных решений или приближений к ним в задачах размещения геометрических объектов.

В качестве иллюстрации применения предложенного подхода рассмотрим следующую задачу. Пусть задана совокупность кругов $S_1, \ldots, S_n$, радиусы которых соответственно равны $r_1, r_2, \ldots, r_n$. Требуется разместить их в круге S_0 минимального радиуса r_0 с центром в точке $p^0 = (0, 0)$. Обозначим координаты центров кругов $p^i = (u_i, v_i)$, $i \in J_n$. Тогда математическая постановка задачи примет вид

$$r_0 \to \min \tag{9}$$

при ограничениях

$$u_i^2 + v_i^2 \leqslant (r_0 - r_i)^2,\ i \in J_n, \tag{10}$$

$$(u_i - u_j)^2 + (v_i - v_j)^2 \geqslant (r_i - r_j)^2,\ i \in J_n,\ j \in J_n,\ i < j, \tag{11}$$

Таким образом, имеем задачу математического программирования с $2n+1$ переменными r_0, u_i, v_i, $i \in J_n$. Заметим, что в приведенной постановке радиусы $r_1, r_2, \ldots, r_n$ являются константами. Зафиксируем $r_i^0 = r_i$, $i \in J_n$ и, не теряя общности, положим $r_1^0 \leqslant r_2^0 \leqslant \ldots \leqslant r_n^0$. В соответствие с приведенными выше соображениями будем рассматривать $r_1, r_2, \ldots, r_n$ как независимые переменные и сформируем систему уравнений

$$\sum_{i=1}^{n} (r_i - \tau)^k = \sum_{i=1}^{n} (r_i^0 - \tau)^k,\ k = 1, 2, \ldots, n, \tag{12}$$

где

$$\tau = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} r_i^0. \tag{13}$$

Система уравнений (12) обладает тем свойством, что множество ее решений совпадает с множеством всевозможных перестановок из чисел $\{r_1^0, r_2^0, \ldots, r_n^0\}$ [8, 9]. Заметим, что функции, фигурирующие в уравнениях (12), соответствуют функциям в системе (6).

Следовательно, новая сформированная задача (9)—(12) эквивалентна исходной (при фиксированных радиусах) и является задачей условной оптимизации с $3n+1$ переменными r_0, r_i, u_i, v_i, $i \in J_n$.

При решении задачи (9)—(12) могут возникать вычислительные сложности, связанные с высокими степенями в системе уравнений (12), что приводит к накоплению погрешностей вычислений в задачах повышенной размерности. Поэтому представляет интерес формирование функциональных ограничений в полиэдрально-сферическом виде

$$\begin{gathered}\sum_{i=1}^{n} r_i = \sum_{i=1}^{n} r_i^0, \\ \sum_{i \in W} r_i \geqslant \sum_{i=1}^{|W|} r_i^0, \quad \forall W \subseteq J_n, \quad |W| < n,\end{gathered} \tag{14}$$

$$\sum_{i=1}^{n} (r_i - \tau)^2 = \sum_{i=1}^{n} (r_i^0 - \tau)^2, \tag{15}$$

где $|W|$ — мощность множества W, а τ задается выражением (13).

Система уравнений и неравенств (14),(15) однозначно определяет функции в (5), (6) и описывает множество всевозможных перестановок из чисел $\{r_1^0, r_2^0, \ldots, r_n^0\}$ [8, 9].

Существенным достоинством формализации задачи размещения кругов в виде (9)—(11), (14), (15) является тот факт, что эта задача квадратична. Однако количество линейных ограничений в системе (14) велико и оценивается порядком 2^n. Поэтому реализация классических методов нелинейной оптимизации ограничивается размерностью задачи. Вместе с тем учет свойств линейных и квадратичных функций на комбинаторных многогранниках позволяют обойти возникающие трудности.

В задачах локальной оптимизации большой размерности предлагается осуществлять их декомпозицию. Рассмотрим множество $Q = \{r_1, r_2, \ldots, r_n\}$. Осуществим его разбиение на q попарно непересекающихся подмножеств и введем обозначения

$$Q = \bigcup_{k=1}^{q} Q^k, \; Q^k = \{r^{m_1}, r^{m_2}, \ldots, r^{m_{l_k}}\}, \tag{16}$$

$$M^k = \{m_1, m_{2,\ldots,} m_{l_k}\}, \; m_1 < m_2 < \ldots < m_{l_k}, \quad k \in J_q, \tag{17}$$

$$\sum_{k=1}^{q} l_k = n.$$

В соответствии с разбиением (16), (17) представим множество $E(r^1, r^2, \ldots, r^n)$ в виде прямого произведения

$$E(r^1, r^2, \ldots, r^n) = \prod_{k=1}^{q} E^k(r^{m_1}, r^{m_2}, \ldots, r^{m_{l_k}}).$$

При этом ограничения вида (5), (6) записываются отдельно для каждого из множеств $E^k(r^{m_1}, r^{m_2}, \ldots, r^{m_{l_k}})$, $k \in J_q$. Выбор способа разбиения $Q = (r^1, r^2, \ldots, r^n)$ с последующим формированием ограничений, задающих множества $E^k(r^{m_1}, r^{m_2}, \ldots, r^{m_{l_k}})$, $k \in J_q$, задают семейство модификаций предложенного подхода.

Пусть получено некоторое локальное решение задачи (9)—(11) или его приближение при фиксированных $r^1, r^2, \ldots, r^n$. Это решение можно улучшить, выбирая его в качестве начальной точки и рассматривая $r^1, r^2, \ldots, r^n$ как независимые переменные. При этом в задачах большой размерности выбирается некоторое разбиение системы ограничений по правилу (16), (17). Более того, полученное новое локальное решение можно снова попытаться улучшить, выбирая его в качестве начальной точки и формируя новое разбиение множества $Q = (r^1, r^2, \ldots, r^n)$.

Возвращаясь к приведенному выше примеру, можно предложить следующее разбиение системы (14), (15). Для каждого множества Q^k, $k \in J_q$ положим $\lambda = l_k$ и запишем

$$\sum_{i=1}^{\lambda} r_{m_i} = \sum_{i=1}^{\lambda} r_{m_i}^0,$$

$$\sum_{i \in W} r_i \geqslant \sum_{i=1}^{|W|} r_{m_i}^0, \quad \forall W \subseteq M^k,$$

$$\sum_{i=1}^{\lambda} (r_{m_i} - \nu)^2 = \sum_{i=1}^{\lambda} (r_{m_i}^0 - \nu)^2,$$

где

$$\nu = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{\lambda} r_{m_i}^0.$$

Заметим, что использование радиусов кругов как независимых переменных в рамках иного концептуального подхода к решению некоторых классов задач упаковки рассматривалось в работах [10—12] и подтвердили перспективность указанного направления.

Основным достоинством метода искусственного расширения пространства является тот факт, что его реализация дает возможность улучшать локальные решения задач путем введения метрических параметров размещаемых объектов как искусственных переменных.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Che C., Wang Y., Teng H. Test problems for quasi-satellite packing: cylinders packing with behavior constraints and all the optimal solutions known. Optimization Online, 2008.
2. Fasano G, Pinte'r J.D. (Eds.). Modeling and Optimization in Space Engineering. Series: Springer Optimization and Its Applications, 2013. Vol.73. 404 p.
3. Hifi M., M'Hallah R.A literature Review on Circle and Sphere Packing Problems:Model and Methodologies. *Advances in Optimization Research*. 2009. doi: https://doi.org/10.1155/2009/150624
4. Bortfeldt A., Wäscher G. Constraints in container loading: a state-of-the-art review. *European J. Operational Research*. 2013. **229**. Iss.1. P. 1—20
5. Stetsyuk P.I., Romanova T.E., Scheithauer G. On the global minimum in a balanced circular packing problem. *Optimization Letters*. 2015. **10**, Iss. 6. P. 1347—1360.
6. Stoyan Yu.G., Scheithauer G., Romanova, T. Φ-functions for primary 2D-objects. *Studia Informatica Universalis. Int. J. Informatics*. 2002. **2**. P. 1—32.

7. Chernov N., Stoyan Y., Romanova T. Mathematical model and efficient algorithms for object packing problem. *Computational Geometry: Theory and Applications*. 2010. **43**, Iss. 5. P. 535—553.
8. Пичугина О.С., Яковлев С.В. О непрерывных представлениях и функциональных продолжениях в задачах комбинаторной оптимизации. *Кибернетика и системный анализ*. 2016. № 6. С. 102—113.
9. Пичугина О.С., Яковлев С.В. Функционально-аналитические представления общего перестановочного множества. *Eastern-European J. Enterprise Technologie*. 2016. № 1. С. 101—126. http://journals.uran.ua/eejet/article/view/58550
10. Stoyan Yu., Yaskov G. Packing unequal circles into a strip of minimal length with a jump algorithm. *Optimization Letters*. 2014. **8**, Iss. 3. P. 949—970. doi: https://doi.org/10.1007/s11590-013-0646-1
11. Yaskov G.N. Packing non-equal hyperspheres into a hypersphere of minimal radius. *Пробл. машиностроения*. 2014. **17**, № 2. P. 48—53.
12. Stoyan Yu.G., Scheithauer G., Yaskov. G.N. Packing Unequal Spheres into Various Containers. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2016. **52**, № 3.·P. 419—426. doi: https://doi.org/10.1007/s10559-016-9842-1

Поступило в редакцию 29.03.2017

REFERENCES

1. Che, C., Wang, Y. & Teng, H. (2008). Test problems for quasi-satellite packing: cylinders packing with behavior constraints and all the optimal solutions known. Optimization Online.
2. Fasano, G. & Pinte'r, J. D. (Eds.): (2013). Modeling and Optimization in Space Engineering. Series: Springer Optimization and Its Applications. Vol. 73, p.404.
3. Hifi, M. & M'Hallah, R. (2009). A literature Review on Circle and Sphere Packing Problems:Model and Methodologies. Advances in Optimization Research. doi: https://doi.org/10.1155/2009/150624
4. Bortfeldt, A. & Wäscher, G. (2013). Constraints in container loading: a state-of-the-art review. European J. Operational Research., Vol. 229, Iss.1, pp. 1-20.
5. Stetsyuk, P. I., Romanova, T. E. & Scheithauer, G. (2015). On the global minimum in a balanced circular packing problem. Optimization Letters. 10, Iss. 6, pp. 1347-1360.
6. Stoyan, Yu. G., Scheithauer, G., Romanova, T. (2002). Ф-functions for primary 2D-objects. Studia Informatica Universalis. Int. J. Informayics. 2, pp.1-32.
7. Chernov, N., Stoyan, Y. & Romanova, T. (2010). Mathematical model and efficient algorithms for object packing problem. Computational Geometry: Theory and Applications. Iss. 5, pp. 535-553.
8. Pichugina, O. S. & Yakovlev, S. V. (2016). On continuous representations and functional extensions in problems of combinatorial optimization. Cybernetics and systems analysis. No. 6, pp. 102-113.
9. Pichugina, O. S. & Yakovlev, S. V. (2016). Functional-analytic representations of a general permutation set. Eastern-European J. Enterprise Technologie. No. 1, pp. 101-126. http://journals.uran.ua/eejet/article/view/58550
10. Stoyan, Yu. & Yaskov, G. (2014). Packing unequal circles into a strip of minimal length with a jump algorithm. Optimization Letters, 8, Iss. 3, p. 949-970. doi: https://doi.org/10.1007/s11590-013-0646-1
11. Yaskov, G. N. (2014). Packing non-equal hyperspheres into a hypersphere of minimal radius. Probl. Mechanical engineering, 17, No. 2, pp. 48-53.
12. Stoyan, Yu. G., Scheithauer, G. & Yaskov, G. N. (2016). Packing Unequal Spheres into &Various Containers. Cybernetics and Systems Analysis, 52, No. 3,·pp 419-426. doi: https://doi.org/10.1007/s10559-016-9842-1

Received 29.03.2017

С.В. Яковлев

Національний аерокосмічний університет
ім. М.Є.Жуковського "Харківський авіаційний університет"
E-mail: svsyak7@gmail.com

ПРО КОМБІНАТОРНУ СТРУКТУРУ ЗАДАЧ
ОПТИМАЛЬНОГО РОЗМІЩЕННЯ ГЕОМЕТРИЧНИХ ОБ'ЄКТІВ

Розглядається задача оптимального пакування геометричних об'єктів заданої форми та фіксованих фізико-метричних параметрів. Виділена комбінаторна структура задачі шляхом формування множини кортежів фізико-метричних параметрів. На підставі функціонального представлення множини перестановок кортежів формулюється еквівалентна постановка зі змінними фізико-метричними параметрами. Запропонований підхід ілюструється при розв'язанні задачі пакування кіл заданих радіусів у колі мінімального радіуса.

Ключові слова: *пакування, оптимізація, комбінаторна множина, кортеж.*

S.V. Yakovlev

National Aerospace University "Zhukovskiy Kharkiv Aviation Institute"
E-mail: svsyak7@gmail.com

ON A COMBINATORIAL STRUCTURE
OF THE PROBLEMS OF OPTIMAL PACKING OF GEOMETRIC OBJECTS

The problem of optimal layout of geometric objects with given shape and physico-metric parameters is considered. Combinatorial structure is allocated by forming the multiple tuples of physico-metric parameters. On the basis of a functional presentation of the permutations of tuples, an equivalent setting, in which physico-metric parameters are variables, is formulated. The proposed approach is illustrated by the problem of packing of unequal circles into a circle with minimal radius.

Keywords: *packing problem, optimization, combinatorial set, tuple*.