ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

doi: https://doi.org/10.15407/dopovidi2017.08.020
УДК 519.85

С.В. Яковлев

Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского
"Харьковский авиационный институт"
E-mail: svsyak7@gmail.com

Теория выпуклых продолжений в задачах комбинаторной оптимизации

Представлено академиком НАН Украины И.В. Сергиенко

Для задач евклидовой комбинаторной оптимизации выделены классы вершинно расположенных и полиэдрально-сферических множеств, для которых обобщены результаты теории выпуклых продолжений. На основе теорем о существовании дифференцируемых выпуклых продолжений для вершинно расположенных множеств сформулирована эквивалентная задача дискретной оптимизации выпуклой функции при выпуклых функциональных ограничениях. Описаны свойства релаксационных задач как задач выпуклого программирования.

Ключевые слова: *комбинаторная оптимизация, выпуклое продолжение, вершинно расположенное множество, комбинаторный многогранник.*

Задачи комбинаторной оптимизации вызывают постоянный интерес исследователей [1—3]. К указанному классу относятся задачи евклидовой комбинаторной оптимизации [4], получившие такое название, поскольку в них комбинаторные объекты отображаются в арифметическое евклидово пространство. Широкий класс комбинаторных множеств при отображении в R^n обладает тем свойством, что они вершинно расположены, т.е. это вершины некоторого комбинаторного многогранника, являющегося их выпуклой оболочкой. В работе [5] были заложены основы теории выпуклых продолжений для функций, заданных на вершинах выпуклых многогранников. Дальнейшие исследования в этом направлении позволили, с одной стороны, обобщить полученные результаты, а в другой стороны, — конкретизировать и усилить их для специальных классов комбинаторных множеств и функций, заданных на этих множествах.

Рассмотрим постановку задачи комбинаторной оптимизации в соответствии с [6]. Пусть P — локально конечное пространство, элементами которого являются комбинаторные объекты [3, 7], и на нем задан функционал $\xi : \mathrm{P} \to R^1$. Требуется найти

$$\pi^* = \arg \min_{\pi \in \Pi \subseteq \mathrm{P}} \xi(\pi), \qquad (1)$$

где $\Pi \subseteq \mathrm{P}$ — множество допустимых решений.

Осуществим биекцию $\varphi : \mathrm{P} \to E$ на некоторое конечное множество $E \subset R^n$. Тогда $x = \varphi(\pi)$, $\pi = \varphi^{-1}(x)$. Класс комбинаторных множеств, для которых существует такое отображение, называются евклидовыми комбинаторными множествами [4]. Пусть функция $f : E \to R^1$ такова, что $f(x) = \xi(\varphi^{-1}(x))$ для всех $x \in E$. Тогда задача (1) может быть эквивалентно сформулирована как задача евклидовой комбинаторной оптимизации в виде

$$x^* = \arg \min_{x \in G \subseteq E} f(x), \tag{2}$$

где $G = \varphi(\Pi)$ — образ множества П.

В соответствии с классификацией задач комбинаторной оптимизации [3, 6], задача (2) относится к классу задач дискретной оптимизации. При этом евклидовы комбинаторные множества обладают рядом специфических свойств, приведенных, например, в монографиях [4, 8, 9].

Пусть $E \subset R^n$ — конечное множество. Введем обозначение $J_m = \{1, ..., m\}$. Рассмотрим задачу дискретной оптимизации в общей постановке

$$f(x) \to \min, \ x \in \mathrm{X}, \tag{3}$$

где множество X задается следующим образом:

$$x \in E, \tag{4}$$

$$g_i(x) \leqslant 0, \quad i \in J_k, \tag{5}$$

$$g_i(x) = 0, \quad i \in J_m \setminus J_k. \tag{6}$$

Здесь функции $f(x), g_i(x), i \in J_m$ определены на E. Ограничения (4) назовем прямыми, а (5) и (6) — функциональными.

Выделим класс множеств $E \subset R^n$, совпадающих с вершинами своей выпуклой оболочки, т. е. удовлетворяющих условию

$$E = \mathrm{vert\,conv}\, E.$$

Такие множества названы вершинно расположенными [5].

Если существуют такое $\tau \in R^n$ и число $r > 0$, что для любых $x \in S \subset R^n$ выполняется условие

$$\left\| x - \tau \right\|^2 = r^2, \tag{7}$$

то множество S назовем сферически расположенным. Ясно, что конечное сферически расположенное множество E является вершинно расположенным и совпадает с множеством вершин многогранника $\Pi = \mathrm{conv}\, E$.

Представление множества E в виде пересечения своей выпуклой оболочки и некоторой гиперсферы S вида (7) позволяет выделить их в единый класс полиэдрально-сферических множеств. Таким образом, в задаче (3)—(6) множество E аналитически можно описать системой линейных неравенств, задающих комбинаторный многогранник Π, и равенством (7). Конкретный вид линейных ограничений для описания различных классов комбинаторных многогранников описан в [4, 10—12]. При этом прямые ограничения (4) могут быть преобразованы путем включения уравнения гиперсферы S в функциональные ограничения задачи.

Укажем некоторые примеры полиэдрально-сферических множеств. Пусть $A=\{a_1,...,a_n\}$ — множество n действительных чисел, а $\pi=(\pi_1,...,\pi_n)$ — произвольная перестановка из первых n натуральных чисел. Каждой перестановке $\pi=(\pi_1,...,\pi_n)$ поставим в соответствие точку $x=(x_1,...,x_n)=(a_{\pi_1},...,a_{\pi_n})\in R^n$. Совокупность таких точек порождает евклидово множество перестановок $E_n(A)\subset R^n$. Множество $\widetilde{A}$ будет мультимножеством, если оно содержит одинаковые элементы. Мультимножество $\widetilde{A}$ порождает евклидово множество перестановок с повторениями $E_n(\widetilde{A})\subset R^n$. Множества $E_n(A)$ и $E_n(\widetilde{A})$ являются вершинно и сферически расположенными, а следовательно, полиэдрально-сферическими.

Рассмотрим следующие обобщения. Пусть элементами мультимножества $\widetilde{\mathbf{A}}$ являются векторы, т. е. $\widetilde{\mathbf{A}}=\{\mathbf{a}^1,...,\mathbf{a}^n\}$, где $\mathbf{a}^i=(a_1^i,...,a_l^i)\in R^l$, $i\in J_n$. Положим $m=nl$ и каждой перестановке $\pi=(\pi_1,...,\pi_n)$ поставим в соответствие точку

$$x=(x_1,...,x_m)=(a_1^{\pi_1},...,a_l^{\pi_1},...,a_1^{\pi_n},...,a_l^{\pi_n}). \tag{8}$$

Совокупность точек вида (8) задает полиэдрально-сферическое евклидово множество перестановок векторов $E_m(\widetilde{\mathbf{A}})\subset R^m$.

Аналогично можно сформировать евклидово множество перестановок матриц. Пусть элементами мультимножества $\widetilde{\mathbf{A}}=\{A^1,A^2,...,A^n\}$ являются $p\times q$ — матрицы $A^k=[a_{ij}^k]_{p\times q}$, $k\in J_n$. Тогда при $m=npq$ совокупность точек $x=(x_1,...,x_m)=(a_{11}^{\pi_1},...,a_{1q}^{\pi_1},...,a_{p1}^{\pi_1},...,a_{pq}^{\pi_1},...,$ $a_{11}^{\pi_n},...,a_{1q}^{\pi_n},...,a_{p1}^{\pi_n},...,a_{pq}^{\pi_n})$ задает евклидово множество перестановок матриц $E_m(\widetilde{\mathbf{A}})\subset R^m$, которое является полиэдрально-сферическим.

Заметим, что декартовы произведения полиэдрально-сферических множеств, а также их подмножеств, будут полиэдрально-сферическими множествами, что значительно расширяет этот класс.

В работе [5] заложены основы теории выпуклых продолжений для функций, заданных на вершинах выпуклых многогранников. Обобщением этой теории применительно к вершинно расположенным и полиэдрально сферическим множествам являются следующие результаты.

Теорема 1. *Пусть множество* $E\subset R^n$ *конечно и* $E=\operatorname{vert}\operatorname{conv}E$. *Тогда для любой функции* $f:E\to R^1$ *существует дифференцируемая выпуклая функция* $\widetilde{f}:\operatorname{conv}E\to R^1$ *такая, что для любых* $x\in E$

$$\widetilde{f}(x)=f(x). \tag{9}$$

Для функций $\widetilde{f}(x)$, удовлетворяющих на множестве E условию (9), будем использовать обозначение

$$\widetilde{f}(x)\underset{E}{=}f(x). \tag{10}$$

Функцию $\widetilde{f}(x)$, заданную на множестве X и удовлетворяющую условию (10), назовем продолжением функции $f(x)$ на X. Если функция $\widetilde{f}(x)$ выпуклая (сильно выпуклая) на выпуклом множестве $X\supseteq\operatorname{conv}E$, то назовем ее выпуклым (сильно выпуклым) продолжением $f(x)$ на X.

Выделение класса функций $f(x)$ и вершинно расположенных множеств, для которых построены выпуклые продолжения $\tilde{f}(x)$, позволяют конкретизировать, а в некоторых случаях усилить утверждения теоремы 1.

Теорема 2. *Пусть множество* $E \subset R^n$ *конечно и* $E = \mathrm{vert\,conv}\, E$. *Тогда для любой функции* $f: E \to R^1$ *существует сильно выпуклое продолжение* $\tilde{f}: \mathrm{conv}\, E \to R^1$.

Сильно выпуклое с параметром $\rho > 0$ продолжение для полиэдрально-сферического множества E можно представить в виде $\varphi(x) = \tilde{f}(x) + \rho \left\| x - \tau \right\|^2$, где $\tilde{f}(x)$ — произвольное дифференцируемое выпуклое продолжение на $\mathrm{conv}\, E$.

Заметим, что утверждение теоремы 2 сохраняется для любого выпуклого надмножества $X \supseteq \mathrm{conv}\, E$, если функция $\tilde{f}(x)$ выпукла на X.

Теорема 3. *Пусть на сферически расположенном множестве* E *задана квадратичная функция* $f(x) = (Cx, x) + (b, x)$, где $C = [c_{ij}]_{n \times n}$ — *произвольная симметричная* $n \times n$*-матрица, а* b — n*-мерный вектор. Тогда существует выпуклое продолжение* $\tilde{f}(x) = (\tilde{C}x, x) + (\tilde{b}, x)$ *функции* $f(x)$ *на пространство* R^n, *где* $\tilde{C} = [\tilde{c}_{ij}]_{n \times n}$ — *симметричная неотрицательно определенная матрица,* $\tilde{b}$ — n*-мерный вектор.*

Для класса дважды непрерывно дифференцируемых функций $f \in \mathbf{C}^2(R^n)$ можно утверждать следующее.

Теорема 4. *Пусть* $X \subset R^n$ — *выпуклое компактное множество и* S — *сферически расположенное множество, такое что* $S \subseteq X$. *Тогда для любой функции* $f \in \mathbf{C}^2(R^n)$ *существует выпуклая функция* $\tilde{f}: X \to R^1$, *такая что*

$$\tilde{f}(x) \underset{S}{=} f(x).$$

Приложения указанной теоремы для некоторых классов функций $f \in \mathbf{C}^2(R^n)$ рассмотрены в [14].

Осуществим следующие эквивалентные преобразования задачи (3)—(6). Представим ограничения-равенства (6) в виде

$$\begin{aligned} &g_i(x) \leqslant 0, \\ &-g_i(x) \leqslant 0, \quad i \in J_m \setminus J_k. \end{aligned} \tag{11}$$

Для функции $f(x)$ и функций, стоящих в левых частях ограничений-неравенств (6) и (11), построим выпуклые продолжения на выпуклое множество $X \supseteq \mathrm{conv}\, E$

$$\tilde{f}(x) \underset{E}{=} f(x), \tag{12}$$

$$\tilde{g}_i(x) \underset{E}{=} g_i(x), \quad i \in J_m, \tag{13}$$

$$\tilde{g}_i(x) \underset{E}{=} -g_{i-l}(x), \quad i \in J_r \setminus J_m, \tag{14}$$

где $r = 2m - k$.

Тогда с учетом приведенных выше утверждений о существовании выпуклых продолжений для функций $\tilde{f}(x), \tilde{g}_i(x), i \in J_m$ можно сформулировать следующую теорему об эквивалентной постановке задач дискретной оптимизации на вершинно расположенных множествах.

Теорема 5. *Пусть множество* $E \subset R^n$ *конечно и* $E = \mathrm{vert\,conv}\, E$. *Тогда*

$$\arg\min_{x \in G} f(x) = \arg\min_{x \in \tilde{G}} \tilde{f}(x), \tag{15}$$

где $G = \{x \in E : g_i(x) \leqslant 0, \quad i \in J_k, \quad g_i(x) = 0, \quad i \in J_m \setminus J_k\}$,

$\widetilde{G} = \{x \in E : \widetilde{g}_i(x) \leqslant 0, \quad i \in J_r\}$.

С теоретической точки зрения теорема 5 позволяет использовать аппарат теории выпуклого программирования для решения релаксационных задач. С другой стороны, описанные результаты значительно расширяют возможности получения нижних оценок для функции $f(x)$ в задаче (3)—(6).

Рассмотрим задачу

$$\widetilde{f}(x) \to \min, \quad x \in \overline{G}, \tag{16}$$

где

$$\overline{G} = \{x \in \Pi : \widetilde{g}_i(x) \leqslant 0, \quad i \in J_r\},\ \Pi = \operatorname{conv} E. \tag{17}$$

Задача (16)—(17) является задачей выпуклого программирования, в которой функции $\tilde{f}(x), \tilde{g}_i(x), \quad i \in J_r$ можно полагать дифференцируемыми, что значительно расширяет возможности применения классических методов глобальной оптимизации. Комбинаторный многогранник $\Pi = \operatorname{conv} E$ в общем случае описывается неполиномиальным числом неравенств. Вместе с тем свойства евклидовых комбинаторных множеств позволяют предложить эффективные методы решения задачи (16)—(17), основанные на особенностях минимизации линейных функций на Π [15]. Для широкого класса комбинаторных многогранников нахождение минимумов линейной формы сводится к упорядочиванию ее коэффициентов. Это позволяет предложить следующие оценки минимума в исходной задаче.

Теорема 6. *Пусть в задаче* (3)—(6) $E = \operatorname{vert}\operatorname{conv} E$ и $\tilde{f}(x)$, $\tilde{g}_i(x)$ — *соответственно дифференцируемые выпуклые продолжения функций* $f(x)$, $g_i(x)$, $i \in J_r$ *на множество* $\Pi = \operatorname{conv} E$. *Тогда для любого* $x^0 \in \Pi$ *имеет место оценка*

$$\min_{x \in X} f(x) \geqslant \tilde{f}(x^0) - (\operatorname{grad} \tilde{f}(x^0), x^0) + \min_{x \in \overline{G}} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \tilde{f}(x^0)}{\partial x_i} x_i, \tag{18}$$

где множество $\overline{G}$ *имеет вид* (17).

Решение задачи минимизации линейной функции в правой части неравенства (18) имеет свои особенности для каждого класса евклидовых комбинаторных множеств [8, 9, 15].

В заключение отметим, что практические приложения теории выпуклых продолжений для задач дискретной оптимизации в постановке (3)—(6) определяются формализацией функциональных ограничений (5), (6) с последующим построением выпуклых продолжений $\tilde{f}(x), \tilde{g}_i(x)$ для различных классов исходных функций $f(x), g_i(x)$ и классов вершинно расположенных множеств E. Конструктивные подходы для построения выпуклых продолжений предложены, например, в [5, 8, 9, 11—14].

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Сергиенко И.В., Шило В.П. Задачи дискретной оптимизации: проблемы, методы решения, исследования. Киев: Наук. думка, 2003. 261 с.
2. Korte B., Vygen J. Combinatorial Optimization: Theory and Algorithms. Heidelberg etc.: Springer, 2002. 660 p.
3. Гуляницький Л. Ф., Мулеса О. Ю. Прикладні методи комбінаторної оптимізації : навчальний посібник. Киев: Вид.-поліграф. центр "Київський університет", 2016. 142 с.

4. Стоян Ю.Г., Яковлев С.В. Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования. Киев: Наук. думка, 1986. 268 с.
5. Яковлев С. В. Теория выпуклых продолжений функций на вершинах выпуклых многогранников. *Журн. вычисл. матем. и матем. физ.* 1994. **34** (7). С. 1112—1119.
6. Сергиенко И.В., Гуляницкий Л.Ф., Сиренко С.И. Классификация прикладных методов комбинаторной оптимизации. *Кибернетика и системный анализ.* 2009. № 5. С. 71—83.
7. Гуляницкий Л.Ф., Сергиенко И.В. Метаэвристический метод деформированного многогранника в комбинаторной оптимизации. *Кибернетика и системный анализ.* 2007. № 6. С. 70—79.
8. Яковлев С.В., Гиль Н.И., Комяк В.М. и др. Элементы теории геометрического проектирования. Киев: Наук. думка, 1995. 206 с.
9. Грицик В.В., Кісельова О.М., Яковлев С.В. та ін. Математичні методи оптимізації та інтелектуальні комп'ютерні технології моделювання складних процесів і систем з урахуванням просторових форм об'єктів. Донецьк: Наука і освіта, 2012. 480 с.
10. Емеличев В.А., Ковалев М.М., Кравцов М.К. Многогранники, графы, оптимизация (комбинаторная теория многогранников). Москва: Наука, 1981. 344 с.
11. Пичугина О.С., Яковлев С.В. О непрерывных представлениях и функциональных продолжениях в задачах комбинаторной оптимизации. *Кибернетика и системный анализ.* 2016. **52**, № 6. С. 102—113. http://link.springer.com/article/10.1007/s10559-016-9894-2
12. Pichugina O., Yakovlev S. Convex extensions and continuous functional representations in optimization with their applications. *J. Coupled Syst. Multiscale Dyn.* 2016. **4** (2). P. 129—152. http://www.ingentaconnect.com/contentone/asp/jcsmd/2016/00000004/00000002/ art00005
13. Стоян. Ю.Г., Яковлев С.В. Построение выпуклых и вогнутых функций на перестановочном многограннике. *Докл. АН УССР. Сер. А.* 1988. № 5. С. 66—68.
14. Стоян Ю.Г., Яковлев С.В., Емец О.А., Валуйская О.А. Построение выпуклых продолжений для функций, заданных на гиперсфере. *Кибернетика и системный анализ.* 1995. № 2. С.27—36.
15. Яковлев С.В. Оценки минимума выпуклых функций на евклидовых комбинаторных множествах. *Кибернетика.* 1989. № 3. С. 89—97.

Поступило в редакцию 11.04.2017

REFERENCES

1. Sergienko, I. V. & Shilo, V. P. (2003). Discrete optimization problem. Kiev: Naukova Dumka (in Russian).
2. Korte, B. & Vygen, J. (2002). Combinatorial Optimization: Theory and Algorithms. Heidelberg etc.: Springer.
3. Hulianytskyi, L. F. & Mulesa, O. Y. (2016). Applied methods of combinatorial optimization. Kiev: Kyiv University Press (in Ukrainian).
4. Stoyan, Y. G. & Yakovlev, S. V. (1986). Mathematical models and optimization methods of geometric design. Kiev: Naukova Dumka (in Russian).
5. Yakovlev, S. V. (1994). Theory of convex extensions of functions on the vertices of a convex polyhedron. J. Comp. Math. and Math. Phys. 34 (7), pp. 1112-1119 (in Russian).
6. Sergienko, I. V., Hulianytskyi, L. F. & Sirenko, S. I. (2009). Classification of applied methods of combinatorial optimization. Cybernetics and system analysis, No. 5, pp. 71-83 (in Russian).
7. Hulianytskyi, L. F. & Sergienko, I. V. (2007). Metaheuristic method of deformed polyhedron in combinatorial optimization. Cybernetics and system analysis, No. 6, pp. 70-79 (in Russian).
8. Yakovlev, S. V., Gil, N. &. Komyak, V. M., et. al. (1995). Elements of the theory of geometric design. Kiev: Naukova Dumka (in Russian).
9. Grichik, V. V., Kiselyova, O. M. & Yakovlev, S. V., et. al. (2012). Mathematical methods of optimization and intelligent computer technologies for modeling complex systems with consideration of spatial shapes of objects. Donetsk: Nauka and Osvita (in Ukrainian).
10. Emelichev, V. A., Kovalev, M. M. & Kravtsov, M. K. (1981). Polytopes, graphs, optimization (combinatorial theory of polytopes). Moscow: Nauka (in Russian).
11. Pichugina, O. S. & Yakovlev, S. V. (2016). On continuous representations and functional continuations in combinatorial optimization. Cybernetics and system analysis. 52, No. 6, pp. 102-113 (in Russian). http://link.springer.com/article/10.1007/s10559-016-9894-2

12. Pichugina, O. & Yakovlev, S. (2016). Convex extensions and continuous functional representations in optimization with their applications. J. Coupled Syst. Multiscale Dyn., 4 (2), pp. 129-152 (in Russian). http://link.springer.com/article/10.1007/s10559-016-9894-2
http://www.ingentaconnect.com/contentone/asp/jcsmd/2016/00000004/00000002/ art00005.
13. Stoyan, Yu. G. & Yakovlev, S. V. (1988). Construction of convex and concave functions on the permutation polyhedron. Doklady Academy of Science USSR, Ser. A. No. 5, pp. 66-68 (in Russian).
14. Stoyan, Yu. G., Yakovlev, S. V., Yemets, O. A. & Valuyskaya, O. A. (1995). Construction of convex continuations for functions defined on hypersphere. Cybernetics and system analysis. No. 2, pp. 27-36 (in Russian).
15. Yakovlev, S. V. (1989). Estimates of the minimum of convex functions on Euclidean combinatorial sets. Cybernetics. No. 3, pp. 89-97 (in Russian).

Received 11.04.2017

С.В. Яковлев

Національний аерокосмічний університет ім. М.Є.Жуковського
“Харківський авіаційний університет”
E-mail: svsyak7@gmail.com

ТЕОРІЯ ОПУКЛИХ ПРОДОВЖЕНЬ
В ЗАДАЧАХ КОМБІНАТОРНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ

Для задач евклідової комбінаторної оптимізації виділені класи вершинно розташованих і поліедрально-сферичних множин, для яких узагальнено результати теорії опуклих продовжень. З використанням теорем про існування диференційованих опуклих продовжень для вершинно розташованих множин сформульовано еквівалентну задачу дискретної оптимізації опуклої функції при опуклих функціональних обмеженнях. Описано властивості релаксаційних задач опуклого програмування, що виникають.

Ключові слова: *комбінаторна оптимізація, опукле продовження, вершинно розташована множина, комбінаторний багатогранник.*

S.V. Yakovlev

National Aerospace University “Zhukovskii Kharkiv Aviation Institute”
E-mail: svsyak7@gmail.com

THE THEORY OF CONVEX EXTENSIONS
IN COMBINATORIAL OPTIMIZATION PROBLEMS

The results of the theory of convex extensions for vertex located and polyhedral-spherical sets are summarized. In view of the theorems of existence of convex differentiable extensions, the problem is equivalent to a discrete optimization problem of convex functions under convex functional constraints. The convex nonlinear relaxation problem is considered.

Keywords: *combinatorial optimization, convex extension, vertex located set, combinatorial polyhedron.*