
doi: <https://doi.org/10.15407/dopovidi2017.08.011>

УДК 517.36

А.А. Мартынюк, академик НАН Украины

Институт механики им. С.П.Тимошенко НАН Украины, Киев

E-mail: center@inmech.kiev.ua

Условия Hyers—Ulam—Rassias-устойчивости семейств уравнений

Для семейства регуляризованных уравнений и семейства уравнений с причинным оператором получены достаточные условия Hyers—Ulam—Rassias-устойчивости.

Ключові слова: Hyers—Ulam—Rassias-устойчивость, семейство регуляризованных уравнений, семейство причинных уравнений.

Понятие Hyers—Ulam—Rassias-устойчивости (H.U.R.-устойчивости) основано на работах [1—3]. В отличие от устойчивости в смысле Ляпунова, H.U.R.-устойчивость уравнения и/или отображения не связана с ограничениями на начальные условия решений (движения).

В данной работе приведены условия H.U.R.-устойчивости для семейств регуляризованных уравнений и семейств уравнений с причинным оператором. Все используемые обозначения соответствуют принятым в монографиях [4, 5].

1. Семейство регуляризованных уравнений. Рассматривается семейство регуляризованных уравнений

$$D_H U(t) = F_\beta(t, U(t)), \quad U(t_0) = U_0 \in K_c(R^n), \quad (1)$$

где

$$U \in K_c(R^n), \quad F_\beta \in C(R_+ \times K_c(R^n), K_c(R^n)) \text{ и } \beta \in [0, 1].$$

Для семейства уравнений (1) сформулируем определение H.U.R.-устойчивости в следующем виде.

Определение 1. Семейство уравнений (1) является H.U.R.-устойчивым относительно множества функций $\Phi(t) \in K_c(R^n)$, если существует постоянная $C_\Phi > 0$ такая, что для каждого $Y(t) \in K_c(R^n)$, для которого

$$D_H Y - F_\beta(t, Y) \subseteq \Phi(t) \text{ при всех } t \in R_+ \text{ и } \beta \in [0, 1], \quad (2)$$

найдется решение $U(t) \in K_c(R^n)$ семейства уравнений (1) такое, что

$$D[Y(t), U(t)] \leq C_\Phi D[\Phi(t), \theta] \text{ при всех } t \in R_+, \quad (3)$$

где $\theta \in K_c(R^n)$ — нулевой элемент множества $K_c(R^n)$.

Замечание 1. Определение 1 может быть реконструировано, если вместо условия (2) рассматривать условие

$$D[G_Y(t), \theta] \leq D[\Phi(t), \theta] \text{ при всех } t \in R_+,$$

где $G_Y(t) = D_H Y - F_\beta(t, Y)$.

Очевидно, что множество функций $Y(t) \in K_c(R^n)$ является решением включения (2), если семейство функций $G_Y(t) \in K_c(R^n)$ такое, что

$$D[G_Y(t), \theta] \leq C_\Phi D[\Phi(t), \theta] \text{ при всех } t \in R_+$$

и

$$D_H Y = F_\beta(t, Y) + G_Y(t) \text{ при всех } t \in R_+ \text{ и } \beta \in [0, 1].$$

Замечание 2. Если множество функций $Y(t) \in K_c(R^n)$ является решением включения (2), то оно является также и решением неравенства

$$D[Y(t) - Y_0 - \int_0^t F_\beta(s, Y(s)) ds, \theta] \leq C_\Phi \int_0^t D[\Phi(s), \theta] ds \quad (4)$$

при всех $t \in R_+$ и $\beta \in [0, 1]$.

Далее установлены условия Н.У.Р.-устойчивости семейства уравнений (1).

Теорема 1. *Предположим, что:*

1) *при любом $\beta \in [0, 1]$ отображении $F_\beta \in C(R_+ \times K_c(R^n), K_c(R^n))$;*

2) *при заданном множестве функций $\Phi(t) \in K_c(R^n)$ для каждого $Y(t) \in K_c(R^n)$ выполняется включение*

$$D_H Y - F_\beta(t, Y) \subseteq \Phi(t) \text{ при всех } t \in R_+;$$

3) *существует функция $\lambda(t) \in L^1(R_+, R_+)$ такая, что*

$$D[F_\beta(t, U), F_\beta(t, Y)] \leq \lambda(t) D[U(t), Y(t)] \text{ при всех } (t, U, Y) \in R_+ \times K_c(R^n) \times K_c(R^n);$$

4) *существует постоянная $\gamma > 0$ такая, что*

$$\int_0^t D[\Phi(s), \theta] ds \leq \gamma D[\Phi(t), \theta] \text{ при всех } t \in R_+.$$

Тогда семейство уравнений (1) Н.У.Р.-устойчиво относительно множества функций $\Phi(t) \in K_c(R^n)$.

Доказательство. Пусть $U(t) = U(t, t_0, U_0)$ — любое решение семейства уравнений (1) с начальными условиями $U_0 = Y_0 \in K_c(R^n)$. Для семейства уравнений (1) имеем

$$U(t) = Y_0 + \int_0^t F_\beta(s, U(s)) ds \quad (5)$$

и при условии 2 теоремы 1

$$Y(t) - Y_0 - \int_0^t F_\beta(s, Y(s)) ds \subseteq \int_0^t \Phi(s) ds, t \in R_+. \quad (6)$$

Из (5) и (6), учитывая условия 3, 4 теоремы 1, имеем

$$\begin{aligned} D[Y(t), U(t)] &\leq D \left[Y_0 + \int_0^t F_\beta(s, U(s)) ds, Y_0 + \int_0^t F_\beta(s, Y(s)) ds + \int_0^t \Phi(s) ds \right] \leq \\ &\leq D \left[\int_0^t F_\beta(s, U(s)) ds, \int_0^t F_\beta(s, Y(s)) ds + \int_0^t \Phi(s) ds \right] \leq \\ &\leq \int_0^t D[F_\beta(s, U(s)), F_\beta(s, Y(s))] ds + \int_0^t D[\Phi(s), \theta] ds \leq \int_0^t \lambda(s) D[Y(s), U(s)] ds + \gamma D[\Phi(t), \theta] \end{aligned} \quad (7)$$

при всех $t \in R_+$. Собирая первое и последнее выражения в оценках (7), получаем

$$D[Y(t), U(t)] \leq \gamma D[\Phi(t), \theta] + \int_0^t \lambda(s) D[Y(s), U(s)] ds.$$

Отсюда находим

$$\begin{aligned} D[Y(t), U(t)] &\leq \gamma D[\Phi(t), \theta] + \int_0^t \gamma D[\Phi(s), \theta] \lambda(s) \exp \left(\int_s^t \lambda(u) du \right) ds \leq \\ &\leq \gamma D[\Phi(t), \theta] \left\{ 1 - \int_0^t \exp \left(\int_s^t \lambda(u) du \right) ds \right\} = \gamma D[\Phi(t), \theta] \left\{ 1 - \left[\exp \left(\int_s^t \lambda(u) du \right) \right]_0^t \right\} = \\ &= \gamma \exp \left(\int_0^t \lambda(u) du \right) D[\Phi(t), \theta] \leq \gamma \exp \left(\int_0^\infty \lambda(u) du \right) D[\Phi(t), \theta] = C_\Phi D[\Phi(t), \theta], \end{aligned} \quad (8)$$

где $C_\Phi = \gamma \exp \left(\int_0^\infty \lambda(u) du \right)$.

Следовательно, из (8) находим, что

$$D[Y(t), U(t)] \leq C_\Phi D[\Phi(t), \theta] \quad \text{при всех } t \in R_+.$$

Этим теорема 1 доказана.

Замечание 3. Если в условии 2 теоремы 1 множество $Y(t) \in K_c(R^n)$ является приближенным решением семейства уравнений (1), то (3) представляет собой оценку уклонений приближенного решения от неизвестного точного решения $U(t) \in K_c(R^n)$ семейства уравнений (1).

2. Семейство причинных уравнений. Рассматривается семейство причинных уравнений в форме

$$D_H U(t) = F(t, U(t), (QU)(t)), \quad U(t_0) = U_0 \in K_c(R^n), \quad (9)$$

где $U \in K_c(R^n)$; $F \in C(R_+ \times K_c(R^n) \times E, K_c(R^n))$; $E = C(R_+, K_c(R^n))$ с нормой $D_0[U, \theta] = \sup_{t \in R_+} D \times [U(t), \theta]$.

Приведем определение Н.У.Р.-устойчивости семейства уравнений (9).

Определение 2. Семейство причинных уравнений (9) является Н.У.Р.-устойчивым относительно множества функций $\Phi^*(t) \in K_c(R^n)$, если существует постоянная $C_{\Phi^*} > 0$ такая, что для каждого $Y(t) \in K_c(R^n)$, для которого

$$D_H Y(t) - F(t, Y(t), (QY)(t)) \subseteq \Phi^*(t), \quad t \in R_+,$$

найдется решение $U(t) \in K_c(R^n)$ семейства уравнений (9) такое, что

$$D[Y(t), U(t)] \leq C_{\Phi^*} D[\Phi^*(t), \theta] \text{ при всех } t \in R_+.$$

Для семейства причинных уравнений (9) имеет место следующее утверждение.

Теорема 2. *Предположим, что:*

1) $F \in C(R_+ \times K_c(R^n) \times E, K_c(R^n))$, где Q является причинным оператором, действующим на пространстве E ;

2) при заданном множестве функций $\Phi^*(t) \in K_c(R^n)$ для каждого $Y(t) \in K_c(R^n)$ выполняется включение

$$D_H Y(t) - F(t, Y(t), (QY)(t)) \subseteq \Phi^*(t) \text{ при всех } t \in R_+;$$

3) существует функция $\mu(t) \in L^1(R_+, R_+)$ и постоянная $\Delta > 0$ такие, что F удовлетворяет обобщенному условию Липшица

$$D[F(t, U, (QU)(t)), F(t, Y, (QY)(t))] \leq \mu(t) D[U(t), Y(t)] + D[(QU)(t), (QY)(t)],$$

где

$$D[(QU)(t), (QY)(t)] \leq \Delta D[U(t), Y(t)]$$

при всех $(t, U, Y) \in R_+ \times K_c(R^n) \times K_c(R^n)$;

4) существует постоянная $\gamma > 0$ такая, что

$$\int_0^t D[\Phi^*(s), \theta] ds \leq \gamma D[\Phi^*(t), \theta] \text{ при всех } t \in R_+.$$

Тогда семейство причинных уравнений (9) Н.У.Р.-устойчиво относительно множества функций $\Phi^*(t) \in K_c(R^n)$.

Доказательство. Пусть $Y(t) \in K_c(R^n)$ является решением включения из условия 2 теоремы 2. Из семейства уравнений (9) при $U_0 = Y_0 \in K_c(R^n)$ имеем

$$U(t) = Y_0 + \int_0^t F(s, U(s), (QU)(s)) ds \quad (10)$$

и

$$Y(t) - Y_0 - \int_0^t F(s, Y(s), (QY)(s)) ds \subseteq \int_0^t \Phi^*(s) ds \quad (11)$$

при всех $t \in R_+$.

Из соотношений (10) и (11) следует, что

$$D[U(t), Y(t)] = D \left[Y_0 + \int_0^t F(s, U(s), (QU)(s)) ds, \right.$$

$$\begin{aligned} & \left[Y_0 + \int_0^t F(s, Y(s), (QY)(s)) ds + \int_0^t \Phi^*(s) ds \right] \leq \\ & \leq D \left[\int_0^t F(s, U(s), (QU)(s)) ds, \int_0^t F(s, Y(s), (QU)(s)) ds \right] + D \left[\int_0^t \Phi^*(s) ds, \theta \right] \leq \\ & \leq \gamma D[\Phi^*(t), \theta] + \int_0^t (\mu(s) + \Delta) D[U(s), Y(s)] ds \text{ при всех } t \geq 0. \end{aligned}$$

Из неравенства

$$D[U(t), Y(t)] \leq \gamma D[\Phi^*(t), \theta] + \int_0^t (\mu(s) + \Delta) D[U(s), Y(s)] ds$$

следует, что

$$\begin{aligned} & D[U(t), Y(t)] \leq \gamma D[\Phi^*(t), \theta] + \int_0^t \gamma D[\Phi^*(s), \theta] \times (\mu(s) + \Delta) \exp \left(\int_s^t (\mu(u) + \Delta) du \right) ds \leq \\ & \leq \gamma D[\Phi^*(t), \theta] \left\{ 1 - \int_0^t \exp \left(\int_s^t (\mu(u) + \Delta) du \right) ds \right\} = \gamma D[\Phi^*(t), \theta] \left\{ 1 - \left[\exp \left(\int_s^t (\mu(u) + \Delta) du \right) \right]_0^t \right\} = \\ & = \gamma D[\Phi^*(t), \theta] \exp \left(\Delta \int_0^t (\mu(u) ds) \right) \leq \gamma \exp \left(\Delta \int_0^\infty \mu(u) du \right) D[\Phi^*(t), \theta] \leq C_{\Phi^*} D[\Phi^*(t), \theta], \end{aligned}$$

где

$$C_{\Phi^*} = \gamma \exp \left(\Delta \int_0^\infty \mu(u) du \right).$$

Таким образом, получаем оценку

$$D[U(t), Y(t)] \leq C_{\Phi^*} D[\Phi^*(t), \theta] \text{ при всех } t \geq 0,$$

которая требуется определением (2). Этим теорема 2 доказана.

Определенный интерес представляет анализ Н.У.Р.-устойчивости систем уравнений, моделирующих реальные процессы в численном анализе, биологии, экономике и других областях, где не рассматриваются ограничения на начальные условия процесса (см. [6], а также [7] и библиогр. там).

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Hyers D.H. On the stability of the linear functional equation. *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.* 1941. **27**. P. 222–224.
2. Rassias Th.M. Functional Equations, Inequalities and Applications. *Proc. Amer. Math. Soc.* 1978. **72**. P. 297–300.
3. Ulam S.M. A Collection of the Mathematical Problems. New York: Interscience. 1960. xiii + 150 p.

4. Lakshmikantham V., Bhaskar T.G., Devi J.V. Theory of Set Differential Equations in Metric Spaces. Cambridge: Cambridge Scientific Publishers, 2006. 204 p.
5. Martynyuk A.A., Martynyuk-Chernienko Yu.A. Uncertain Dynamical Systems: Stability and Motion Control. Boca Raton, London, New York: CRC Press, 2012. 296 p.
6. Rus I.A. Ulam stabilities of ordinary differential equations in a Banach space. *Carpathian J. Math.* 2010. **26**, № 1. P. 103–107.
7. Corduneanu C., Li Y., Mahdavi M. Functional Differential Equations: Advances and Applications, New York: Wiley, 2016. 359 p.

Поступило в редакцію 23.02.2017

REFERENCES

1. Hyers, D. H. (1941). On the stability of the linear functional equation. *Proc. Natl. Acad. Sci. U. S. A.*, 27, pp. 222-224.
2. Rassias, Th. M. (1978). Functional Equations, Inequalities and Applications, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 72, pp. 297-300.
3. Ulam, S. M. (1960). A Collection of the Mathematical Problems. New York: Interscience.
4. Lakshmikantham, V., Bhaskar, T. G. & Devi, J. V. (2006). Theory of Set Differential Equations in Metric Spaces. Cambridge: Cambridge Scientific Publishers.
5. Martynyuk, A. A. & Martynyuk-Chernienko, Yu. A. (2012). Uncertain Dynamical Systems: Stability and Motion Control. Boca Raton, London, New York: CRC Press.
6. Rus, I. A. (2010). Ulam stabilities of ordinary differential equations in a Banach space. *Carpathian J. Math.*, 26, No. 1, pp. 103-107.
7. Corduneanu, C., Li, Y. & Mahdavi, M. (2016). Functional Differential Equations: Advances and Applications. New York: Wiley.

Received 23.02.2017

А.А. Мартинюк

Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, Київ
E-mail: center@inmech.kiev.ua

УМОВИ HYERS—ULAM—RASSIAS-СТІЙКОСТІ СІМЕЙСТВ РІВНЯНЬ

Для сімейства регуляризованих рівнянь і сімейства рівнянь з причинним оператором отримано достатні умови Hyers—Ulam—Rassias-стійкості.

Ключові слова: *Hyers—Ulam—Rassias-стійкість, сімейство регуляризованих рівнянь, сімейство причинних рівнянь.*

А.А. Martynyuk

S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of the NAS of Ukraine, Kiev
E-mail: center@inmech.kiev.ua

THE CONDITIONS OF HYERS—ULAM—RASSIAS-STABILITY OF A SET OF EQUATIONS

For a set of regularized equations and a set of equations with causal operators, the sufficient conditions of Hyers—Ulam—Rassias-stability are obtained.

Keywords: *Hyers—Ulam—Rassias-stability, set of regularized equations, set of equations with causal operators.*