

**М.Ф. Селіванов, Ю.О. Черноіван**

Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України, Київ  
E-mail: mfs@ukr.net, yurchor@ukr.net

## **Порівняння алгоритмів визначення переміщень берегів тріщини зчеплення**

*Представлено академіком НАН України В. Д. Кубенком*

*Наведено два алгоритми визначення розкриття тріщини зчеплення, які враховують сингулярність похідної від переміщення берегів тріщини в точках, що відповідають її вершинам. В основу першого алгоритму покладено умову плавності змикання берегів. Другий алгоритм реалізується ітеративним методом, на кожному кроці якого розв'язується лінійна система рівнянь відносно щільностей переміщень в точках колокації, він є ефективнішим при деяких співвідношеннях параметрів задачі за рахунок наближеного визначення довжини зчеплення.*

**Ключові слова:** руйнування, ізотропне тіло, тріщина зчеплення, розкриття тріщини, алгоритм.

В роботі [1] вперше було запропоновано метод розв'язання сингулярних інтегральних рівнянь квадратурно-колокаційним методом. Цим методом сингулярний інтеграл замінюється числовою апроксимацією без застосування регуляризації. Після представлення невідомої функції добутком вагової функції  $\omega(x) = (1-x)^{\alpha-1}(1+x)^{\beta-1}$  і деякої гладкої функції з невідомими параметрами використовуються квадратурні формули Гауса. Якщо  $P_n^{(\alpha, \beta)}$  – поліноми Якобі, ортогональні з зазначеною вагою  $\omega$ , то нулі цих поліномів використовуються в якості квадратурних вузлів в інтегральній формулі Гауса–Якобі, а нулі інших пов'язаних поліномів використовуються в якості точок колокації ( $P_n^{(1/2, 1/2)} = T_n(x)$  – поліноми Чебишева I роду і пов'язаними поліномами  $\in U_{n-1}(x)$  – поліноми Чебишева II роду). В якості невідомої функції форми ефективно можна використовувати не тільки гладкі, а й кусково-лінійні функції [2]. Застосування квадратурно-колокаційного методу для задач механіки тріщин дало можливість отримати ефективні методики визначення коефіцієнтів інтенсивності напружень [3]. Застосування зазначених підходів для тріщини зчеплення ускладнюється вимогою плавності змикання берегів [4]. Ця вимога не дозволяє використовувати поліноми Чебишева I роду так як похідна їх вагової функції має сингулярність на кінцях розрізу. До того ж похідна від переміщень берегів тріщини має бути сингулярною в точках, що належать цьому інтервалу (ці точки відповідають вершинам фізичної тріщини). Тому в роботі представлено два алгоритми, що враховують особливості моделювання в рамках моделі тріщини з зоною зчеплення.

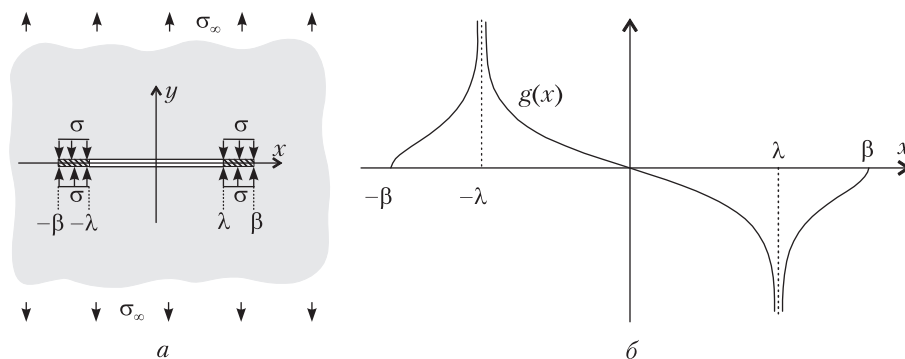


Рис. 1

Розглянемо класичну задачу про тріщину зчеплення в нескінченній пластині, що перебуває під дією розтягувальних на нескінченності напружень, які діють в напрямку нормалі до лінії розташування тріщини (рис. 1, а). Розглядатимемо рівномірний закон зчеплення—відриву:  $\sigma(\Delta) = \sigma = \text{const}$ .

Контурна умова та умова на нескінченності цієї задачі:

$$\sigma_y^\pm = \begin{cases} \sigma, & x \in (-\beta, -\lambda) \cup (\lambda, \beta), \\ 0, & x \in (-\lambda, \lambda), \end{cases} \quad \sigma_y(z) = \sigma_\infty, \quad z \rightarrow \infty, \quad (1)$$

де границі зон зчеплення  $\pm\beta$  визначаються умовою скінченності напружень в тілі. Ця умова еквівалентна умові плавності змикання берегів тріщини.

Вертикальні переміщення берегів тріщини можна отримати у вигляді

$$v(x) = \frac{L\sigma}{2\pi} [(x-\lambda)C(x, \lambda) - (x+\lambda)C(x, -\lambda)],$$

$$C(x, \lambda) = \ln \left| \frac{\check{X}(x) - \check{X}(\lambda)}{\check{X}(x) + \check{X}(\lambda)} \right|, \quad \check{X}(x) = \sqrt{x+\beta}, \quad (2)$$

$$\beta = \lambda \operatorname{csc} \frac{\pi\sigma_\infty}{2\sigma}.$$

Похідна від переміщення по координаті має в точках  $x = \pm\lambda$  логарифмічну особливість (рис. 1, б).

Знайдемо розв'язок цієї класичної задачі нелінійної механіки руйнування за допомогою сингулярного рівняння

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\beta}^{\beta} \frac{g(t)dt}{t-x} = p(x), \quad |x| < \beta. \quad (3)$$

де  $p(x)$  визначається принципом суперпозиції задачі з напруженнями на нескінченності в тілі без тріщини з задачею тільки з контурними напруженнями. Рівняння (3) слід доповнити умовою однозначності переміщень

$$\int_{-\beta}^{\beta} g(t)dt = 0, \quad (4)$$

яка в осесиметричному випадку виконується автоматично.

**Алгоритм 1.** Щоб врахувати особливість функції  $g$ , розглянемо три типи елементів функції форми, яка збігається з  $g$  в квадратурних точках:

- 1) сингулярні елементи, розташовані ліворуч від точок  $x = \pm\lambda$  (їм відповідають номери  $k \in M_1 = \{s, s+r\}$ );
- 2) сингулярні елементи, розташовані праворуч від точок  $x = \pm\lambda$  (їхні номери  $k \in M_2 = \{s+1, s+r+1\}$ );
- 3) звичайні лінійні елементи (їхні номери  $k \in M_3 = \{1, \dots, n\} \setminus M_1 \setminus M_2$ ).

Загальна кількість елементів, таким чином, становить  $n = 2s+r$ .

Будемо шукати щільність переміщень на кожному з інтервалів  $(b_{k-1}, b_k)$ , які розбивають відрізок  $(-\beta, \beta)$ , у вигляді

$$g_k(x) = \begin{cases} g_{k-1} - g_k \ln[1 - A_k(x)], & k \in M_1 \\ -g_{k-1} \ln A_k(x) + g_k, & k \in M_2, \\ g_{k-1}[1 - A_k(x)] + g_k A_k(x), & k \in M_3 \end{cases}, \quad A_k(x) = \frac{x - b_{k-1}}{\Delta b_k}. \quad (5)$$

Ліву частину (3) можна подати у вигляді

$$\sum_{k=1}^n [g_{k-1} \xi_k(x) + g_k \zeta_k(x)] = \sum_{k=0}^n g_k J_k(x), \quad (6)$$

$$J_0(x) = \xi_1(x), \quad J_n(x) = \zeta_n(x),$$

$$J_k(x) = \xi_{k+1}(x) + \zeta_k(x) \quad (k = 1, \dots, n-1).$$

$$\xi_k = \frac{1}{\pi} \begin{cases} C_k, & k \in M_1 \\ -I_{1k}, & k \in M_2, \\ C_k - \zeta_k, & k \in M_3 \end{cases}, \quad \zeta_k = \frac{1}{\pi} \begin{cases} -I_{2k}, & k \in M_1, \\ C_k, & k \in M_2, \\ C_k A_k + 1, & k \in M_3 \end{cases}$$

(тут для стислості опущений аргумент  $x$  всіх функцій),

$$\begin{aligned} I_{1k}(x) &= \int_{b_{k-1}}^{b_k} \frac{\ln[1 - A_k(t)]}{t - x} dt = C_k(x) \ln |1 - A_k(x)| - \frac{\pi^2}{6} + \text{Li}_2 \left[ \frac{A_k(x)}{A_k(x) - 1} \right]; \\ I_{2k}(x) &= \int_{b_{k-1}}^{b_k} \frac{\ln A_k(t)}{t - x} dt = C_k(x) \ln |A_k(x)| + \frac{\pi^2}{6} - \text{Li}_2 \left[ \frac{A_k(x) - 1}{A_k(x)} \right]; \\ C_k(x) &= \int_{b_{k-1}}^{b_k} \frac{dt}{t - x} = \ln \left| \frac{1 - A_k(x)}{A_k(x)} \right|, \end{aligned} \quad (7)$$

$\text{Li}_2(x)$  – ділогарифмічна функція:

$$\text{Li}_2(x) = \int_x^0 \frac{\ln(1-t)}{t} dt. \quad (8)$$

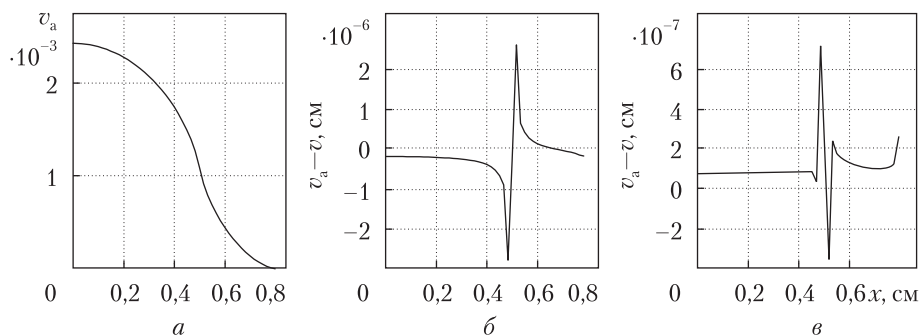


Рис. 2

Ліва частина (4) після інтегрування:

$$\sum_{k=1}^n \Delta b_k (g_{k-1} + g_k) \begin{cases} 1, & k \in M_1 \cup M_2, \\ 1/2, & k \in M_3, \end{cases}$$

(4) можна подати у вигляді

$$\int_{-\lambda}^{\lambda} g(t) dt = \sum_{k=0}^n N_k g_k.$$

Таким чином, розв'язання задачі зводиться до знаходження кореня рівняння

$$g(\pm\beta) = 0, \tag{9}$$

яке впливає з умови плавності змикання берегів тріщини. Для кожної ітерації змінної  $\beta$ , що визначає положення вершини зони зчеплення, треба розв'язувати систему лінійних рівнянь відносно  $g_k$ ,  $k = 0, \dots, n$ :

$$\sum_{k=0}^n J_{mk} g_k = p(\eta_m), \quad \sum_{k=0}^n N_k g_k = 0, \tag{10}$$

де  $\eta_m = 1/2(b_{m-1} + b_m)$  ( $m = 1, \dots, n$ ) є точками колокації,  $J_{mk} = J_k(\eta_m)$ . Для задачі з контурними умовами і умовами на нескінченності (1) останнє рівняння в (10) виконується автоматично, а

$$p(\eta_m) = -\sigma_{\infty} + \begin{cases} \sigma, & |\eta_m| > \lambda, \\ 0, & |\eta_m| < \lambda. \end{cases}$$

На рис. 2, а зображено вертикальне переміщення берегів тріщини  $v_a$ , що відповідає аналітичному розв'язку (2), отриманому при  $\sigma = 35$  МПа,  $\sigma_{\infty} = 20$  МПа. На рис. 2, в наведено похибку для функції щільності розподілу з сингулярними елементами функції форми поблизу точок  $x = \mp b$ , введених згідно з (5). Для порівняння на рис. 2, б наведено похибку з виключно лінійними елементами. Для представлених числових результатів  $r = 60$ ,  $s = 20$ , тобто загальна кількість інтервалів сітки  $n = 100$ .

**Алгоритм 2.** Розглянуту в рамках першого алгоритму методику можна вдосконалити, виправивши основні незручності, що виникають при розв'язанні задачі. До цих незручностей

тей віднесемо, по-перше, необхідність знаходження кореня  $\beta$  (він визначає положення границі зони зчеплення) нелінійного рівняння (9), а по-друге – необхідність обчислення коефіцієнтів системи (10) на кожній ітерації для  $\beta$ .

Виберемо інтервал пошуку функції щільності переміщень  $(-\delta, \delta)$  таким чином, щоб він напевне містив інтервал  $(-\beta, \beta)$  і будемо розв'язувати задачу з контурним напруженням

$$p(x) = -\sigma_\infty + \hat{T}(x) - \hat{\sigma}(x), \quad \hat{T}(x) = \begin{cases} \sigma, & |x| > \lambda, \\ 0, & |x| < \lambda. \end{cases}$$

Напруження  $\hat{\sigma}$  унеможлиблює перекриття берегів тріщини і разом з вертикальним переміщенням берегів тріщини може бути знайденим за допомоги ітеративної процедури:

позначимо  $M = \{m : 0 \leq m \leq n\}$ ,  $P = \emptyset$ ,

1) розв'язуємо систему

$$\begin{cases} v(\eta_m) = 0, & m \in M, \\ \frac{1}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{g(t) dt}{t - \eta_m} = -\sigma_\infty + \hat{T}(\eta_m), & m \in P, \end{cases}$$

2) обчислюємо компенсуючі напруження

$$\hat{\sigma}(\eta_m) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{g(t) dt}{t - \eta_m} - \sigma_\infty + \hat{T}(\eta_m).$$

3) перепозначаємо

$$M = \{m : \hat{\sigma}(\eta_m) \geq 0\}, \quad P = \{m : \hat{\sigma}(\eta_m) < 0\}.$$

Повторюємо 1–3, доки всі  $\hat{\sigma}(\eta_m) \geq 0$ .

Реалізація ітеративної процедури не дає точного значення для  $\beta$ , але цей параметр час-то не є характеристикою тріщиностійкості і може бути віднесений до внутрішніх параметрів задачі.

Шукатиме функцію щільності переміщень в формі кусково-лінійної функції з вагою

$$\omega(x) = -\ln |x^2 - \lambda^2|. \quad (11)$$

Система для визначення значень щільності переміщень  $g_k$  в квадратурних точках матиме вигляд (10), де

$$\begin{aligned} J_{m0} &= -T'_{m1} - K_{m0}, & J_{mk} &= T'_{mk} - T'_{m(k+1)}, & J_{mn} &= T'_{mn} + K_{mn}; \\ N_0 &= -G'_1 - R_0, & N_k &= G'_k - G'_{k+1}, & N_n &= G'_n + R_n, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} T'_{mk} &= (T_{mk} - T_{m(k-1)}) / \Delta b_k, & G'_k &= (G_k - G_{k-1}) / \Delta b_k; \\ T_{mk} &= R_k + (\eta_m - b_k) K_{mk}, & R_k &= R(b_k), & K_{mk} &= K(b_k, \eta_m); \end{aligned} \quad (13)$$

$$G_k = S_k - b_k R_k, \quad S_k = S(b_k),$$

$$R(t) = \int \omega(t) dt = 2t - (t - \lambda) \ln |t - \lambda| - (t + \lambda) \ln |t + \lambda|, \quad (14)$$

$$R(\lambda) = -R(\lambda) = 2\lambda(1 - \ln 2\lambda),$$

$$K(t, x) = \int \frac{\omega(t)}{t-x} dt = \text{Li}_2\left(\frac{x-t}{x-\lambda}\right) - \ln|x-\lambda| \ln\left|\frac{x-t}{x-\lambda}\right| + \text{Li}_2\left(\frac{x-t}{x+\lambda}\right) - \ln|x+\lambda| \ln\left|\frac{x-t}{x+\lambda}\right|, \quad (15)$$

де  $\text{Li}_2(x)$  – ділогарифм, визначений в (8),

$$S(t) = \int t\omega(t)dt = \frac{1}{2}(t^2 - \lambda^2) [1 + \omega(t)], \quad S(\lambda) = S(-\lambda) = 0. \quad (16)$$

Для реалізації наведеної вище ітеративної процедури запишемо переміщення берегів в точках колокації:

$$v(\eta_m) = \frac{L}{2} \sum_{k=0}^n W_{mk} g_k, \quad m = 1, \dots, n,$$

де  $L$  – пружна стала (у випадку ізотропії матеріалу і за умов плоского напруженого стану  $L = 4/E$ ,  $E$  – модуль Юнга),

$$W_{11} = (G_{1/2} - G_0) / \Delta b + \frac{1}{2} R_{1/2}, \quad W_{10} = R_{1/2} - R_0 - W_{11};$$

$$W_{mk} = \begin{cases} N_k, & k \leq m-2, \\ -(G_{m-1/2} - 2G_{m-1} + G_{m-2}) / \Delta b + \frac{1}{2} R_{m-1/2}, & k = m-1, \\ (G_{m-1/2} - G_{m-1}) / \Delta b + \frac{1}{2} R_{m-1/2}, & k = m, \end{cases} \quad (17)$$

$$m > 1; W_{mk} = 0 \text{ при } k > m; G_{k-1/2} = G(\eta_k), R_{k-1/2} = R(\eta_k).$$

Тепер основні геометричні параметри задачі – коефіцієнти  $J, N, W$ , їх можна визначити один раз для заданого  $n$ .

На рис. 3, а зображено вертикальне переміщення берегів тріщини  $v_a$ , що відповідає аналітичному розв'язку (2), отриманому при  $\sigma = 35$  МПа,  $\sigma_\infty = 20$  МПа,  $L = 4,116$  ГПа. На рис. 3, б наведено похибку для функції щільності з ваговою функцією (11). Для порівняння

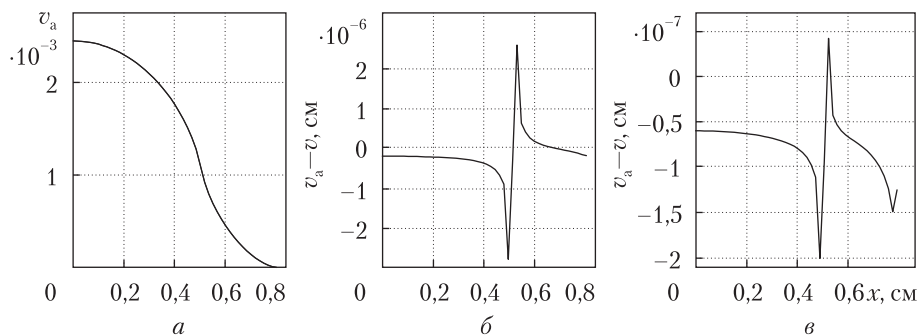


Рис. 3

на рис. 3, б наведено похибку для  $\omega(t) = 1$ . В цьому випадку вирази (14), (15) та (16) набувають вигляду:

$$R(t) = t, \quad K(t, x) = \ln |t - x|, \quad S(t) = \frac{t^2}{2}.$$

Для представлених числових результатів  $\Delta b = 2\lambda / r$ ,  $\delta = \lambda + s \cdot \Delta b$ ,  $r = 60$ ,  $s = 20$  загальна кількість інтервалів сітки  $n = 100$ .

Порівнюючи результати рис. 2 і 3, можна відзначити, що у випадку кусково-лінійних апроксимацій (див. блоки б) результати практично не відрізняються. Тут очевидну перевагу має другий алгоритм через простішу чисельну реалізацію. Порівнюючи блоки в рисунків, можна віддати перевагу підходу, що використовує вагову функцію у порівнянні з введенням сингулярності лише на інтервалах з краями в  $x = \pm\lambda$ : з введенням вагової функції спостерігається значне підвищення точності отриманого розв'язку.

#### ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Erdogan F., Gupta G.D., Cook T.S. Numerical solution of singular integral equations. Leyden: Noordhoff, In G.C. Sih (Ed.). Methods of analysis and solutions of crack problems. *Mechanics of Fracture*. 1973. **1**. P. 368–425.
2. Gross D., Heimer ST. Crack closure and crack path prediction for curved cracks under thermal load. *Eng. Fract. Mech.* 1993. **46**. P. 633–640. DOI:10.1016/0013-7944(93)90169-S
3. Theocaris P.S., Ioakimidis N.I. Numerical integration methods for the solution of singular integral equations. *Quart. Appl. Math.* 1977. **35**. P. 173–183. DOI:10.1090/qam/445873
4. Селіванов М.Ф. Визначення безпечної довжини тріщини та розподілу сил зчеплення в рамках моделі тріщини з зоною передруйнування. Допов. Нац. акад. наук України. 2014. №11. С. 58–64. doi:https://doi:10.15407/dopovidi2014.11.058

Надійшло до редакції 28.12.2016

#### REFERENCES

1. Erdogan, F., Gupta, G. D. & Cook, T. S. (1973). Numerical solution of singular integral equations. In G.C. Sih (Ed.). Methods of analysis and solutions of crack problems. Leyden: Noordhoff. Mechanics of Fracture. Vol. 1, pp. 368-425.
2. Gross, D. & Heimer, ST. (1993). Crack closure and crack path prediction for curved cracks under thermal load. Eng. Fract. Mech., 46, pp. 633-640.
3. Theocaris, P. S. & Ioakimidis N. I. (1977). Numerical integration methods for the solution of singular integral equations. Quart. Appl. Math., 35, pp. 173-183.
4. Selivanov, M. F. (2014). Determination of the safe crack length and cohesive traction distribution using the model of a crack with prefailure zone. Dopov. Nac. akad. nauk Ukr., No. 11, pp. 58-64. doi:https://doi:10.15407/dopovidi2014.11.058

Received 28.12.2016

М.Ф. Селіванов, Ю.А. Черноуван

Институт механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины, Киев

E-mail: mfs@ukr.net, yurchor@ukr.net

#### СРАВНЕНИЕ АЛГОРИТМОВ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ БЕРЕГОВ ТРЕЩИНЫ СЦЕПЛЕНИЯ

Приведены два алгоритма определения раскрытия трещины сцепления, учитывающие сингулярность производной от перемещения берегов трещины в точках, которые отвечают её вершинам. В основу перво-

го алгоритма положено условие плавности смыкания берегов. Второй алгоритм реализуется итеративным методом, на каждом шаге которого решается линейная система уравнений относительно плотностей перемещений в точках коллокации, он является более эффективным при некоторых соотношениях параметров задачи за счёт приближенного определения длины сцепления.

**Ключевые слова:** *разрушение, изотропное тело, трещина сцепления, раскрытие трещины, алгоритм.*

*M.F. Selivanov, Yu.O. Chornoivan*

S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of the NAS of Ukraine, Kiev

E-mail: mfs@ukr.net, yurchor@ukr.net

#### COMPARISON OF THE CRACK OPENING DISPLACEMENT DETERMINATION ALGORITHMS FOR A COHESIVE CRACK

Two algorithms are given to determine the cohesive crack opening. These algorithms take into account the singularity of the crack opening derivative at the crack tips. The first algorithm is based on the condition of crack closing smoothness. The second algorithm is an iterative, method whose implementation leads to a linear system for the displacement densities at collocation points on each step. This algorithm is more effective for some combinations of the problem parameters because of the approximate determination of the cohesive zone length.

**Keywords:** *fracture, isotropic body, cohesive crack, opening displacement, algorithm.*