doi: https://doi.org/10.15407/dopovidi2017.05.008

УДК 517.927.25

Т.К. Юлдашев

Сибирский государственный аэрокосмический университет
им. акад. М.Ф. Решетнева, Красноярск, Россия
E-mail: tursun.k.yuldashev@gmail.com

Разрешимость и определение коэффициента в одной краевой задаче для интегро-дифференциального уравнения Фредгольма с вырожденным ядром

Представлено академиком НАН Украины А.А. Мартынюком

Рассмотрены вопросы однозначной разрешимости и определения коэффициента одной нелокальной обратной задачи для интегро-дифференциального уравнения Фредгольма второго порядка с вырожденным ядром и отражающим отклонением. Получена система алгебраических уравнений. Устранены особенности, возникавшие при определении произвольных (неизвестных) постоянных. Установлен критерий однозначной разрешимости поставленной задачи и доказана соответствующая теорема.

Ключевые слова: *интегро-дифференциальное уравнение, обратная краевая задача, вырожденное ядро, интегральное условие, однозначная разрешимость.*

1. Постановка задачи. Математическое моделирование многих процессов, происходящих в реальном мире, часто приводит к изучению начальных, граничных и обратных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений и дифференциальных уравнений в частных производных. Такие задачи составляют основу математической физики. Представляют большой интерес с точки зрения физических приложений интегро-дифференциальные уравнения. Изучению обыкновенных интегро-дифференциальных уравнений посвящено большое количество работ (см., например, [1—7]).

В случаях, когда граница области протекания физического процесса недоступна для измерений, в качестве дополнительной информации, достаточной для однозначной разрешимости задачи, могут служить нелокальные условия в интегральной форме. Нелокальные задачи с интегральными условиями для дифференциальных уравнений рассматривались в работах многих авторов, в частности в [8—10].

В настоящей работе изучается однозначная разрешимость нелокальной обратной задачи для обыкновенного интегро-дифференциального уравнения Фредгольма с вырожденным ядром и отражающим аргументом. Интегро-дифференциальные уравнения с вырожденным ядром при других постановках задач рассматривались в [11—14]. Итак, на конечном отрезке $[-T;T]$ рассматривается уравнение вида

$$u''(t)+\lambda^2 u(t)=\nu\int_{-T}^{T}K(t,s)u(\omega-s)ds+\beta\alpha(t) \tag{1}$$

при следующих условиях:

$$u(T)=\int_{-T}^{T}u(t)dt, \quad u'(T)=\varphi, \quad u(t)=\psi(t),\ t\in[T;\,T+\omega], \tag{2}$$

$$u(0)=r, \tag{3}$$

где $0<T$ — заданное действительное число; $0<\lambda$ — действительный параметр; $\alpha(t)\in C^2[-T;\,T+\omega]$; $\varphi, r=\text{const}$; ν — действительный спектральный параметр; β — коэффициент переопределения; $0<\omega=\text{const}<<T$; $K(t,s)=\sum_{i=1}^{k}a_i(t)b_i(s)$, $a_i(t)\in C^2[-T;\,T+\omega]$, $b_i(s)\in C^2[-T;T]$; $\psi(t)\in C[-T;T]$; $\psi(T)=u(T)$. Здесь предполагается, что функции $a_i(t)$ и $b_i(s)$ являются линейно независимыми.

Вопрос о единственности решения обратной задачи (1)—(3) сводится к вопросу о тривиальности решения однородного интегро-дифференциального уравнения при однородном условии $u'(T)=0$.

2. Решение краевой задачи (1), (2). С учетом вырожденности ядра уравнение (1) запишем в виде

$$u''(t)+\lambda^2 u(t)=\nu\int_{-T}^{T}\sum_{i=1}^{k}a_i(t)\,b_i(\omega-s)u(s)ds+\alpha(t)\beta. \tag{4}$$

С помощью обозначения

$$\tau_i=\int_{-T}^{T}b_i(s)u(\omega-s)ds \tag{5}$$

уравнение (4) перепишем в виде

$$u''(t)+\lambda^2 u(t)=\nu\sum_{i=1}^{k}a_i(t)\,\tau_i+\alpha(t)\beta. \tag{6}$$

Дифференциальное уравнение (6) решается методом вариации произвольных постоянных

$$u(t)=A_1\cos\lambda t+A_2\sin\lambda t+\eta(t), \tag{7}$$

где A_1, A_2 — пока произвольные постоянные; $\eta(t)=\dfrac{\nu}{\lambda}\sum_{i=1}^{k}\tau_i h_i(t)+\dfrac{\beta}{\lambda}\delta_1(t)$, $h_i(t)=\int_0^t\sin\lambda(t-s)\times$ $\times\, a_i(s)ds$, $i=\overline{1,k}$, $\delta_1(t)=\int_0^t\sin\lambda(t-s)\alpha(s)ds.$

Для нахождения неизвестных коэффициентов A_1 и A_2 в (7) используем первое из условий (2) и приходим к равенству

$$A_1 \sigma_1(\lambda) = A_2 \sigma_2(\lambda) + \xi_0, \tag{8}$$

где $\sigma_1(\lambda) = \cos\lambda T - \frac{2}{\lambda}\sin\lambda T$; $\sigma_2(\lambda) = -\sin\lambda T$; $\xi_0 = \int\limits_{-T}^{T} \eta(t)\,dt - \eta(T)$.

Если в (8) положим, что $\sigma_1(\lambda) = 0, \sigma_2(\lambda) \neq 0$ или $\sigma_1(\lambda) \neq 0, \sigma_2(\lambda) = 0$, то не сможем выразить A_1 через A_2.

Если в (8) положим, что $\sigma_1(\lambda) = \sigma_2(\lambda) = 0$, то приходим к тривиальному результату: $\xi_0 = 0$, т. е. $\nu = \beta = 0$. В этом случае соответствующее дифференциальное уравнение $u''(t) + \lambda^2 u(t) = 0$ имеет бесконечное множество решений $u(t) = \tilde{A}_1 \cos\lambda t + \tilde{A}_2 \sin\lambda t$, где $\tilde{A}_1$, $\tilde{A}_2$ — произвольные постоянные. Поэтому положим

$$\sigma_1(\lambda) \neq 0, \quad \sigma_2(\lambda) \neq 0. \tag{9}$$

Тогда из (8) получаем, что

$$u(t) = A_2 \left(\frac{\sigma_2(\lambda)}{\sigma_1(\lambda)} \cos\lambda t + \sin\lambda t \right) + \xi(t), \tag{10}$$

где $\xi(t) = \frac{\xi_0}{\sigma_1(\lambda)} \cos\lambda t + \eta(t)$.

Теперь воспользуемся вторым условием из формулы (2). Тогда из (10) получаем, что

$$\varphi = u'(t)\big|_{t=T} = \lambda A_2 \frac{\sigma_3(\lambda)}{\sigma_1(\lambda)} + \gamma, \tag{11}$$

где $\sigma_3(\lambda) = \sin\lambda T - \lambda$, $\gamma = \xi'(T)$.

Итак, для определения неизвестного коэффициента A_2 требуем выполнения следующего условия:

$$\sigma_3(\lambda) = \sin\lambda T - \lambda \neq 0. \tag{12}$$

Тогда из (11) находим

$$A_2 = \frac{(\varphi - \gamma)\sigma_1(\lambda)}{\lambda \sigma_3(\lambda)}. \tag{13}$$

Подставляя (13) в формулу (10), получаем

$$u(t) = \varphi B(t) + \frac{\nu}{\lambda} \sum_{i=1}^{k} \tau_i D_i(t) + \frac{\beta}{\lambda} E(t), \tag{14}$$

где

$$B(t) = \delta_0(t) \frac{\sigma_1(\lambda)}{\lambda \sigma_3(\lambda)}, \quad \delta_0(t) = \frac{\sigma_2(\lambda)}{\sigma_1(\lambda)} \cos\lambda t + \sin\lambda t;$$

$$D_i(t) = \delta_2(t) \left[\int\limits_0^T h_i(t)\,dt - h_i(T) \right] + h_i'(T) + h_i(t);$$

$$E(t)=\delta_2(t)\left[\int_0^T \delta_1(t)dt-\delta_1(T)\right]+\delta_1'(T)+\delta_1(t),\ \ \delta_2(t)=\frac{\cos\lambda t}{\sigma_1(\lambda)}-\frac{\delta_0(t)}{\sigma_3(\lambda)}\sin\lambda T,$$

$$h_i(t)=\int_0^t \sin\lambda(t-s)a_i(s)ds,\ i=\overline{1,k},\ \ \delta_1(t)=\int_0^t \sin\lambda(t-s)\alpha(s)ds.$$

В (14) t заменим на $\omega-t$:

$$u(\omega-t)=\varphi B(\omega-t)+\frac{\nu}{\lambda}\sum_{i=1}^{k}\tau_i D_i(\omega-t)+\frac{\beta}{\lambda}E(\omega-t). \tag{15}$$

Подставляя (15) в (5), получаем систему алгебраических уравнений (САУ)

$$\tau_i+\frac{\nu}{\lambda}\sum_{j=1}^{k}\tau_j H_{ij}=\Psi_i, \tag{16}$$

где $H_{ij}=-\int\limits_{-T}^{T} b_i(s)D_j(\omega-s)ds$;

$$\Psi_i=\int_{-T}^{T} b_i(s)\left[\varphi B(\omega-s)+\frac{\beta}{\lambda}E(\omega-s)\right]ds. \tag{17}$$

Отметим, что из линейной независимости функций $a_i(t)$ и $b_i(s)$ следует, что $H_{ij}\neq 0$. САУ (16) однозначно разрешима при любых конечных Ψ_i, если выполняется следующее условие:

$$\Delta(\nu,\lambda)=\begin{vmatrix} 1+\frac{\nu}{\lambda}H_{11} & \frac{\nu}{\lambda}H_{12} & \dots & \frac{\nu}{\lambda}H_{1k} \\ \frac{\nu}{\lambda}H_{21} & 1+\frac{\nu}{\lambda}H_{22} & \dots & \frac{\nu}{\lambda}H_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\nu}{\lambda}H_{k1} & \frac{\nu}{\lambda}H_{k2} & \dots & 1+\frac{\nu}{\lambda}H_{kk} \end{vmatrix}\neq 0. \tag{18}$$

Тогда решения САУ (16) запишем в виде

$$\tau_i=\frac{\Delta_i(\nu,\lambda)}{\Delta(\nu,\lambda)},\ \ i=\overline{1,k}, \tag{19}$$

где

$$\Delta_i(\nu,\lambda)=\begin{vmatrix} 1+\frac{\nu}{\lambda}H_{11} & \dots & \frac{\nu}{\lambda}H_{1(i-1)} & \Psi_1 & \frac{\nu}{\lambda}H_{1(i+1)} & \dots & \frac{\nu}{\lambda}H_{1k} \\ \frac{\nu}{\lambda}H_{21} & \dots & \frac{\nu}{\lambda}H_{2(i-1)} & \Psi_2 & \frac{\nu}{\lambda}H_{2(i+1)} & \dots & \frac{\nu}{\lambda}H_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\nu}{\lambda}H_{k1} & \dots & \frac{\nu}{\lambda}H_{k(i-1)} & \Psi_k & \frac{\nu}{\lambda}H_{k(i+1)} & \dots & 1+\frac{\nu}{\lambda}H_{kk} \end{vmatrix}.$$

Подставляя (19) в (14), получаем

$$u(t)=\varphi B(t)+\frac{\nu}{\lambda}\sum_{i=1}^{k}\frac{\Delta_i(\nu,\lambda)}{\Delta(\nu,\lambda)}D_i(t)+\frac{\beta}{\lambda}E(t). \tag{20}$$

3. Обоснование разрешимости краевой задачи (1), (2). Рассмотрим случаи, когда нарушаются условия в (9). Пусть $\sigma_1(\lambda)=\cos\lambda T-\frac{2}{\lambda}\sin\lambda T=0$ при некоторых λ. Это условие эквивалентно уравнению $\operatorname{tg}\lambda T=\frac{\lambda}{2}$, которое имеет решения

$$\lambda_n=\frac{1}{T}\operatorname{arctg}\frac{\lambda_n}{2}+\frac{\pi n}{T},\ n\in N, \tag{21}$$

где N — множество натуральных чисел. Формула (21) является уравнением относительно λ_n. Его можно решать методом последовательных приближений $\lambda_{n,\mu}=\frac{1}{T}\operatorname{arctg}\frac{\lambda_{n,\mu}}{2}$, $\mu=1,2,3,\ldots$.

Пусть $\sigma_2(\lambda)=\sin\lambda T=0$ при некоторых λ. Отсюда получаем решение

$$\lambda_m=\frac{\pi m}{T},\ m\in N. \tag{22}$$

Теперь рассмотрим случай, когда нарушается условие (12). Пусть $\sigma_3(\lambda)=\sin\lambda T-\lambda=0$ при некоторых λ. Это условие эквивалентно равенству $\sin\lambda T=\lambda$. Если $\lambda\leqslant 1$, то это тригонометрическое уравнение имеет решения

$$\lambda_\xi=\frac{\arcsin\lambda_\xi}{T},\ \ \lambda_\xi=\frac{\pi-\arcsin\lambda_\xi}{T} \tag{23}$$

в предположении, что $\lambda_\xi\leqslant 1$ и $1<\frac{2\pi\zeta}{T}$, ζ — натуральное число. Формулы в (23) также являются уравнениями относительно λ_ξ. Их также можно решать методом последовательных приближений. Если $\lambda>1$, то условие (12) всегда выполняется.

Установим единственность решения краевой задачи (1), (2). С этой целью покажем, что при нулевом условии $u'(T)=0$ и нулевой правой части краевая задача (1), (2) имеет только тривиальное решение. Поэтому вернемся к определителю $\Delta_i(\nu,\lambda)$. Дело в том, что среди элементов определителей $\Delta_i(\nu,\lambda)$ находятся Ψ_i. В свою очередь, в составе величин Ψ_i находятся φ и β. В самом деле, эти величины находились в правой части САУ (16). Чтобы вывести их из знака определителей, выражение в (17) запишем в следующем виде:

$$\Psi_i=\varphi\Psi_{1i}+\frac{\beta}{\lambda}\Psi_{2i},$$

где $\Psi_{1i}=\int\limits_{-T}^{T}b_i(s)B(\omega-s)ds$, $\Psi_{2i}=\int\limits_{-T}^{T}b_i(s)E(\omega-s)ds$.

В этом случае согласно свойству определителя имеем

$$\Delta_i(\nu,\lambda)=\varphi\Delta_{1i}(\nu,\lambda)+\frac{\beta}{\lambda}\Delta_{2i}(\nu,\lambda),$$

где

$$\Delta_{ji}(\nu,\lambda)=\begin{vmatrix} 1+\frac{\nu}{\lambda}H_{11} & \dots & \frac{\nu}{\lambda}H_{1(i-1)} & \Psi_{j1} & \frac{\nu}{\lambda}H_{1(i+1)} & \dots & \frac{\nu}{\lambda}H_{1k} \\ \frac{\nu}{\lambda}H_{21} & \dots & \frac{\nu}{\lambda}H_{2(i-1)} & \Psi_{j2} & \frac{\nu}{\lambda}H_{2(i+1)} & \dots & \frac{\nu}{\lambda}H_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\nu}{\lambda}H_{k1} & \dots & \frac{\nu}{\lambda}H_{k(i-1)} & \Psi_{jk} & \frac{\nu}{\lambda}H_{k(i+1)} & \dots & 1+\frac{\nu}{\lambda}H_{kk} \end{vmatrix}, \quad j=1,\ 2.$$

Тогда формулу (19) запишем в виде

$$\tau_i=\varphi\frac{\Delta_{1i}(\nu,\lambda)}{\Delta(\nu,\lambda)}+\frac{\beta}{\lambda}\frac{\Delta_{2i}(\nu,\lambda)}{\Delta(\nu,\lambda)},\ i=\overline{1,\ k}. \tag{24}$$

Подставляя (24) в (14), получаем

$$u(t)=\varphi F(t)+\frac{\beta}{\lambda}M(t), \tag{25}$$

где $F(t)=B(t)+\frac{\nu}{\lambda}\sum_{i=1}^{k}\frac{\Delta_{1i}(\nu,\ \lambda)}{\Delta(\nu,\lambda)}D_i(t);\ M(t)=E(t)+\frac{\nu}{\lambda}\sum_{i=1}^{k}\frac{\Delta_{2i}(\nu,\lambda)}{\Delta(\nu,\lambda)}D_i(t).$

Теперь предположим, что $\varphi\equiv 0,\ \beta\equiv 0$. Тогда из формулы (25) следует, что $u(t)\equiv 0$ для всех $t\in[-T,T]$.

4. Определение неизвестного коэффициента. Используя условие (3), из (25) получаем, что

$$r=\varphi F(0)+\frac{\beta}{\lambda}M(0), \tag{26}$$

где

$$F(0)=B(0)+\nu\sum_{i=1}^{k}\frac{\Delta_{1i}(\nu,\lambda)}{\Delta(\nu,\lambda)}D_i(0);\ M(0)=E(0)+\nu\sum_{i=1}^{k}\frac{\Delta_{2i}(\nu,\lambda)}{\Delta(\nu,\lambda)}D_i(0),$$

$$B(0)=\frac{\sigma_2(\lambda)}{\lambda\sigma_3(\lambda)},\ D_i(0)=-h_i(T)\delta_2(0)+h_i'(T),$$

$$E(0)=-\delta_1(T)\delta_2(0)+\delta_1'(T),\ \delta_2(0)=\frac{1}{\sigma_1(\lambda)}-\frac{\sigma_2(\lambda)}{\sigma_1(\lambda)\sigma_3(\lambda)}\sin\lambda T.$$

Из (26) однозначно определяем неизвестный коэффициент

$$\beta=\lambda\frac{r-\varphi F(0)}{M(0)},\ M(0)\neq 0. \tag{27}$$

Подставив (27) в (25), окончательно имеем для неизвестной функции

$$u(t)=\varphi F(t)+\frac{r-\varphi F(0)}{M(0)}M(t),\ M(0)\neq 0. \tag{28}$$

5. Заключение. Множество всех значений параметра λ, определенных в формулах (21)—(23), обозначим Λ_1. Число значений параметра λ, при которых нарушаются условия (9) и (12), счетное.

Теперь предположим, что нарушается условие (18). Определитель $\Delta(\nu, \lambda)$ в (18) есть многочлен относительно $\dfrac{\nu}{\lambda}$ степени не выше k. Уравнение $\Delta(\nu, \lambda) = 0$ имеет не более k различных корней. Их обозначим через μ_k. Тогда $\nu = \lambda\mu_k$ являются собственными числами ядра интегро-дифференциального уравнения (1). Множество собственных чисел ядра интегро-дифференциального уравнения (1) обозначим через Λ_2. Число элементов этого множества Λ_2 счетное.

Значения параметра $\lambda \in (0, \infty) \setminus \Lambda_1$ назовем регулярными, при которых выполняются условия (9) и (12). Аналогично значения спектрального параметра $\nu \in (-\infty, \infty) \setminus \Lambda_2$ назовем регулярными, при которых выполняется условие (18).

Для таких регулярных значений λ и ν нами доказано, что справедлива следующая теорема.

Теорема. *Обратная краевая задача* (1)—(3) *однозначно разрешима при регулярных значениях* λ *и* ν *на конечном отрезке* $[-T, T]$. *Решение этой задачи* $\{u(t), \beta\}$ *определяется формулами* (27) *и* (28).

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Банг Н.Д., Чистяков В.Ф., Чистякова Е.В. О некоторых свойствах вырожденных систем линейных интегро-дифференциальных уравнений. I. *Изв. Иркутского гос. ун-та. Сер. Матем.* 2015. **11**. С. 13—27.
2. Быков Я.В. О некоторых задачах теории интегро-дифференциальных уравнений. Фрунзе: Изд-во Кирг. ун-та, 1957. 327 с.
3. Вайнберг М.М. Интегро-дифференциальные уравнения. *Итоги науки. Сер. Мат. анал. Теор. вероятн. Регулир.* 1962. Москва: ВИНИТИ, 1964. С. 5—37.
4. Васильев В.В. К вопросу о решении задачи Коши для одного класса линейных интегро-дифференциальных уравнений. *Изв. вузов. Матем.* 1961. № 4. С. 8—24.
5. Власов В.В., Перез Ортиз Р. Спектральный анализ интегро-дифференциальных уравнений, возникающих в теории вязкоупругости и теплофизике. *Матем. заметки.* 2015. **98**, № 4. С. 630—634.
6. Ландо Ю.К. Краевая задача для линейных интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра в случае распадающихся краевых условий. *Изв. вузов. Матем.* 1961. № 3. С. 56—65.
7. Фалалеев М.В. Интегро-дифференциальные уравнения с фредгольмовым оператором при старшей производной в банаховых пространствах и их приложения. *Изв. Иркутского гос. ун-та. Сер. Матем.* 2012. **5**, № 2. С. 90—102.
8. Гордезиани Д.Г., Авалишвили Г.А. Решения нелокальных задач для одномерных колебаний среды. *Матем. моделирование.* 2000. **12**, № 1. С. 94—103.
9. Иванчов Н.И. Краевые задачи для параболического уравнения с интегральными условиями. *Дифференц. уравнения.* 2004. **40**, № 4. С. 547—564.
10. Тихонов И.В. Теоремы единственности в линейных нелокальных задачах для абстрактных дифференциальных уравнений. *Изв. РАН. Сер. матем.* 2003. **67**, № 2. С. 133—166.
11. Джумабаев Д.С., Бакирова Э.А. Об однозначной разрешимости краевой задачи для систем интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма с вырожденным ядром. *Нелинейные колебания.* 2015. **18,** № 4. С. 489—506.
12. Юлдашев Т.К. Об одном интегро-дифференциальном уравнении Фредгольма в частных производных третьего порядка. *Изв. вузов. Матем.* 2015. № 9. С. 74—79.

13. Юлдашев Т.К. Обратная задача для нелинейных интегро-дифференциальных уравнений типа Benney — Luke с вырожденным ядром. *Изв. вузов. Матем.* 2016. № 9. С. 59—67.
14. Юлдашев Т.К. Нелокальная смешанная задача для интегро-дифференциального уравнения типа Буссинеска с вырожденным ядром. *Укр. мат. журн.* 2016. **68**, № 8. С. 1115—1131.

Поступило в редакцию 12.12.2016

REFERENCES

1. Bang, N. D., Chistyakov, V. F. & Chistyakova, E. V. (2015). About some properties of degenerate systems of linear integro-differential equations. I. Izv. Irkutskogo gos. univ. Ser. Matem., 11, pp. 13-27 (in Russian).
2. Bykov, Ja. V. (1957). On some problems of the theory of integro-differential equations. Frunze: Izd-vo Kirg. un-ta (in Russian).
3. Vajnberg, M. M. (1964). Integro-differential equations. Itogi nauki. Ser. Mat. anal. Teor. veroyatn. Regulir. 1962. Moscow: VINITI, pp. 5-37 (in Russian).
4. Vasil'jev, V. V. (1961). On the solution of the Cauchy problem for a class of linear integro-differential equations. Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat., No. 4, pp. 8-24 (in Russian).
5. Vlasov, V. V. & Perez Ortiz R. (2015). Spectral analysis of integro-differential equations in viscoelasticity and thermal physics. Mat.Notes, 98, Iss. 3, pp. 689-693.
6. Lando, Yu. K. (1961). A boundary-value problem for linear integro-differential equations of Volterra type in the case of disjoint boundary conditions Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat., No. 3, pp. 56-65 (in Russian).
7. Phalaleev, M. V. (2012). Integro-differential equations with Fredholm operator by the derivative of the higest order in Banach spaces and it's applications. Izv. Irkutskogo gos. univ. Ser. Matem., 5, No. 2, pp. 90-102 (in Russian).
8. Gordeziani, D. G. & Avilishvili, G. A. (2000). On the constructing of solutions of the nonlocal initial boundary value problems for one-dimensional medium oscillation equations. Matem. Modelirovanie, 12, No. 1, pp. 94-103 (in Russian).
9. Ivanchov, N. I. (2004). Boundary value problems for a parabolic equation with integral conditions. Differ. Uravn., 40, No 4. pp. 547-564 (in Russian).
10. Tikhonov, I. V. (2003). Uniqueness theorems for linear non-local problems for abstract differential equations. Izv. RAN. Ser. Mat., 67, No. 2, pp. 133-166 (in Russian). doi: https://doi.org/10.4213/im429
11. Dzhumabaev, D. S. & Bakirova, E. A. (2015). On unique solvability of a boundary-value problem for Fredholm intergo-differential equations with degenerate kernel. Nonlinear Oscillations, 18, No. 4, pp. 489-506 (in Russian).
12. Yuldashev, T. K. (2015). On Fredholm partial integro-differential equation of the third order. Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat., No. 9, pp. 74-79 (in Russian).
13. Yuldashev, T. K. (2016). Inverse problem for a nonlinear Benney—Luke type integro-differential equations with degenerate kernel. Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat., No. 9, pp. 59-67 (in Russian).
14. Yuldashev, T. K. (2016). Nonlocal mixed-value problem for a Boussinesq-type integrodifferential equation with degenerate kernel. Ukr. Math. Zh., 68, No. 8, pp. 1115-1131 (in Russian).

Received 12.12.2016

Т.К. Юлдашев

Сибірський державний аерокосмічний університет
ім. акад. М.Ф. Решетньова, Красноярськ, Росія
E-mail: tursun.k.yuldashev@gmail.com

РОЗВ'ЯЗНІСТЬ І ВИЗНАЧЕННЯ КОЕФІЦІЄНТА
В ОДНІЙ КРАЙОВІЙ ЗАДАЧІ ДЛЯ ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО
РІВНЯННЯ ФРЕДГОЛЬМА З ВИРОДЖЕНИМ ЯДРОМ

Розглянуто питання однозначної розв'язності і визначення коефіцієнта однієї нелокальної оберненої задачі для інтегро-диференціального рівняння Фредгольма другого порядку з виродженим ядром і відбиваючим відхиленням. Одержано систему алгебраїчних рівнянь. Усунуто особливості, що виникали при визначенні довільних (невідомих) сталих. Встановлено критерій однозначної розв'язності поставленої задачі і доведено відповідну теорему.

Ключові слова: *інтегро-диференціальне рівняння, обернена крайова задача, вироджене ядро, інтегральна умова, однозначна розв'язність.*

T.K. Yuldashev

Siberian State Aerospace University, Krasnoyarsk, Russia
E-mail: tursun.k.yuldashev@gmail.com

SOLVABILITY AND THE DETERMINATION OF THE COEFFICIENT
IN A BOUNDARY-VALUE PROBLEM FOR A FREDHOLM-TYPE
INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION WITH DEGENERATE KERNEL

The questions of solvability and determination of the coefficients of a nonlocal boundary-value problem for a second-order Fredholm integro-differential equation with degenerate kernel and reflecting deviation are considered. The system of algebraic equations is obtained. Some features arising in the determination of the arbitrary (unknown) constants are removed. The criterion of one-value solvability of the considered problem is established. Under this criterion, the one-valued solvability of the problem is proved, and the appropriate therem is proved.

Keywords: *integro-differential equation, inverse boundary-value problem, degenerate kernel, integral condition, one-valued solvability.*