ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

doi: https://doi.org/10.15407/dopovidi2017.05.003
УДК 517.9

М.О. Перестюк, О.В. Капустян, І.В. Романюк

Київський національний університет ім. Тараса Шевченка
E-mail: pmo@univ.kiev.ua, kapustyanav@gmail.com, romanjuk.iv@gmail.com

Глобальний атрактор імпульсної параболічної системи

Представлено академіком НАН України М.О. Перестюком

Досліджено існування глобальних атракторів для імпульсних многозначних динамічних систем, траєкторії яких мають нескінченну кількість імпульсних збурень. Одержані результати застосовано до параболічної слабонелінійної імпульсно-збуреної системи без єдиності розв'язку задачі Коші.

Ключові слова: *імпульсна многозначна динамічна система, глобальний атрактор, імпульсне збурення, параболічна система.*

Автономні еволюційні системи, що зазнають імпульсних збурень при досягненні траєкторією деякої підмножини фазового простору, називаються імпульсними (або розривними) динамічними системами. Такі системи є важливим підкласом систем з імпульсними збуреннями в нефіксовані моменти часу, якісна теорія для яких у скінченновимірному випадку розвинена в [1].

У даній роботі з використанням теорії глобальних атракторів многозначних напівпотоків [2] описується динаміка нескінченновимірних імпульсних систем без єдиності розв'язку задачі Коші. Глобальний атрактор розглядається як мінімальна рівномірно притягуюча множина для відповідного многозначного напівпотоку [3]. На основі результатів робіт [4, 5] побудовано абстрактну теорію многозначних імпульсних динамічних систем і наведено приклад її застосування до слабонелінійної імпульсно-збуреної параболічної системи, для якої не гарантується єдиність розв'язку задачі Коші.

Нехай (X, ρ) — метричний простір, $P(X)$ $(\beta(X))$ — множина всіх непорожніх (непорожніх обмежених) підмножин X.

Означення [2]. Многозначне відображення $G : R_+ \times X \to P(X)$ називається многозначною динамічною системою (МДС), якщо виконуються такі умови:

$$\forall x \in X \;\; G(0,\, x) = x \;\text{ та }\; \forall t, s \geqslant 0 \;\; G(t+s,\, x) \subseteq G(t, G(s, x)).$$

Означення [3]. Компактна множина $\Theta \subset X$ називається глобальним атрактором МДС G, якщо

1) Θ — рівномірно притягуюча, тобто $\forall B \in \beta(X)$ $\operatorname{dist}(G(t, B), \Theta) \to 0$, $t \to \infty$;

2) Θ — мінімальна серед усіх замкнених рівномірно притягуючих множин.

Лема 1. *Нехай МДС G задовольняє умову дисипативності*:

$$\exists B_0 \in \beta(X) \ \forall B \in \beta(X) \ \exists T = T(B) > 0 \ \forall t \geqslant T \ G(t, B) \subset B_0. \tag{1}$$

Тоді еквівалентними є такі твердження:

1) *МДС G має глобальний атрактор* Θ;

2) *МДС G асимптотично компактна, тобто*

$\forall t_n \to \infty$ $\forall B \in \beta(X)$ $\forall \xi_n \in G(t_n, B)$ *послідовність* $\{\xi_n\}$ *передкомпактна в* X.

Імпульсна МДС G складається з непорожньої замкненої множини $M \subset X$, компактнозначного відображення $I : M \to P(X)$ та деякої множини K неперервних відображень $\varphi : [0, +\infty) \to X$, для яких виконуються такі властивості:

K1) $\forall x \in X$ $\exists \varphi \in K : \varphi(0) = x$;

K2) $\forall \varphi \in K$ $\forall s \geqslant 0$ $\varphi(\cdot + s) \in K$.

Позначимо

$K_x = \{\varphi \in K \mid \varphi(0) = x\}$.

Фазова точка імпульсної МДС рухається вздовж траєкторії з K і в момент зустрічі з множиною M миттєво переходить у нову точку із множини IM. Для коректності побудови такої імпульсної МДС необхідне виконання таких умов [4, 5]:

$$M \cap I(M) = \varnothing, \ \forall x \in M \ \forall \varphi \in K_x \ \exists \tau = \tau(\varphi) > 0 \ \forall t \in (0, \tau) \ \varphi(t) \notin M. \tag{2}$$

Введемо позначення:

$$\forall \varphi \in K \ \ M^+(\varphi) = \bigcup_{t>0} \varphi(t) \cap M.$$

Тоді якщо $M^+(\varphi) \neq \varnothing$, то існує момент часу $s = s(\varphi)$ такий, що

$$\forall t \in (0, s) \ \varphi(t) \notin M, \varphi(s) \in M. \tag{3}$$

Звідси ми можемо визначити таку функцію $s : K \to (0, +\infty]$:

$$s(\varphi) = \begin{cases} s, & \text{якщо } M^+(\varphi) \neq \varnothing, \\ +\infty, & \text{якщо } M^+(\varphi) = \varnothing. \end{cases} \tag{4}$$

Імпульсна траєкторія $\tilde{\varphi}$, що починає рух з точки $x_0 \in X$, є неперервною справа функцією, що має вигляд

$$\tilde{\varphi}(t) = \begin{cases} \varphi_n(t - t_n), & \text{якщо } t \in [t_n, t_{n+1}), \\ x_{n+1}^+, & \text{якщо } t = t_{n+1}, \end{cases} \tag{5}$$

де $\{x_{n+1}^+ \in I\varphi_n(s_n)\}_{n \geqslant 0} \subset IM$ — імпульсні точки, $\{s_n\}_{n \geqslant 0} \subset (0, +\infty)$ — відповідні моменти часу, $\{\varphi_n\}_{n \geqslant 0} \subset K$, $\varphi_0(0) = x$ та $\forall n \geqslant 0$ $t_0 := 0$, $t_{n+1} := \sum_{k=0}^{n} s_k, n \geqslant 0$.

Позначимо через $\tilde{K}_x$ множину всіх імпульсних траєкторій, що починають рух з точки x. Будемо вважати виконаною таку умову:

$$\forall x \in X \text{ кожна } \tilde{\varphi} \in \tilde{K}_x \text{ визначена на } [0, +\infty). \tag{6}$$

Означення. Многозначне відображення $G: R_+ \times X \to P(X)$

$$G(t, x) = \{\tilde{\varphi}(t) \mid \tilde{\varphi} \in \tilde{K}_x\} \tag{7}$$

називається імпульсною МДС.

Лема 2. *Якщо виконуються умови* К1, К2, (2), (6), *то формула* (7) *визначає МДС* G.

Розглянемо умови виконання властивості інваріантності для глобальних атракторів імпульсних МДС. Для цього накладаємо додаткові умови на параметри задачі:

К3) $\forall x_n \to x \ \ \forall \varphi_n \in K_{x_n} \ \exists \varphi \in K_x$ таке, що по деякій підпослідовності $\forall t \geqslant 0 \ \ \varphi_n(t) \to \varphi(t)$;

I) компактнозначне відображення $I: M \to P(X)$ напівнеперервне зверху [6];

S1) якщо для $x \in X \setminus M, \ x_n \to x, \ \varphi_n \in K_{x_n}, \ \varphi \in K_x$ та $\forall t \geqslant 0 \ \ \varphi_n(t) \to \varphi(t)$, то

$$\begin{cases} s(\varphi) = \infty, \text{ якщо } s(\varphi_n) = \infty \text{ для нескінченної кількості } n \geqslant 1, \\ s(\varphi_n) \to s(\varphi), \text{ інакше.} \end{cases}$$

Лема 3. *Нехай імпульсна МДС* G *задовольняє умови* К1, К2, (2), (6), К3, I, S1 і має глобальний атрактор Θ. *Тоді виконується така властивість*:

$$\forall t \geqslant 0 \ \ \forall \xi \in \Theta \setminus M \ \ G(t, \xi) \cap (\Theta \setminus M) \neq \varnothing. \tag{8}$$

Якщо при цьому G *однозначне, то*

$$\forall t \geqslant 0 \quad G(t, \Theta \setminus M) \subseteq \Theta \setminus M. \tag{9}$$

Для того щоб виконувалося зворотне вкладення у (9), необхідно накласти такі додаткові припущення на K, M, I:

К4) $\forall x_n \to x \ \ \forall \varphi_n \in K_{x_n} \ \exists \ \varphi \in K_x$ такі, що по деякій підпослідовності

$$\varphi_n \to \varphi \text{ рівномірно на кожному } [a, b] \subset [0, \infty); \tag{10}$$

S2) якщо для $x_n \notin M, \ x_n \to x \in M$, то для $\varphi_n \in K_{x_n}$ або $s(\varphi_n) = \infty$ для нескінченної кількості $n \geqslant 1$, або по підпослідовності $s(\varphi_n) \to 0, n \to \infty$.

Лема 4. *Нехай* G *задовольняє умови* К1, К2, (2), (6), К3, I, S1, К4, S2 і Θ *— глобальний атрактор* G. *Тоді*

$$\forall t \geqslant 0 \ \ \Theta \setminus M \subseteq G(t, \ \Theta \setminus M). \tag{11}$$

Крім того, якщо $\forall x \in X, \forall t, s \geqslant 0 \ \ G(t+s, x) = G(t, G(s, x))$, *то в* (11) *має місце рівність.*

Розглянемо застосування наведених абстрактних результатів до слабонелінійної параболічної задачі, розв'язки якої зазнають імпульсного збурення в момент зустрічі з фіксованою підмножиною фазового простору [7]. Нехай $\Omega \subset R^n$ — обмежена область. Відносно невідомих функцій $u(t, x), v(t, x)$ в області $(0, +\infty) \times \Omega$ розглянемо таку нелінійну задачу:

$$\begin{cases} u_t = a_1 \Delta u + \varepsilon f_1(u, v), \\ v_t = a_2 \Delta v + b \Delta u + \varepsilon f_2(u, v), \\ u \big|_{\partial\Omega} = v \big|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} \tag{12}$$

де $\varepsilon > 0$ малий параметр, $a_1, a_2 > 0$, $|b| < 2\sqrt{a_1 a_2}$. Неперервні нелінійні функції $f_i : R^2 \to R$, $i = 1, 2$, задовольняють таку умову:

$$\exists C > 0 \ \ \forall u, v \in R \ \left| f_1(u, v) \right| + \left| f_2(u, v) \right| \leqslant C. \tag{13}$$

Відомо [8], що за таких умов для кожних $\varepsilon > 0$, $\varphi_0 \in X$ існує принаймні один розв'язок $\varphi = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in C([0, +\infty), X)$ задачі (12) з $\varphi(0) = \varphi_0$, де $X = L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ — фазовий простір. При цьому єдиність такого розв'язку не гарантується.

Тоді задача (12) породжує сім'ю неперервних відображень

$$K^{\varepsilon} = \{\varphi : [0, +\infty) \to X \,|\, \varphi \text{ розв'язок } (12)\},$$

що задовольняють умови K1, K2.

Для фіксованих $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$, $\mu > 0$ розглядаємо таке імпульсне збурення [5]:

$$M = \left\{ z = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in X \,\middle|\, \alpha(u, \psi_1) + \beta(v, \psi_1) = 1, \ \left| (u, \psi_1) \right| \leqslant \gamma \right\}, \tag{14}$$

$I : M \to P(X)$ — компактнозначне,

для

$$z = \sum_{i=1}^{\infty} \begin{pmatrix} c_i \\ d_i \end{pmatrix} \psi_i \in M \quad Iz \subseteq \left\{ \begin{pmatrix} c_1' \\ d_1' \end{pmatrix} \psi_1 + \sum_{i=2}^{\infty} \begin{pmatrix} c_i \\ d_i \end{pmatrix} \psi_i \,\middle|\, \left| c_1' \right| \leqslant \gamma, \alpha c_1' + \beta d_1' = 1 + \mu \right\}, \tag{15}$$

де $\{\psi_i\}_{i=1}^{\infty}$ — власні функції $-\Delta$ в $H_0^1(\Omega)$.

Теорема. *Для достатньо малих* $\varepsilon > 0$ *імпульсна задача* (12), (14), (15) *породжує імпульсну МДС* $G_\varepsilon : R_+ \times X \to P(X)$, *яка має глобальний атрактор* Θ_ε *і*

$$\operatorname{dist}(\Theta_\varepsilon, \Theta) \to 0, \ \varepsilon \to 0, \tag{16}$$

де Θ — *глобальний атрактор імпульсної системи* (12), (14), (15) *при* $\varepsilon = 0$.

Крім того, якщо $I : M \to P(X)$ *напівнеперервне зверху, то*

$$\forall t \geqslant 0 \ \ G_\varepsilon(t, \Theta_\varepsilon \setminus M) = \Theta_\varepsilon \setminus M. \tag{17}$$

ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Самойленко А.М., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. Киев: Вища шк., 1987. 287 с.
2. Мельник В.С. Многозначная динамика нелинейных бесконечномерных систем. Киев: Ин-т кибернетики им. В.М. Глушкова НАН України, 1994. 41 с. (Препринт. НАН Украины, Ин-т киберн.; 94-17).
3. Perestyuk M.O., Kapustyan O.V. Long-time behaviour of evolution inclusion with non-damped impulsive effects. *Mem. Differential Equations Math. Phys.* 2012. **56**. P. 89—113.
4. Bonotto E.M., Demuner D.P. Attractors of impulsive dissipative semidynamical systems. *Bull. Sci. Math.* 2013. **137**. P. 617—642.
5. Капустян О.В., Перестюк М.О. Існування глобальних атракторів для імпульсних динамічних систем. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2015. № 12. С. 13—18. doi: https://doi.org/10.15407/dopovidi2015.12.013.
6. Aubin J.-P., Frankowska H. Set-Valued Analisys. Boston: Birkhäuser, 1990. 461 p.

7. Романюк І. Глобальний атрактор для однієї многозначної імпульсної динамічної системи. *Вісн. Київ. нац. ун-ту ім. Тараса Шевченка. Математика. Механіка*. 2016. Вип. 35. С. 14—19.
8. Chepyzhov V.V., Vishik M.I. Attractors for equations of mathematical physics. Providence, RI: AMS, 2002. 324 p.

Надійшло до редакції 17.01.2017

REFERENCES

1. Samoilenko, A. M. & Perestyuk, N. A. (1987). Differential equations with impulsive influence. Kiev: Vyshcha Shkola (in Russian).
2. Melnik, V. S. (1994). Multi-valued nonlinear dynamics of infinite-dimensional systems. Prepr. NAS of Ukraine, V.M. Glushkov Institute of Cybernetics, No. 94-17. Kiev (in Russian).
3. Perestyuk, M. O. & Kapustyan, O. V. (2012). Long-time behaviour of evolution inclusion with non-damped impulsive effects. Mem. Differential Equations Math. Phys., 56, pp. 89-113.
4. Bonotto, E. M. & Demuner, D. P. (2013). Attractors of impulsive dissipative semidynamical systems. Bull. Sci. Math. 137, pp. 617-642. doi: https://doi.org/10.1016/j.bulsci.2012.12.005
5. Kapustyan, O. V. & Perestyuk, M. O. (2015). Existence of global attractors for impulsive dynamical systems. Dopov. Nac. akad. nauk Ukr., No. 12, pp. 13-18 (in Ukrainian). doi: https://doi.org/10.15407/dopovidi2015.12.013
6. Aubin, J.-P. & Frankowska, H. (1990). Set-Valued Analisys. Boston: Birkhäuser.
7. Romaniuk, I. (2016). Global attractor for a multiform impulsive dynamic system. Bull. Taras Shevchenko Nat. Univ. of Kyiv, Ser. Math. Mech., Iss. 35, pp. 14-19 (in Ukrainian).
8. Chepyzhov, V. V. & Vishik, M. I. (2002). Attractors for equations of mathematical physics. Providence, RI: AMS.

Received 17.01.2017

Н.А. Перестюк, А.В. Капустян, И.В. Романюк

Киевский национальный университет им. Тараса Шевченко
E-mail: pmo@univ.kiev.ua, kapustyanav@gmail.com, romanjuk.iv@gmail.com

ГЛОБАЛЬНЫЙ АТТРАКТОР
ИМПУЛЬСНОЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Исследовано существование глобальных аттракторов для импульсных многозначных динамических систем, траектории которых имеют бесконечное количество импульсных возмущений. Полученные результаты применены к параболической слабонелинейной импульсно-возмущенной системе без единственности решения задачи Коши.

Ключевые слова: *импульсная многозначная динамическая система, глобальный аттрактор, импульсное возмущение, параболическая система.*

M.O. Perestyuk, O.V. Kapustyan, I.V. Romaniuk

Taras Shevchenko National University of Kiev
E-mail: pmo@univ.kiev.ua, kapustyanav@gmail.com, romanjuk.iv@gmail.com

GLOBAL ATTRACTOR
OF AN IMPULSIVE PARABOLIC SYSTEM

We study the existence of global attractors for impulsive multivalued dynamical systems, which have trajectories with infinite number of impulsive perturbations. The results are applied to a weakly nonlinear parabolic impulsive system.

Keywords: *impulsive multivalued dynamical system, global attractor, impulsive perturbation, parabolic system.*