

В.Н. Сыровацкий

Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина

E-mail: vsirovatsky@gmail.com

О функциональных моделях коммутативных систем операторов в пространствах де Бранжа

Представлено академиком НАН Украины Е.Я. Хрусловым

Для коммутативной системы линейных ограниченных операторов T_1, T_2 , которые действуют в гильбертовом пространстве H и ни один из которых не является сжатием, получена функциональная модель в пространстве де Бранжа для круга.

Ключевые слова: функциональная модель, коммутативная система операторов.

В работе [1] построена функциональная модель пары коммутативных операторов, когда один из них является сжатием. Эти построения основаны на технике преобразований Фурье. Если же ни один из операторов $\{T_1, T_2\}$ не является сжатием, данный метод не применим. В работах [2, 3] построены функциональные модели для коммутативных систем операторов $\{T_1, T_2\}$, причём ни T_1 , ни T_2 не являются сжимающими. В этом случае функциональная модель строится в пространстве де Бранжа, отвечающем единичному кругу, которое было получено в работе [4]. В данной работе построены функциональные модели при определённых ограничениях на основные операторы этой модели.

I. Рассмотрим линейный ограниченный оператор T , действующий в гильбертовом пространстве H . Совокупность

$$\Delta = \left(J; \ H \oplus E; \ V = \begin{bmatrix} T & \Phi \\ \Psi & K \end{bmatrix}; \ H \oplus \tilde{E}; \ \tilde{J} \right) \quad (1)$$

называется унитарным узлом [5–6], если линейный оператор

$$V = \begin{bmatrix} T & \Phi \\ \Psi & K \end{bmatrix}: H \oplus E \mapsto H \oplus \tilde{E} \quad (2)$$

удовлетворяет соотношениям

$$V^* \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \tilde{J} \end{bmatrix} V = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix}, \quad V \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix} V^* = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \tilde{J} \end{bmatrix}, \quad (3)$$

где J и $\tilde{J}$ — инволюции в гильбертовых пространствах E и $\tilde{E}$ соответственно, $J = J^* = J^{-1}$, $\tilde{J} = \tilde{J}^* = \tilde{J}^{-1}$.

Основным инвариантом узла Δ (1), описывающим простые узлы, является введенная М.С. Лившицем [5] характеристическая оператор-функция

$$S_{\Delta} = K + \Psi(zI - T)^{-1}\Phi. \quad (4)$$

Предположим, что

$$\dim E = \dim \tilde{E} = 2, \quad J = \tilde{J} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Используя представление В.П.Потапова для $S_{\Delta}(z)$, нетрудно построить [6] треугольную модель оператора T . Обозначим через $L_{2,l}^2(F_x)$ гильбертово пространство вектор-функций [7]:

$$L_{2,l}^2(F_x) = \left\{ f(x) = (f_1(x), f_2(x)); \int_0^l f(x) dF_x f^*(x) < \infty \right\}. \quad (6)$$

Зададим в $L_{2,l}^2(F_x)$ (7) линейный оператор T :

$$Tf(x) = f(x)e^{i\varphi_x} - 2 \int_x^l f(t) dF_t \Phi_t^* \Phi_x^{*-1} J e^{i\varphi_x}, \quad (7)$$

где матрица Φ_x является решением интегрального уравнения

$$\Phi_x + \int_0^x \Phi_t dF_t J = I, \quad x \in [0, l]. \quad (8)$$

Рассмотрим также матрицу-функцию Ψ_x :

$$\Psi_x + \int_x^l \Psi_t dF_t J = J, \quad x \in [0, l]. \quad (9)$$

Определим операторы $\Phi: E \mapsto L_{2,l}^2(F_x)$ и $\Psi: L_{2,l}^2(F_x) \mapsto E$ ($E = \mathbb{C}^2$):

$$\Phi f(x) = \sqrt{2} f \Psi_x e^{i\varphi_x}, \quad \Psi f(x) = \sqrt{2} \int_0^l f(x) dF_x \Phi_x^*, \quad (10)$$

где $f \in E$. И пусть $K = S_{\Delta}(\infty)$ (6). Совокупность

$$\Delta_c = \left(J; L_{2,l}^2(F_x) \oplus E; V = \begin{bmatrix} T & \Phi \\ \Psi & K \end{bmatrix}; L_{2,l}^2(F_x) \oplus E; J \right) \quad (11)$$

является унитарным узлом (1)–(3) и называется треугольной моделью [7] простого узла Δ (1), где $L_{2,l}^2(F_x)$, T , Φ , Ψ имеют вид (6), (7), (10).

Следуя работе [4], введём вектор-функции

$$L_x(z) = (1 - zT)^{-1}\Phi(1, 1), \quad (12)$$

$$\tilde{L}_x(z) = (1 - zT^*)^{-1}\Psi^*(1, -1). \quad (13)$$

Определение. Гильбертовым пространством де Бранжа $\mathcal{B}(E, G)$ назовём пространство, которое образуют вектор-функции $F(z) = [F_1(z), F_2(z)]$, где $F_k(z)$ ($k = 1, 2$) имеют вид

$$F_1(z) = \int_0^l f(t) dF_t L_t^*(\bar{z}), \quad F_2(z) = \int_0^l f(t) dF_t \tilde{L}_t^*(\bar{z}). \quad (14)$$

И пусть $\mathcal{B}_\Phi$ — отображение де Бранжа:

$$\mathcal{B}_\Phi f = [F_1(z), F_2(z)]. \quad (15)$$

Скалярное произведение в $\mathcal{B}(E, G)$ индуцируется прообразом $\mathcal{B}_\Phi$:

$$\langle F(z), \hat{F}(z) \rangle_{\mathcal{B}_\Phi(E, G)} = \langle f(t), \hat{f}(t) \rangle_{L^2_{2,l}(F_t)}, \quad (16)$$

причём $F(z) = \mathcal{B}_\Phi f(t)$, $\hat{F}(z) = \mathcal{B}_\Phi \hat{f}(t)$, где $f(t), \hat{f}(t) \in L^2_{2,l}(F_t)$.

Функции $E_x(z), \tilde{E}_x(z), G_x(z), \tilde{G}_x(z)$ задаются соотношениями [4]

$$L_x(z) = (e^{-i\Phi_x} - z)^{-1} [E_x(z); \tilde{E}_x(z)], \quad (17)$$

$$\tilde{L}_x(z) = (1 - ze^{-i\Phi_x})^{-1} [G_x(z); \tilde{G}_x(z)]. \quad (18)$$

II. Пусть T_1, T_2 — коммутативная система линейных ограниченных операторов, действующая в гильбертовом пространстве H . Совокупность гильбертовых пространств $E, \tilde{E}$ и операторов $\Phi \in [E, H]$; $\Psi \in [H, \tilde{E}]$; $K \in [E, \tilde{E}]$; $\sigma_s, \tau_s, N_s, \Gamma \in [E, E]$; $\tilde{\sigma}_s, \tilde{\tau}_s, \tilde{N}_s, \tilde{\Gamma} \in [\tilde{E}, \tilde{E}]$ ($s = 1, 2$) назовём коммутативным унитарным метрическим узлом Δ [7]:

$$\Delta = (\Gamma, \sigma_s, \tau_s, N_s, H \oplus E, V_s, V_s^+, H \oplus \tilde{E}, \tilde{N}_s, \tilde{\tau}_s, \tilde{\sigma}_s, \tilde{\Gamma}), \quad (19)$$

если для расширений $V_s = \begin{bmatrix} T_s & \Phi N_s \\ \Psi & K \end{bmatrix}$, $V_s^+ = \begin{bmatrix} T_s^* & \Psi \tilde{N}_s^* \\ \Phi^* & K^* \end{bmatrix}$ справедливы следующие соотношения:

$$1) V_s^* \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \tilde{\sigma}_s \end{bmatrix} V_s = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \tau_s \end{bmatrix}, V_s^* \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \sigma_s \end{bmatrix} V_s = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \tilde{\tau}_s \end{bmatrix};$$

$$2) T_2 \Phi N_1 - T_1 \Phi N_2 = \Phi \Gamma, \quad \tilde{N}_1 \Psi T_2 - \tilde{N}_2 \Psi T_1 = \tilde{\Gamma} \Psi;$$

$$3) \tilde{N}_2 \Psi \Phi N_1 - \tilde{N}_1 \Psi \Phi N_2 = K \Gamma - \tilde{\Gamma} K, \quad K N_s = \tilde{N}_s K \quad (s = 1, 2),$$

где $\sigma_s, \tau_s, (\tilde{\sigma}_s, \tilde{\tau}_s)$ самосопряжены в $E(\tilde{E})$ ($s = 1, 2$).

Произвольная коммутативная система линейных ограниченных операторов T_1, T_2 всегда может быть включена в узел Δ (19) [5]. В случае обратимости «дефектных» операторов σ_1 и $\tilde{\sigma}_1$ в E и $\tilde{E}$ всегда можно считать, что N_1 и $\tilde{N}_1$ обратимы. Рассмотрим $N, \tilde{N}, \Gamma, \tilde{\Gamma}$

$$N = N_1^{-1} N_2, \quad \Gamma = N_1^{-1} \Gamma_1, \quad \tilde{N} = \tilde{N}_1^{-1} \tilde{N}_2, \quad \tilde{\Gamma} = \tilde{N}_1^{-1} \tilde{\Gamma}_1, \quad (20)$$

и пусть $dF_t = a_t t$, а $N(x)$ и $\Gamma(x)$ являются решениями уравнений

$$N'(x) = -[Ja_x, N(x)], \quad \Gamma'(x) = [Ja_x, \Gamma(x)], \quad [Ja_x, N(x)e^{i\Phi_x} + \Gamma(x)] = 0.$$

Зададим в $L^2_{r,l}(F_x)$ (6) линейные операторы T_1 и T_2 :

$$T_1 f(x) = f(x) e^{i\Phi_x} - 2 \int_x^l f(t) dF_t \Phi_t^* \Phi_x^{*-1} J e^{i\Phi_x}, \quad (21)$$

$$T_2 f(x) = f(x) (N(x) e^{i\Phi_x} + \Gamma(x)) - 2 \int_x^l f(t) dF_t \Phi_t^* \Phi_x^{*-1} J N(x) e^{i\Phi_x}. \quad (22)$$

Полученная система операторов T_1, T_2 (21) (22) и есть треугольная модель для коммутативной системы операторов [1].

Теорема. Пусть задан коммутативный узел Δ (19), отвечающий коммутативной системе операторов $\{T_1, T_2\}$ (21), (22), такой, что $E = \tilde{E}$, $\dim E = 2$, а $\sigma_1 = \tilde{\sigma}_1 = J_N$ (5), спектр оператора T_1 сосредоточен в точке $\{1\}$, характеристическая функция $S(z)$ такова, что $(1,1)S(z)(1,1)^T \neq 0$ и вектор-функции $L_x(z)$, $\tilde{L}_x(z)$ и $E_x(z)$, $\tilde{E}_x(z)$, $G_x(z)$, $\tilde{G}_x(z)$ имеют вид (12), (13) и (17), (18). Обозначим функции $n(z) = \bar{a} + \bar{b}z$ и $m(z) = a + bz$, где коэффициенты $a = (1,0)N(1,1)^T$ и $b = (1,0)\Gamma(1,1)^T$, тогда основная система коммутативных операторов $\{T_1, T_2\}$ узла Δ (19) унитарно эквивалентна системе операторов, которая действует в пространстве де Бранжа $\mathcal{B}(E, G)$ следующим образом:

$$T_1 F_1(z) = (z + \overline{\mu(\bar{z})})F_1(z) + v(\bar{z})F_2(z) + \frac{\overline{E_0(\bar{z})} - \tilde{E}_0(\bar{z})}{2}F_2(0), \quad T_1 F_2(z) = \frac{F_2(z) - F_2(0)}{z},$$

$$T_2 F_1(z) = \frac{F_1(z)}{m(z)} + \frac{\tilde{\mu}(z)}{m(z)}F_1(z) + \frac{\tilde{v}(z)}{m(z)}F_2(z), \quad T_2 F_2(z) = \frac{F_2(z)n(z) - F_2(0)n(0)}{z},$$

где $(F_1(z), F_2(z)) \in \mathcal{B}(E, G)$. Коэффициенты $\mu(z)$ и $v(z)$ имеют вид

$$v(z) = \frac{c_2(z)c_3(z) - c_1(z)c_4(z)}{c_2(z) - c_4(z)}, \quad \mu(z) = \frac{c_1(z) - c_3(z)}{c_2(z) - c_4(z)},$$

$$c_1(z) = \frac{(E_0(z) + \tilde{E}_0(z))(1 - z^2)}{2(E_0(z)\overline{E_0(\bar{z})} - \tilde{E}_0(z)\overline{\tilde{E}_0(\bar{z})})} \int_0^l \Psi_t^*(1,1) dF_t L_t^*(\bar{z}),$$

$$c_2(z) = \frac{(G_l(z) + \tilde{G}_l(z))(1 - z^2)}{2(E_0(z)\overline{E_0(\bar{z})} - \tilde{E}_0(z)\overline{\tilde{E}_0(\bar{z})})}, \quad c_3(z) = \frac{E_0(z) + \tilde{E}_0(z)}{E_0'(z) - \tilde{E}_0'(z)} \int_0^l \Psi_t^*(1,1) dF_t \tilde{L}_t^*(\bar{z}),$$

$$c_4(z) = \frac{2(G_l(z)\overline{G_l(\bar{z})} - \tilde{G}_l(z)\overline{\tilde{G}_l(\bar{z})})}{(E_0'(z) - \tilde{E}_0'(z))(1 - z^2)},$$

а коэффициенты $\tilde{\mu}(z)$ и $\tilde{v}(z)$ —

$$\tilde{\mu}(z) = \frac{I_1(z)d_3(z) - I_2(z)d_1(z)}{d_2(z)d_3(z) - d_1(z)d_4(z)}, \quad \tilde{v}(z) = \frac{I_1(z)d_4(z) - I_2(z)d_2(z)}{d_1(z)d_4(z) - d_2(z)d_3(z)},$$

$$I_1(z) = \frac{1}{2z}(1,1)\sqrt{2}S\left(\frac{1}{z}\right)\tilde{\sigma}_2\left(\Phi_l\left(\frac{1}{z}\right) - J(\overline{E_0(\bar{z})}, \overline{\tilde{E}_0(\bar{z})})\right),$$

$$I_2(z) = \frac{1}{2z}(1,1)\sqrt{2}S\left(\frac{1}{z}\right)\tilde{\sigma}_2\left(\Phi_l J\left(\frac{\overline{G_l(\bar{z})}}{\tilde{G}_l(\bar{z})}\right) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right),$$

$$d_1(z) = \frac{E_0(z)\overline{E_0(\bar{z})} - \tilde{E}_0(z)\overline{\tilde{E}_0(\bar{z})}}{1 - |z|^2}, \quad d_2(z) = \frac{G_l'(z) + \tilde{G}_l'(z)}{2},$$

$$d_3(z) = \frac{E_0'(z) - \tilde{E}_0'(z)}{2}, \quad d_4(z) = \frac{G_l(z)\overline{G_l(\bar{z})} - \tilde{G}_l(z)\overline{\tilde{G}_l(\bar{z})}}{1 - |z|^2}.$$

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Zolotarev V.A. Functional model of commutative operator systems. *J. Math. Physics, Analysis, Geometry*. 2008. **4**, No 3. P. 420–440.
2. Сыровацкий В.Н. Функциональные модели коммутативных систем операторов близких к унитарным. *Вісн. Харк. нац. ун-ту. Сер. Математика, приклад. математика і механіка*. 2012. № 1018. С. 41–61.
3. Syrovatskyi V.N. Functional Models in de Branges Spaces of One Class Commutative Operators. *J. Math. Physics, Analysis, Geometry*. 2014. **10**, No 4. P. 430–450.
4. Золотарёв В.А., Сыровацкий В.Н. Преобразование де Бранжа относительно круга. *Вісн. Харк. нац. ун-ту. Сер. Математика, приклад. математика і механіка*. 2005. № 711, вып. 55. С. 80–92.
5. Лившиц М.С., Янцевич А.А. Теория операторных узлов в гильбертовых пространствах. Харьков: Изд-во. Харьк. ун-та, 1971. 160 с.
6. Золотарёв В.А. Аналитические методы спектральных представлений несамосопряжённых и неунитарных операторов. Харьков: Изд-во. Харьк. ун-та, 2003. 342 с.
7. Золотарёв В.А. Модельные представления коммутативных систем линейных операторов. *Функц. анализ и его прил.* 1988. **22**, вып. 1. С. 66–68.

Поступило в редакцию 05.10.2016

REFERENCES

1. Zolotarev, V. A. (2008). Functional model of commutative operator systems. *J. Math. Physics, Analysis, Geometry*, **4**, No 3, pp. 420-440.
2. Sirovatsky, V. N. (2012). Functional models for commutative systems of operators close to a unitary one. *Kharkov University Bulletin*, No 1018, pp. 41-61 (in Russian).
3. Syrovatskyi, V. N. (2014). Functional Models in De Branges Spaces of One Class Commutative Operators. *J. Math. Physics, Analysis, Geometry*, **10**, No 4, pp. 430-450.
4. Zolotarev, V. A., Sirovatsky, V. N. (2005). Transformation de Branges on the terms. *Kharkov University Bulletin*, No 711, Iss. 55, pp. 80-92 (in Russian).
5. Livshits, M. S., Yantsevich, A. A. (1971). A theory of operator knots in Hilbert spaces. *Kharkov: Izd-vo Kharkov. un-ta* (in Russian).
6. Zolotarev, V. A. (2003). Analytical methods of spectral presentations of not self-conjugate and nonunitary operators. *Kharkov: Izd-vo Kharkov. un-ta* (in Russian).
7. Zolotarev, V. A. (1988). Model representations of commutative systems of linear operators. *Functional Analysis and Its Applications*, **22**, Iss. 1, pp. 55-57.

Received 05.10.2016

В.М. Сыровацкий

Харківський національний університет ім. В.Н. Каразіна

E-mail: vsirovatsky@gmail.com

ПРО ФУНКЦІОНАЛЬНІ МОДЕЛІ КОМУТАТИВНИХ СИСТЕМ
ОПЕРАТОРІВ У ПРОСТОРАХ ДЕ БРАНЖА

Для комутативної системи лінійних обмежених операторів T_1, T_2 , які діють у гільбертовому просторі H і жоден з операторів не є стисненням, отримано функціональну модель у просторі де Бранжа для круга.

Ключові слова: функціональна модель, комутативна система операторів.

V.N. Syrovatskyi

V. N. Karazin Kharkiv National University

E-mail: vsirovatsky@gmail.com

ABOUT FUNCTIONAL MODELS OF COMMUTATIVE SYSTEMS
OF OPERATORS IN THE SPACES OF DE BRANGES

For the commutative system of linear bounded operators T_1, T_2 which act in a Hilbert space H and are such that none of them is a compression, a functional model is built in the space of de Branges for a circle.

Keywords: functional model, commutative system of operators.