ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

https://doi.org/10.15407/dopovidi2023.04.020
УДК 517.972.64.001.57

Ю.М. Мацевитий[1]
Ю.О.Тимошенко[2], https://orcid.org/0000-0001-7812-6437

[1] Інститут проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України, Харків
[2] Навчально-науковий комплекс «Інститут прикладного системного аналізу» Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут ім. Ігоря Сікорського», Київ
Email: matsevit@ipmach.kharkov.ua, yu.a.tym@ukr.net

Динамічний метод другого порядку одержання наближених розв'язків багатовимірних обернених задач теплопровідності

Представлено академіком НАН України Ю.М. Мацевитим

Розглянуто постановку оберненої задачі нестаціонарної теплопровідності в загальній формі. Показано, що подібні постановки відносяться до класу некоректно поставлених задач. Запропоновано динамічний метод регуляризації першого та другого порядку таких некоректних задач. Доведено, що динамічний метод регуляризації другого порядку дозволяє отримувати наближений розв'язок за наявності збурень у вхідних даних.

***Ключеві слова**: обернені задачі теплопровідності, некоректні задачі, динамічний метод регуляризації.*

Розглянемо метод розв'язання лінійних обернених задач нестаціонарної теплопровідності (ОЗТ) на прикладі деякої динамічної системи, стан якої характеризується елементом $T(x,t)$ з деякого простору станів $T \in R$ на заданому відрізку часу $0 \leqslant t \leqslant K$, де K — скінченне число.

Нехай $Q = V \times [0, K]$, де V — задана l-вимірна область з набором координат $x = \{x_1, x_2, ..., x_l\}$, $l = 1$, 2 або 3, та границею S. В області Q задано рівняння параболічного типу:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = L(t)T + f(x,t), \quad (1)$$

Цитування: Мацевитий Ю.М., Тимошенко Ю.О. Динамічний метод другого порядку одержання наближених розв'язків багатовимірних обернених задач теплопровідності. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2023. № 4. С. 20—25. https://doi.org/10.15407/dopovidi2023.04.020

де

$$L(t)T = div(kgradT) = \sum_{i=1}^{l} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(k(x,t)\frac{\partial T}{\partial x_i} \right) \tag{2}$$

з початковою умовою

$$T(x,0) = T_0(x)\,,\ x \in V \cup S \tag{3}$$

та граничною умовою, наприклад, умовою Неймана:

$$k\frac{\partial T}{\partial n} = p(x,t)\,,\ (x,t) \in \Gamma\,, \tag{4}$$

де $\frac{\partial T}{\partial n}$ — похідна за нормаллю до S, $\Gamma = S \times [0, K]$.

На основі принципу суперпозиції розв'язок задачі (1)—(4) можна записати у вигляді інтегрального рівняння:

$$T(x,t) = \int_V G(x,t,\xi,0)T_0(\xi)d\xi + \int_0^t d\tau \int_V G(x,t,\xi,\tau)f(\xi,\tau)d\xi + $$
$$+\int_0^t d\tau \int_S G_S(x,t,\omega,\tau)p(\omega,\tau)d\omega\,,\ t > \tau\,, \tag{5}$$

де G, G_S — функції Гріна для задачі (1)—(4).

Перша складова виразу (5) визначає внесок початкових умов у розв'язок в момент часу t, друга — визначається функцією розподіленого управління, а третя — характеризує вплив граничних умов $p(x,t)$. У разі розгляду теплового поля функція Гріна $G(x,t,\xi,\tau)$ визначається як температура в точці x в момент часу t, яка виникає внаслідок дії миттєвого джерела одиничної сили, розміщеного в точці ξ в момент часу τ. Представимо (5) у такому вигляді:

$$u(x,t) = \int_0^t d\tau \int_V G(x,t,\xi,\tau)f(\xi,\tau)d\xi\,, \tag{6}$$

де

$$u(x,t) = T(x,t) - \int_V G(x,t,\xi,0)T_0(\xi)d\xi - \int_0^t d\tau \int_S G_S(x,t,\omega,\tau)p(\omega,\tau)d\omega\,.$$

Для визначеності будемо вважати, що функція $p(x,t)$ є заданою, а функція розподіленого управління $f(x,t)$ є невідомою для даної постановки задачі. Тоді функція $u(x,t)$ не пов'язана із управлінням і однозначно визначається початковим розподілом $T_0(x)$, відомими граничними умовами $p(x,t)$ та заданим законом руху системи $T(x,t)$. Далі будемо розглядати випадок точкового управління $f(x,t)$ та вважати, що простір спостережень збігається з простором станів R. Тоді вираз (6) набуває вигляду:

$$\sum_{j=1}^{n} \int_0^t G(x^i,t,\xi^j,\tau)f(\xi^j,\tau)d\tau = u(x^i,t)\,, \tag{7}$$

де x^i — точки області V, в яких вимірюється температура в момент часу t, $i=1,...,m$, ξ^j — точки області V, в яких діють управляючі джерела $f(x,t)$ в момент часу τ, $j=1,...,n$.

Позначимо

$$z=[f(\xi^1,\tau), f(\xi^2,\tau), ..., f(\xi^n,\tau)],$$

$$u=[u(x^1,t), u(x^2,t), ..., u(x^m,t)],$$

що приводить вираз (7) в операторну форму:

$$Az=u, \; u\in U, \; z\in F, \tag{8}$$

де $u\in U$, $z\in F$, U, F — метричні простори; $A:U\to F$ — лінійний цілком неперервний оператор, що породжений постановкою задачі (1)—(4).

У такій постановці задача (8) є ОЗТ і відноситься до класу некоректно поставлених, оскільки її розв'язок або зовсім відсутній, або є нестійким до малих збурень вхідних даних [1].

Оскільки права частина u та оператор A на практиці відомі наближено, доводиться розв'язувати замість (8) деяке інше рівняння вигляду

$$\tilde{A}z^*=\tilde{u}, \tag{9}$$

де $\tilde{A}$ і $\tilde{u}$ — деякі наближення до оператора A та правої частини u. Ступінь близькості даних оцінюється за допомогою норм $\left\|A-\tilde{A}\right\|\leqslant\alpha$ та $\left\|u-\tilde{u}\right\|\leqslant\beta$, $0<\alpha<\infty$, $0<\beta<\infty$.

Відомі різні методи регуляризації розв'язання некоректних задач, які дозволяють отримати наближений стійкий розв'язок рівняння (8) [1—5].

У даній роботі розглядається динамічний метод регуляризації першого порядку розв'язання рівняння (8), вперше запропонований в роботі [6]. Відповідно до цього методу наближений розв'язок рівняння (8) знаходиться через розв'язання задачі Коші:

$$\frac{dz^*(\theta)}{d\theta}+\tilde{A}^*\tilde{A}z^*(\theta)=\tilde{A}^*\tilde{u}, \; z^*(\theta)\Big|_{\theta=0}=z_0, \tag{10}$$

де $\tilde{A}^*$ — оператор, спряжений до $\tilde{A}$.

За наближений розв'язок некоректної задачі (8) приймається вектор $z^*=z^*(\theta^*)$, де θ^* визначається залежно від рівня похибки вхідних даних α та β із додаткової умови вигляду

$$H[\alpha,\beta,z^*(\theta^*)]\leqslant e_H, \tag{11}$$

де H — деякий функціонал; а e_H — заданий рівень допустимих значень функціонала H.

Перевага цього підходу, яким є динамічний метод розв'язання некоректних задач, полягає у можливості побудови замкнених систем автоматичного пошуку розв'язків багатовимірних обернених задач теплопровідності аналоговими, цифровими та гібридними електронними обчислювальними машинами [3, 5].

ISSN 1025-6415. Dopov. Nac. akad. nauk Ukr. 2023. No 4

Для зменшення часу перехідного процесу пошуку наближеного розв'язку рівняння (8) у даній роботі пропонується розв'язувати замість (10) наступну задачу Коші:

$$\xi_1 \frac{d^2 z^*(\theta)}{d\theta^2} + \xi_2 \frac{dz^*(\theta)}{d\theta} + \tilde{A}^* \tilde{A} z^*(\theta) = \tilde{A}^* \tilde{u}\,; \quad z^*(\theta)\Big|_{\theta=0} = z_0\,, \; \frac{dz^*(\theta)}{d\theta}\Bigg|_{\theta=0} = z_1\,, \tag{12}$$

де $\xi_1 > 0$, $\xi_2 > 0$.

За наближений розв'язок некоректної задачі (8) динамічним методом другого порядку приймається вектор $z^* = z^*(\theta^*)$, який є розв'язком задачі (12), де значення θ^* визначається за умовою (11).

Ідея використання похідних більш високого ступеню в задачах науки і техніки продуктивно застосовувалася різними авторами і раніше [3, 5]. Зокрема, штучна гіперболізація рівняння теплопровідності з введенням додаткового члену $\frac{\varepsilon}{a}\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}$ у ліву частину рівняння (1) виявила свою ефективність і дозволила стабілізувати приблизний розв'язок ОЗТ в певних межах [3]. Відмінність даної пропозиції полягає у тому, що вхідна постановка задачі (1)—(4) залишається незмінною, а трансформації підлягає саме диференційне рівняння динамічного методу першого порядку (10). Рівняння (12) відповідає надалі динамічному методу другого порядку.

Аналогічно роботі [6] у подальшому будемо вважати, що $\tilde{A}$ є матрицею розмірності ($m \times n$). Нехай z_{H} — нормальний розв'язок задачі (8). Позначимо вектор $z = z(\theta)$, як результат розв'язання динамічним методом задачі (8) у випадку точного завдання вхідних даних.

Вважаючи надалі у (12) $z_0 = z_1 = 0$, можна показати, що перехід від задачі (8) до задачі (12) дозволяє при точному завданні вхідних даних отримати нормальний розв'язок задачі (8):

$$\lim_{\theta \to \infty} z^*(\theta) = z_H\,.$$

Покажемо, що за наявності збурень у вхідних даних задачі розв'язок $z^* = z^*(\theta^*)$ є наближенням до нормального розв'язку рівняння (8). Нехай для системи (12) вимога (11) виконується при $\theta = \tau$, а для задачі виду (12) у випадку точного завдання вхідних даних — відповідно при $\theta = \gamma$. Під $\|\cdot\|$ тут і далі розуміється евклідова норма вектора та підпорядкована їй спектральна норма матриці $\|A\| = \lambda_{\max}$ і $\|\tilde{A}\| = \lambda^*_{\max}$, де $\lambda_{\max}$ і $\lambda^*_{\max}$ — максимальні власні числа матриць A та $\tilde{A}$, а $\lambda_{\min}$ і $\lambda^*_{\min}$ є мінімальними власними числами матриць A та $\tilde{A}$.

Введемо позначення $\psi = \sqrt{\xi_2{}^2 - 4\xi_1\lambda_{\min}}$ і $\psi^* = \sqrt{\xi_2{}^2 - 4\xi_1\lambda^*_{\min}}$ та розглянемо норму різниці розв'язків динамічним методом другого порядку систем (8) і (9).

Справедлива така нерівність:

$$\left\| z(\gamma) - z^*(\tau) \right\| \leqslant \left\| z(\gamma) - z_i \right\| + \left\| z_i - z(\tau) \right\| + \left\| z(\tau) - z^*(\tau) \right\|. \tag{13}$$

З (13) випливає наступна лема.

Лема. *Має місце оцінка*:

$$\left\|z(\gamma)-z^*(\tau)\right\| \leqslant M_0(\tau)+M_0(\gamma)+(\beta+\|u\|)\sqrt{{\xi_2}^2-4\xi_1{\lambda^*}_{\max}}\,\frac{2\xi_1}{\xi_2+\psi^*}\left[e^{\frac{\xi_2+\psi^*}{2\xi_1}\tau}-1\right]+$$

$$+\|u\|\sqrt{{\xi_2}^2-4\xi_1\lambda_{\max}}\,\frac{2\xi_1}{\xi_2+\psi}\left[e^{\frac{\xi_2+\psi}{2\xi_1}\tau}-1\right],$$

де $\lim\limits_{t\to\infty} M_0(t)=0$.

Наслідок. *Справедлива рівність*:

$$\lim_{\alpha,\,\beta\to 0}\left\|z(\gamma)-z^*(\tau)\right\|=0$$

за умови $\xi_2=\sqrt{4\xi_1({\lambda^*}_{\max}+\alpha)}$.

Наслідком наведеної леми є така теорема.

Теорема. *Для будь-якого* $\varepsilon>0$ *існує* $\alpha_0=\alpha_0(\varepsilon), \beta_0=\beta_0(\varepsilon)$ *та* ${\xi_2}^0={\xi_2}^0(\varepsilon)$ *такі, що із нерівностей* $0\leqslant\alpha\leqslant\alpha_0$, $0\leqslant\beta\leqslant\beta_0$ *та* $0\leqslant\xi_2=\sqrt{4\xi_1({\lambda^*}_{\max}+\alpha)}\leqslant{\xi_2}^0=\sqrt{4\xi_1({\lambda^*}_{\max}+\alpha_0)}$ *слідує нерівність* $\left\|z(\gamma)-z^*(\tau)\right\|\leqslant\varepsilon$, *де* $\gamma=\gamma(\alpha,\beta)$ *і* $\tau=\tau(\alpha,\beta)$.

Інакше кажучи, завжди можна вказати такі числа α_0 та β_0, при яких вектор z^* буде відрізнятись від нормального розв'язку задачі (8) z_{i} на довільно задане число ε.

Даний підхід застосовувався авторами для наближеного розв'язання низки практично важливих некоректних задач, зокрема, багатовимірних обернених задач теплопровідності [3, 6].

ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. Москва: Наука, 1979. 288 с.
2. Мацевитый Ю.М. О регуляризации загрублением и повышении её точности при решении обратных задач теплопроводности. *Докл. Акад. наук УССР. Сер. А*. 1986. № 5.
3. Мацевитый Ю.М. Обратные задачи теплопроводности: в 2-х т. Т. 1. Методология. Київ: Наук. думка, 2002. 408 с.
4. Алифанов О.М., Артюхин Е.А., Румянцев С.В. Экстремальные методы решения некорректных задач. Москва: Наука, 1988. 288 с.
5. Алифанов О.М. Обратные задачи теплообмена. Москва: Машиностроение, 1988. 280 с.
6. Гутенмахер Л.И., Тимошенко Ю.А., Тихончук С.Т. О динамическом методе решения некорректных задач. *Докл. АН СССР*. 1977. **237**, № 4. С. 776—778.

Надійшло до редакції 22.03.2023

REFERENCES

1. Tikhonov, A. N. & Arsenin, V. Ya. (1979). Methods for solving ill-posed problems. Moscow: Nauka (in Russian).
2. Matsevity, Yu. M. (1986). On regularization by coarsening and increasing its accuracy in solving inverse problems of heat conduction. Dopov. Acad. nauk USSR, No. 5, pp. 486-488 (in Russian).
3. Matsevity, Yu. M. (2002). Inverse problems of heat conduction. Vol. 1. Methodology. Kyiv: Naukova Dumka (in Russian).

4. Alifanov, O. M., Artyukhin, E. A., & Rumyantsev, S. V. (1988). Extremal methods for solving non-correct problems. Moscow: Nauka (in Russian).
5. Alifanov, O. M. (1988). Inverse problems of heat transfer. Moscow: Mashinostroenie (in Russian).
6. Gutenmakher, L. I., Timoshenko, Yu. A. & Tikhonchuk, S. T. (1977). On a dynamic method for solving ill-posed problems. Dokl. AN SSSR. 237, No. 4, pp. 776-778 (in Russian).

Received 22.03.2023

Yu.M. Matsevity[1]
Yu.O. Tymoshenko[2], https://orcid.org/0000-0001-7812-6437

[1] A. Pidgorny Institute of Mechanical Engineering Problems of the NAS of Ukraine, Kharkiv

[2] Institute for Applied System Analysis National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute", Kyiv

Email: matsevit@ipmach.kharkov.ua, yu.a.tym@ukr.net

SECOND-ORDER DYNAMIC METHOD FOR OBTAINING APPROXIMATE SOLUTIONS TO MULTIDIMENSIONAL INVERSE HEAT CONDUCTION PROBLEMS

The formulation of the non-stationary thermal conductivity inverse problem is discussed in its general form. It is demonstrated that such formulations belong to the class of ill-posed problems. A dynamic method employing first- and second-order regularization is proposed to address these ill-posed problems. It is proven that the second-order dynamic regularization method enables the derivation of approximate solutions even in the presence of disturbances in the input data.

***Keywords**: inverse heat conduction problems, ill-posted problems, dynamic regularization method.*