

doi: <https://doi.org/10.15407/dopovidi2017.02.024>

УДК 532.528

В.Д. Кубенко, академик НАН України

Институт механики им. С.П.Тимошенко НАН Украины, Киев

E-mail: vdk@inmech.kiev.ua

Нестационарная гидроакустическая задача для жидкости конечной глубины

Строится аналитическое решение плоской задачи о действии нестационарного давления на поверхности плоского слоя жидкости. Формулируется задача линейной акустики. Применяются интегральные преобразования Лапласа и Фурье. Обращение преобразований в случае постоянной области действия нагрузки выполнено при помощи табличных соотношений и соответствующих теорем о свертке, в результате чего удается получить выражение для давления в произвольной точке жидкости в замкнутом виде. Решение записано в виде суммы, m -й член которой представляет m -ю отраженную волну. Удержание в решении определенного конечного числа членов дает точное решение задачи на заданном интервале времени с учетом необходимого числа отражений.

Ключевые слова: нестационарная нагрузка, акустическая волна, слой жидкости.

1. Формулировка задачи. Рассматривается слой однородной изотропной идеальной сжимаемой жидкости глубиной h , такой, что его верхняя граница — свободная поверхность, нижняя — жесткая стенка. На некотором участке свободной поверхности в момент времени $t = 0$ приложено динамическое давление (в общем случае нестационарное), порождающее в теле слоя распространяющуюся акустическую волну давления. Последняя, достигая противоположной границы и взаимодействуя с ней, вызывает отраженную волну, которая, в свою очередь, отражается от свободной границы, и этот процесс многократных отражений создает в слое сложную картину волнового поля.

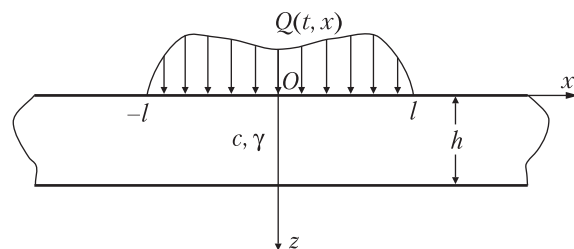


Рис. 1. Схема задачи

Задача состоит в построении подхода, который позволит вычислить характеристики этого поля в любой точке слоя в произвольный момент времени.

Ограничимся рассмотрением плоской задачи и отнесем жидкость к декартовым координатам x, z , так что ось x направлена вдоль свободной границы, ось z — в глубину (рис. 1).

© В.Д. Кубенко, 2017

Нестационарное давление, являющееся в общем случае функцией времени t и координаты x , обозначим через $Q(x, t)$ и предполагаем его симметричным относительно оси z . В рамках данного исследования будем считать, что область приложения нагрузки не меняется со временем. Введем безразмерные обозначения

$$\bar{x} = \frac{x}{R}; \quad \bar{z} = \frac{z}{R}; \quad \bar{l} = \frac{l}{R}; \quad \bar{v} = \frac{v_j}{c}; \quad j, k = x, z; \quad \bar{t} = \frac{ct}{R}; \quad \bar{p} = \frac{p}{P_0}; \quad P_0 = \gamma c^2,$$

черта над которыми ниже будет опущена. Здесь R — некоторый характерный линейный размер; γ — плотность жидкости; c — скорость звука; v_j — компоненты вектора скоростей; p — давление. Поведение жидкости описывается волновым потенциалом Φ , который в случае плоской задачи удовлетворяют волновому уравнению [1]

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

и связан со скоростью и давлением соотношениями

$$v_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x}; \quad v_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z}; \quad p = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}. \quad (2)$$

Граничные условия на свободной поверхности состоят в задании действующего нестационарного давления

$$p|_{z=0} = Q(t, x). \quad (3)$$

Условие на твердом дне формулируется в виде равенства нулю нормальной к поверхности на скорости (условие непроницаемости)

$$v_z|_{z=h} = 0. \quad (4)$$

Начальные условия для покоящейся среды состоят в нулевых условиях для потенциала

$$\Phi|_{t=0} = \frac{\partial \Phi}{\partial t}|_{t=0} = 0. \quad (5)$$

Если волновое уравнение (1) подвергнуть преобразованию Лапласа по времени (с учетом нулевых начальных условий) и преобразованию Фурье по координате x [2] (предполагая, что при $|x| \rightarrow \infty$ потенциалы и их первые производные стремятся к нулю), оно приобретет вид

$$\frac{\partial^2 \Phi^{LF}}{\partial z^2} - (s^2 + \xi^2) \Phi^{LF} = 0. \quad (6)$$

Здесь s — параметр преобразования Лапласа; ξ — параметр преобразования Фурье. Верхние индексы L и F при функциях обозначают, соответственно, изображение данной функции в пространстве преобразований Лапласа и преобразований Фурье:

$$f^L(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt; \quad f(t) = L^{-1}\{f^L(s)\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\lambda-i\infty}^{\lambda+i\infty} e^{pt} f^L(s) ds,$$

$$f^F(\xi) = \int_{-\infty}^\infty f(x) e^{-i\xi x} dx; \quad f(x) = F^{-1}\{f^F(\xi)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty f^F(\xi) e^{i\xi x} d\xi.$$

Условия (3) и (4) в изображениях имеют вид

$$p^{LF} \Big|_{z=0} = Q^{LF}(s, \xi). \quad (7)$$

Таким образом, исходная начально-краевая задача (1)–(5) в пространстве изображений по Лапласу и Фурье трансформируется в граничную задачу (6) и (7) относительно изображения потенциала.

2. Решение в изображениях. Общее решение уравнения (5) записывается в виде

$$\Phi^{LF} = \sum_{n=0}^{\infty} (A(s, \xi)e^{-zP} + B(s, \xi)e^{zP}); \quad P = \sqrt{s^2 + \xi^2}. \quad (8)$$

Неизвестные функции $A(s, \xi)$, $B(s, \xi)$ определяются из условий (7), в результате чего давление, нормальная скорость и потенциал в пространстве изображений приобретают следующий вид:

$$p^{LF} = -s\Phi^{LF} = Q^{LF} \frac{e^{-zP}(1 + e^{-2(h-z)P})}{1 + e^{-2hP}}; \quad v_z = \frac{\partial \Phi^{LF}}{\partial z} = -\frac{1}{s} Q^{LF} P e^{-zP} \frac{1 - e^{-2P(h-z)}}{1 + e^{-2hP}}; \quad (9)$$

$$\Phi^{LF} = -\frac{1}{s} Q^{LF} \frac{e^{-zP}(1 + e^{-2(h-z)P})}{1 + e^{-2hP}}.$$

Используя разложение в степенной ряд вида $(1+x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$, выражения (9) можно представить в виде таких рядов

$$p^{LF} = -Q^{LF}(\xi, s) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n g_n^{LF}(s, \xi, z); \quad v_z^{LF} = -Q^{LF}(\xi, s) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n w_n^{LF}(s, \xi, z);$$

$$\Phi^{LF} = Q^{LF}(\xi, s) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{s} g_n^{LF}(s, \xi, z). \quad (10)$$

Здесь обозначено

$$g_n^{LF}(s, \xi, z) = e^{-z_n P} + e^{-\bar{z}_n P}; \quad w_n^{LF}(s, \xi, z) = \frac{1}{s} P (e^{-z_n P} - e^{-\bar{z}_n P}),$$

$$z_n = 2nh + z; \quad \bar{z}_n = 2(n+1)h - z. \quad (11)$$

3. Обращение интегральных преобразований. Рассмотрим достаточно общий случай. Предположим, что внезапно приложенное давление и его изображения по Лапласу и Фурье имеют вид

$$Q(t, x) = Q_0 H(t) G(x); \quad Q^L(s, \xi) = Q_0 \frac{1}{s} G(x); \quad Q^{LF}(s, \xi) = Q_0 \frac{1}{s} G^F(\xi), \quad (12)$$

где $H(t)$ — единичная функция Хевисайда. Функция $G(x)$ задает характер распределения действующего давления вдоль оси x .

Используя соотношения (10), (11), (12), можно представить выражения для изображения давления, скорости и потенциала в виде, удобном для последующих манипуляций

$$p^{LF} = \sum_{n=0}^{\infty} p_n^{LF}(s, \xi, z), \quad v_z^{LF} = \sum_{n=0}^{\infty} v_{zn}^{LF}(s, \xi, z), \quad \Phi^{LF} = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n^{LF}(s, \xi, z). \quad (13)$$

Здесь введены обозначения

$$p_n^{LF}(s, \xi, z) = (-1)^{n+1} Q_0 G^F(\xi) \tilde{g}_n^{LF}(s, \xi, z), \quad \tilde{g}_n^{LF}(s, \xi, z) = \frac{1}{s} (e^{-z_n P} + e^{-\bar{z}_n P}), \quad (14)$$

$$v_{zn}^{LF} = (-1)^{n+1} Q_0 G^F(\xi) \bar{w}_n^{LF}(s, \xi, z), \quad \bar{w}_n^{LF}(s, \xi, z) = \frac{P}{s^2} (e^{-z_n P} - e^{-\bar{z}_n P}), \quad (15)$$

$$\Phi_n^{LF}(s, \xi, z) = (-1)^n Q_0 G^F(\xi) \frac{1}{s} \tilde{g}_n^{LF}(s, \xi, z). \quad (16)$$

Задача теперь состоит в обращении интегральных преобразований. Сосредоточимся далее на инверсии выражения для давления, имея в виду, что для потенциала и скорости техника обращения аналогична. Если удастся определить оригинал функции $\tilde{g}_n^{LF}(s, \xi, z)$, то есть функцию $\tilde{g}_n(t, x, z)$, то для получения оригинала давления $p_n^{LF}(t, z, x)$, заданного первой строкой в формуле (14), можно применить свертку преобразования Фурье функций $G(x)$ и $\tilde{g}_n(t, x, z)$ [2]. При этом нет необходимости в применении свертки преобразования Лапласа этих функций, так как функция $G(x)$ не зависит от t . Ниже изложена процедура обращения интегральных преобразований в предположении возможности перемены порядка обращения.

Функция $\tilde{g}_n^{LF}(s, \xi, z)$ содержит слагаемые вида $s^{-1} e^{-z_n \sqrt{s^2 + \xi^2}}$ и $s^{-1} e^{-\bar{z}_n \sqrt{s^2 + \xi^2}}$, $n = 0 \div \infty$. Для обращения преобразования Фурье функции $e^{-z_n \sqrt{s^2 + \xi^2}}$ воспользуемся табличным соотношением между изображением и оригиналом [2]

$$F^{-1}(e^{-z_n \sqrt{s^2 + \xi^2}}) = s \frac{z_n}{\sqrt{x^2 + z_n^2}} K_1(s \sqrt{x^2 + z_n^2}). \quad (17)$$

Здесь $K_n(t)$ – модифицированная цилиндрическая функция 3-го рода индекса n [3]. Для обращения преобразования Лапласа функции $K_1(s \sqrt{x^2 + z_n^2})$ применим табличную формулу вида [2]

$$L^{-1}\left(K_1\left(s \sqrt{x^2 + z_n^2}\right)\right) = H\left(t - \sqrt{x^2 + z_n^2}\right) \frac{t}{\sqrt{x^2 + z_n^2} \sqrt{t^2 - (x^2 + z_n^2)}}. \quad (18)$$

Используя (17), (18), получим функцию $\tilde{g}_n(t, x, z)$, изображение которой задано второй строкой в (14), в следующем виде:

$$\tilde{g}_n(t, x, z) = \frac{1}{\pi} \left[H(t - \sqrt{x^2 + z_n^2}) F_n(t, x, z_n) + H(t - \sqrt{x^2 + \bar{z}_n^2}) F_n(t, x, \bar{z}_n) \right]. \quad (19)$$

Здесь обозначено

$$F_n(t, x, z_n) = \frac{t z_n}{(x^2 + z_n^2) \sqrt{t^2 - (x^2 + z_n^2)}}; \quad F_n(t, x, \bar{z}_n) = F_n(t, x, z_n) \Big|_{z_n = \bar{z}_n}. \quad (20)$$

Свертка преобразования Фурье для двух функций $f(x)$ и $g(x)$ имеет следующий вид [2]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^F(\xi) g^F(\xi) e^{-ix\xi} d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\zeta) g(x - \zeta) d\zeta.$$

Применим ее к произведению изображений функций $G(x)$ и $\tilde{g}_n(t, x, z)$ в формуле (14), чтобы произвести инверсию выражения для компонента давления $p_n(t, x, z)$ относительно преобразования Фурье

$$p_n(t, x, z) = \frac{1}{2\pi} Q_0 (-1)^{n+1} \int_{-\infty}^{\infty} G(x - \zeta) \tilde{g}_n(t, \zeta, z) d\zeta. \quad (21)$$

Тогда давление $p(t, x, z)$ в целом получим в виде

$$p(t, x, z) = \frac{1}{2\pi} Q_0 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \int_{-\infty}^{\infty} G(x - \zeta) \tilde{g}_n(t, \zeta, z) d\zeta. \quad (22)$$

Пределы интегрирования в (22) уточняются, исходя из свойств подынтегральных функций, содержащих функции Хевисайда – см. (12), (19). Следующий пример иллюстрирует это.

4. Фиксированная область действия нагрузки. Возвратимся к нагрузке вида (12) и рассмотрим, например, функцию $G(x)$ такую, что отвечающая ей нормальная нагрузка приложена в фиксированной области $-l \leq x \leq l, l = \text{const}$:

$$G(x) = f(x)[H(x+l) - H(x-l)]. \quad (23)$$

Функция $f(x)$ задает распределение нагрузки в указанной области. Из соотношений (3.9) – (22) следует выражение для давления p в произвольной точке полуплоскости (x, z) в произвольный момент времени t в случае, когда действующая нагрузка внезапно возникает и остается постоянной в фиксированной области границы $(-l, l)$

$$p(t, x, z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(t, x, z); \quad p_n(t, x, z) = \frac{1}{\pi} Q_0 (-1)^{n+1} \int_{x-l}^{x+l} f(x - \zeta) \tilde{g}_n(t, \zeta, z) d\zeta; \quad (24)$$

$$\tilde{g}_n(t, \zeta, z) = H\left(\sqrt{t^2 - z_n^2} - \zeta\right) F_n(t, \zeta, z_n) + H\left(\sqrt{t^2 - \bar{z}_n^2} - \zeta\right) F_n(t, \zeta, \bar{z}_n),$$

где $F_n(t, \zeta, z_n), F_n(t, \zeta, \bar{z}_n)$ определяются по формуле (20).

Формула (24) используется для вычисления акустического давления в произвольной точке слоя для каждой конкретной функции $f(x)$.

Если зависимость нагрузки от времени в (12) определяется некоторой функцией общего вида $q(t)H(t)$, выражение (24) служит в качестве исходного, а искомое давление вычисляется на основе теоремы о свертке операционного исчисления

$$p(t, x, z) \Big|_{q(t)} = \int_0^t q(t - \tau) p(\tau, x, z) d\tau. \quad (25)$$

Таким образом, полученные соотношения (24), (25) дают замкнутое аналитическое решение сформулированной нестационарной задачи гидроакустики в случае общего вида зависимости действующей нагрузки от времени и ее произвольного распределения вдоль фиксированного участка границы, который является областью задания нагрузки. Вид выражения (22) и аналогично (24) показывает, что фигурирующий в них ряд составлен из последовательно отраженных от граничных поверхностей $z = h$ и $z = 0$ волн. При этом n -й член ряда, содержащий функцию $F_n(t, \zeta, z_n)$, представляет n -ю волну, отраженную от границы $z = 0$, тогда как член ряда, содержащий функцию $F_n(t, \zeta, \bar{z}_n)$, представляет волну, n раз отразившуюся от поверхности $z = h$. Таким образом, если ограничивать рассмотрение конечным интервалом времени, следует ряды по n в (22) и аналогично (24) заменить конечными суммами от 0 до N , где N – число отражений, учитываемых в решении.

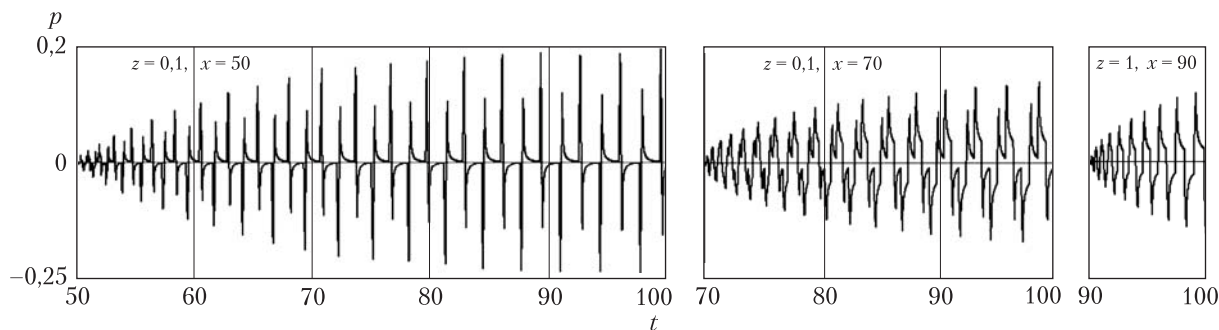


Рис. 2. Эволюция давления в трех точках слоя

5. Однородная нагрузка. Выражения для $p_n(t, x, z)$ из (24) можно получить в явном виде для различных функций $f(x)$. Например, если предположить, что распределение нагрузки на интервале $(-l, l)$ является однородным, то есть $f(x) = 1$, то выражение для p_n в формуле (24) будет иметь вид

$$p_n(t, x, z) = \frac{1}{\pi} Q_0 (-1)^{n+1} \int_{x-l}^{x+l} \tilde{g}_n(t, \zeta, z) d\zeta. \quad (26)$$

Интеграл в (26) вычисляется в явном виде

$$\int_{x-l}^{x+l} \tilde{g}_n(t, \zeta, z) d\zeta = \arctan \left(\frac{t\zeta}{z_n \sqrt{t^2 - z_n^2 - \zeta^2}} \right) \Big|_{x-l}^{X(t, x, z_n)} + \arctan \left(\frac{t\zeta}{\bar{z}_n \sqrt{t^2 - \bar{z}_n^2 - \zeta^2}} \right) \Big|_{x-l}^{X(t, x, \bar{z}_n)}. \quad (27)$$

Здесь

$$X(t, x, z_n) = \begin{cases} \sqrt{t^2 - z_n^2}, & \text{if } \sqrt{t^2 - z_n^2} < x+l, \\ x+l, & \text{if } \sqrt{t^2 - z_n^2} > x+l. \end{cases} \quad (28)$$

Формулы (26) или (26)–(28) используются для конкретных вычислений.

6. Числовые результаты. В задачах гидроакустики основной интерес привлекает картина волнового поля непосредственно под источником возмущений и, в особенности, в дальней зоне на расстояниях, многократно превышающих характерный размер поперечного сечения слоя. Ниже приведены результаты вычислений согласно формулам (24), (26). Вычислено развитие во времени и по координатам x, z нестационарного давления $p(t, z, x)$ в результате действия нагрузки в виде

$$Q(t, x) = Q_0 H(t) [H(x+l) - H(x-l)]$$

при следующих значениях безразмерных исходных параметров

$$Q_0 = 1; h = 1; l = 0,1; t = 0 \div 100.$$

На рис.2 изображены вычисленные кривые развития давления как функции времени в трех точках слоя: 1) $x = 50, z = 0,1$ на интервале времени $t = 50 \div 100$; 2) $x = 70, z = 0,5$ на интервале времени $t = 70 \div 100$; 3) $x = 90, z = 1,0$ на интервале времени $t = 70 \div 100$. На рисунке масштаб по оси абсцисс одинаков для всех графиков и обозначен только на первом.

Представленные графики наглядно иллюстрируют характер развития давления в избранных точках, включая особенности многократных отражений нестационарной акустической волны от граничных поверхностей. Приведенные результаты демонстрируют возможности предложенной методики.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Морс Ф.М., Фешбах Г. Методы теоретической физики в 2-х т. Т. 1. Москва: ИЛ, 1960. 896 с.
2. Диткин В.А., Прудников А.П. Интегральные преобразования и операционное исчисление. Москва: ГИФМЛ, 1961. 524 с.
3. Справочник по специальным функциям. М. Абрамовиц и И.Ф. Стиган (ред.) Москва. Наука, 1979. 830 с.

Поступило в редакцию 06.06.2016

REFERENCES

1. Morse, P. M., Feshbach, H. (1953). Methods of Theoretical Physics. In 2 Vol. Part 1. New York: McGraw-Hill.
2. Ditkin, V. A., Prudnikov, A. P. (1961). Integral Transforms and Operational Calculation, Moscow: GIFML (in Russian).
3. M., Abramovitz, I. A., Stegun (Eds.). (1964). Handbook of Mathematical Functions. New York: Nat. Bureau of Standards.

Received 06.06.2016

В.Д. Кубенко

Институт механіки ім. С.П.Тимошенка НАН України, Київ

E-mail: vdk@inmech.kiev.ua

НЕСТАЦІОНАРНА ГІДРОАКУСТИЧНА ЗАДАЧА ДЛЯ РІДИНИ СКІНЧЕНОЇ ГЛИБИНИ

Будується аналітичний розв'язок плоскої задачі про дію нестационарного тиску на поверхні плоского шару рідини. Формулюється задача лінійної акустики. Застосовуються інтегральні перетворення Лапласа і Фур'є. Обернення перетворень у випадку сталої області дії навантаження виконано за допомогою табличних співвідношень і відповідних теорем про згортку, в результаті чого вдається одержати вираз для тиску в довільній точці рідини в замкнутому вигляді. Розв'язок записано у вигляді суми, m -й член якої представляє m -у відбиту хвилю. Утримання в розв'язку певної кількості членів дає точний розв'язок задачі на заданому інтервалі часу з урахуванням необхідного числа відбитих хвиль.

Ключові слова: нестационарне навантаження, акустична хвиля, шар рідини.

V.D. Kubenko

S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of the NAS of Ukraine, Kiev

E-mail: vdk@inmech.kiev.ua

NON-STEADY HYDROACOUSTICAL PROBLEM FOR A FLUID OF FINITE DEPTH

An analytic solution of a plane problem on the action of a non-steady pressure on the surface of a flat layer of a fluid is constructed. The integral Laplace and Fourier transformations are applied. In the case of a steady region, where a load acts, the inversion of transformations is executed by means of tabular relations and the appropriate theorems of convolution. As a result, the formula for a pressure at an arbitrary point of the fluid is obtained in the closed form. The solution is presented in the form of a sum, whose m -term represents the m -th reflected wave. The retention of a certain number of terms in the solution gives the exact solution of the problem on the given time interval with regard for the necessary number of waves.

Keywords: non-steady loading, acoustical wave, liquid layer.