

---

doi: <https://doi.org/10.15407/dopovidi2018.12.030>

УДК 517.988

**В.В. Семёнов**

Киевский национальный университет им. Тараса Шевченко

E-mail: [semenov.volodya@gmail.com](mailto:semenov.volodya@gmail.com)

## **Сходимость инерционных гибридных алгоритмов расщепления**

*Представлено членом-корреспондентом НАН Украины С.И. Ляшко*

*Предложены два новых инерционных алгоритма для решения операторных включений с максимальными монотонными операторами, действующими в гильбертовом пространстве. Алгоритмы основаны на схеме инерционной экстраполяции и трех известных методах: алгоритме расщепления Tseng'a и двух гибридных алгоритмах для аппроксимации неподвижных точек нерастягивающих операторов. Доказаны теоремы о сильной сходимости порожденных алгоритмами последовательностей.*

**Ключевые слова:** операторное включение, максимальный монотонный оператор, гильбертово пространство, инерционный метод, алгоритм Tseng'a, гибридный алгоритм, сильная сходимость.

Теория монотонных операторов является активно развивающимся направлением нелинейного анализа [1]. Многие задачи обработки данных, исследования операций и математической физики можно записать в виде операторных включений с монотонными операторами, для решения которых предложено и обосновано много надежных численных методов [1–9]. Хотя далеко не все вопросы разработаны с исчерпывающей полнотой.

Одним из способов ускорения базовых итерационных методов является введение в процесс инерции. В оптимизации первым методом данного типа стал метод тяжелого шарика Б.Т. Поляка. В последнее время этот прием приобрел большую популярность, что отражено в публикациях [5–9]. В [7] изложен инерционный экстраградиентный метод для решения вариационных неравенств. Две инерционные модификации алгоритма Красносельского–Манна для аппроксимации неподвижных точек нерастягивающих операторов предложены в [8]. Для операторных включений с операторами, имеющими вид суммы максимального монотонного и обратно сильно монотонного оператора, в [9] предложен вариант инерционной модификации “forward–backward” схемы расщепления. Однако для операторных включений с монотонными и только липшицевыми операторами вместо обратно сильно монотонных последний метод не работает. Наша цель — построить сильно сходящиеся для таких включений алгоритмы.

В данном сообщении для решения операторных включений с максимальным монотонным и монотонным липшицевым операторами, действующими в гильбертовом простран-

стве, предложены два новых инерционных алгоритма. Каждый из этих алгоритмов является регуляризацией известной схемы расщепления Tseng'a [2] с введенной инерцией. Регуляризация осуществлена соответствующим гибридным методом поиска неподвижных точек нестягивающих операторов [10, 11]. Доказаны теоремы о сильной сходимости порожденных алгоритмами последовательностей к метрической проекции заданной точки на множество решений операторного включения.

**Постановка задачи и описание алгоритмов.** Пусть  $H$  — действительное гильбертово пространство со скалярным произведением  $(\cdot, \cdot)$  и нормой  $\|\cdot\|$ . Для многозначного оператора  $A: H \rightarrow 2^H$  используем следующие обозначения:  $\text{dom}(A) = \{x \in H : Ax \neq \emptyset\}$ ,  $A^{-1}0 = \{x \in H : 0 \in Ax\}$ .

Напомним, что резольвентой оператора  $A: H \rightarrow 2^H$  называют оператор  $J_A = (I + A)^{-1}: H \rightarrow 2^H$ , где  $I$  — единичный оператор [1]. Известно, что в случае максимальной монотонности оператора  $A$  резольвента  $J_A$  является однозначным, всюду заданным и твердо нестягивающим оператором, а множество  $A^{-1}0$  — замкнутым и выпуклым (возможно пустым) [1].

**Лемма 1** ([1]). Пусть  $A: H \rightarrow 2^H$  — максимальный монотонный оператор,  $x, u \in H$ . Тогда

$$(u - v, x - y) \geq 0 \quad \forall y \in \text{dom}(A), \quad \forall v \in Ay \quad \Leftrightarrow \quad x \in \text{dom}(A), \quad u \in Ax.$$

Пусть  $P_C$  — оператор проектирования на выпуклое и замкнутое множество  $C \subseteq H$ , то есть  $P_C x$  — единственный элемент  $C$  со свойством  $\|P_C x - x\| = \min_{z \in C} \|z - x\|$ . Элемент  $P_C x$  можно охарактеризовать следующим образом [1]:

$$y = P_C x \Leftrightarrow y \in C \quad \text{и} \quad (y - x, z - y) \geq 0 \quad \forall z \in C;$$

$$y = P_C x \Leftrightarrow y \in C \quad \text{и} \quad \|y - z\|^2 \leq \|x - z\|^2 - \|y - x\|^2 \quad \forall z \in C.$$

Перейдем к формулировке задачи. Пусть  $A: H \rightarrow H$  — монотонный и липшицевый оператор с константой Липшица  $L > 0$ , причем  $\text{dom}(A) = H$ ;  $B: H \rightarrow 2^H$  — максимальный монотонный оператор. Отметим, что оператор  $A + B: H \rightarrow 2^H$  является максимальным монотонным и  $\text{dom}(A + B) = \text{dom}(B)$ .

Рассмотрим операторное включение

$$0 \in (A + B)x. \tag{1}$$

Предположим, что множество решений (1) не пусто, то есть  $S = (A + B)^{-1}0 \neq \emptyset$ .

Для получения аппроксимаций решений операторного включения (1) предлагаем следующие алгоритмы.

**Алгоритм 1.** Выбираем элементы  $x_0, x_1 \in H$ . Задаем последовательности чисел  $\lambda_n \in [a, b]$ ,  $\theta_n \in [0, \theta]$ , где  $a, b \in (0, \frac{1}{L})$ ,  $\theta \in (0, 1)$ . Полагаем  $n = 1$ .

Шаг 1. Вычислить  $y_n = x_n + \theta_n(x_n - x_{n-1})$ .

Шаг 2. Вычислить

$$u_n = y_n - \lambda_n A y_n,$$

$$v_n = J_{\lambda_n B} u_n,$$

$$w_n = y_n - u_n + v_n - \lambda_n A v_n.$$

Шаг 3. Вычислить  $x_{n+1} = P_{C_n \cap Q_n} x_1$ , где

$$C_n = \{z \in H : \|w_n - z\| \leq \|y_n - z\|\}, \quad Q_n = \{z \in H : (x_n - z, x_1 - x_n) \geq 0\}.$$

Положить  $n := n+1$  и перейти на шаг 1.

**Алгоритм 2.** Выбираем элементы  $x_0, x_1 \in H$ . Задаем последовательности чисел  $\lambda_n \in [a, b]$ ,  $\theta_n \in [0, \theta]$ , где  $a, b \in (0, \frac{1}{L})$ ,  $\theta \in (0, 1)$ . Полагаем  $n=1, C_1 = H$ .

Шаг 1. Вычислить  $y_n = x_n + \theta_n(x_n - x_{n-1})$ .

Шаг 2. Вычислить

$$u_n = y_n - \lambda_n A y_n,$$

$$v_n = J_{\lambda_n B} u_n,$$

$$w_n = y_n - u_n + v_n - \lambda_n A v_n.$$

Шаг 3. Вычислить  $x_{n+1} = P_{C_{n+1}} x_1$ , где

$$C_{n+1} = C_n \cap \{z \in H : \|w_n - z\|^2 \leq \|x_n - z\|^2 + 2\theta_n^2 \|x_n - x_{n-1}\|^2 + 2\theta_n(x_n - z, x_n - x_{n-1})\}.$$

Положить  $n := n+1$  и перейти на шаг 1.

*Замечание 1.* Алгоритм 1 реализует идею инерционной экстраполяции и регуляризации метода расщепления Tseng'a [2] с помощью гибридного метода [10], а алгоритм 2 — с помощью метода [11].

*Замечание 2.* Условие  $\lambda_n \in [a, b] \subseteq (0, 1/L)$  является не совсем конструктивным (в случае неизвестной константы Липшица) и имеет скорее теоретическое значение. На практике величину  $\lambda_n$  можно получить дроблением какой-нибудь начальной величины  $\sigma > 0$  за конечное число шагов. Например,

$$\lambda_n = \sigma \tau^{j(n)}, \quad j(n) = \min \left\{ j \geq 0 : \frac{\|AJ_{\sigma \tau^j B}(I - \sigma \tau^j A)y_n - Ay_n\|}{\|J_{\sigma \tau^j B}(I - \sigma \tau^j A)y_n - y_n\|} \leq \frac{\tau^j \theta}{\sigma} \right\},$$

где  $\sigma > 0$ ,  $\theta \in (0, 1)$ ,  $\tau \in (0, 1)$  — заданные параметры [2, 12, 13]. Используя рассуждения [12, 13] можно гарантировать корректность этого правила выбора  $\lambda_n$  и без предположения о глобальной липшицевости оператора  $A$ . Заметим, что в этой схеме дробления необходимо вычислять значения композиций  $(I + \sigma \tau^j B)^{-1}(I - \sigma \tau^j A)$ , что может сказаться на общей эффективности метода.

*Замечание 3.* Определенные в алгоритмах 1 и 2 множества  $C_n \cap Q_n$  и  $C_{n+1}$  являются выпуклыми и замкнутыми. Далее показана их непустота и корректность определения элементов  $x_n$ .

*Замечание 4.* Вычисление  $P_{C_n \cap Q_n} x_1$  в алгоритме 1 можно выполнить явно [1].

Справедливо важное неравенство, связывающее расстояния от порожденных алгоритмами точек до множества  $S$ .

**Лемма 2** ([2]). *Для последовательностей  $(y_n)$ ,  $(v_n)$  и  $(w_n)$ , порожденных алгоритмом 1 или алгоритмом 2, имеет место неравенство*

$$\|w_n - z\|^2 \leq \|y_n - z\|^2 - (1 - \lambda_n^2 L^2) \|y_n - v_n\|^2, \quad z \in S.$$

Перейдем к доказательству сильной сходимости алгоритмов.

**Сходимость алгоритма 1.** Сначала установим важное свойство локализации множества решений операторного включения (1) с помощью множеств  $C_n \cap Q_n$ .

**Лемма 3.** Для всех  $n \in \mathbb{N}$  имеет место вложение  $S \subseteq C_n \cap Q_n$ .

Имеет место

**Лемма 4.** Последовательности  $(x_n)$ ,  $(y_n)$ ,  $(v_n)$  и  $(w_n)$  ограничены и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_{n+1} - x_n\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n - x_n\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|w_n - x_{n+1}\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|v_n - y_n\| = 0.$$

**Лемма 5.** Слабые предельные точки последовательностей  $(x_n)$ ,  $(y_n)$ ,  $(v_n)$  и  $(w_n)$  принадлежат множеству  $S$ .

Сформулируем первый основной результат работы.

**Теорема 1.** Пусть  $A: H \rightarrow H$  – монотонный и липшицевый оператор с константой Липшица  $L > 0$ , причем  $\text{dom}(A) = H$ ;  $B: H \rightarrow 2^H$  – максимальный монотонный оператор и  $S = (A+B)^{-1}0 \neq \emptyset$ . Тогда порожденная алгоритмом 1 последовательность  $(x_n)$  сильно сходится к элементу  $P_{(A+B)^{-1}0}x_1$ .

**Сходимость алгоритма 2.** Имеет место следующая теорема.

**Теорема 2.** Пусть  $A: H \rightarrow H$  – монотонный и липшицевый оператор с константой Липшица  $L > 0$ , причем  $\text{dom}(A) = H$ ;  $B: H \rightarrow 2^H$  – максимальный монотонный оператор и  $S = (A+B)^{-1}0 \neq \emptyset$ . Тогда порожденные алгоритмом 2 последовательности  $(x_n)$ ,  $(y_n)$ ,  $(v_n)$  и  $(w_n)$  сильно сходятся к элементу  $P_{(A+B)^{-1}0}x_1$ .

**Доказательство.** Для  $z \in S$  и порожденных алгоритмом 2 последовательностей имеет место неравенство

$$\|w_n - z\|^2 \leq \|y_n - z\|^2 - (1 - \lambda_n^2 L^2) \|y_n - v_n\|^2. \quad (2)$$

Покажем, что алгоритм 2 порождает монотонную цепочку вложений

$$H = C_1 \supseteq C_2 \supseteq \dots \supseteq C_n \supseteq \dots \supseteq S = (A+B)^{-1}0.$$

Предположим, что  $S = (A+B)^{-1}0 \subseteq C_n$ . Для  $z \in S$  из неравенства (2) следует

$$\begin{aligned} \|w_n - z\|^2 &\leq \|y_n - z\|^2 = \|x_n + \theta_n(x_n - x_{n-1}) - z\|^2 \leq \|x_n - z\|^2 + 2\theta_n(x_n - x_{n-1}, y_n - z) = \\ &= \|x_n - z\|^2 + 2\theta_n(x_n - x_{n-1}, y_n - x_n) + 2\theta_n(x_n - x_{n-1}, x_n - z) = \\ &= \|x_n - z\|^2 + 2\theta_n^2 \|x_n - x_{n-1}\|^2 + 2\theta_n(x_n - x_{n-1}, x_n - z). \end{aligned}$$

Откуда,  $S \subseteq C_{n+1} \subseteq C_n$ .

Покажем существование конечного предела  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x_1\|$ . Поскольку  $x_n = P_{C_n}x_1$ ,  $S \subseteq C_n$ , то для всех  $z \in S$  имеет место неравенство  $\|x_n - z\|^2 \leq \|x_1 - z\|^2 - \|x_n - x_1\|^2$ . Отсюда  $\|x_n - x_1\| \leq \|x_1 - z\|$ . Последовательность  $(\|x_n - x_1\|)$  ограничена сверху. Поскольку  $C_{n+1} \subseteq C_n$ , то  $\|x_{n+1} - x_1\| \geq \|x_n - x_1\|$ . Следовательно, последовательность  $(\|x_n - x_1\|)$  ограничена сверху и неубывающая, поэтому существует конечный предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x_1\|$ .

Покажем фундаментальность последовательности  $(x_n)$ . Для произвольного  $m \in \mathbb{N}$  с учетом того, что  $C_{n+m} \subseteq C_n$ , имеем

$$\|x_{n+m} - x_n\|^2 = \|x_{n+m} - P_{C_n} x_1\|^2 \leq \|x_1 - x_{n+m}\|^2 - \|x_n - x_1\|^2.$$

Отсюда следует фундаментальность последовательности  $(x_n)$ . Таким образом,  $x_n \rightarrow q \in H$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Ясно, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_{n+1} - x_n\| = 0$ . Поскольку  $\|y_n - x_n\| = \theta_n \|x_n - x_{n-1}\| \leq \theta \|x_n - x_{n-1}\|$ , то  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n - x_n\| = 0$ . Кроме того, имеем  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n - x_{n+1}\| = 0$ . Поскольку  $x_{n+1} \in C_{n+1} \subseteq C_n$ , то

$$\begin{aligned} \|y_n - w_n\| &\leq \|y_n - x_{n+1}\| + \|x_{n+1} - w_n\| \leq \\ &\leq \|y_n - x_{n+1}\| + \sqrt{\|x_n - x_{n+1}\|^2 + 2\theta_n^2 \|x_n - x_{n-1}\|^2 + 2\theta_n (x_n - x_{n+1}, x_n - x_{n-1})} \leq \\ &\leq \|y_n - x_{n+1}\| + \sqrt{\|x_n - x_{n+1}\|^2 + 2\theta_n^2 \|x_n - x_{n-1}\|^2 + 2\theta_n \|x_n - x_{n+1}\| \|x_n - x_{n-1}\|} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Используя неравенство (9), получим

$$\|y_n - v_n\|^2 \leq \frac{\|y_n - z\|^2 - \|w_n - z\|^2}{1 - \lambda_n^2 L^2} \leq \frac{(\|y_n - z\| + \|w_n - z\|) \|y_n - w_n\|}{1 - \lambda_n^2 L^2} \rightarrow 0,$$

где  $z \in S$ . Следовательно, имеем  $y_n \rightarrow q$ ,  $w_n \rightarrow q$  и  $v_n \rightarrow q$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Покажем, что  $q \in S$ . Имеем  $(A+B)v_n \ni r_n = \frac{y_n - v_n}{\lambda_n} + Av_n - Ay_n \rightarrow 0$ . Вследствие монотонности  $A+B$  справедливо неравенство

$$(r_n - p, v_n - y) \geq 0 \quad \forall y \in \text{dom}(A+B), \quad \forall p \in (A+B)y.$$

После предельного перехода получим

$$(0 - p, q - y) \geq 0 \quad \forall y \in \text{dom}(A+B), \quad \forall p \in (A+B)y.$$

Поскольку оператор  $A+B$  является максимальным монотонным, то согласно лемме 1 имеем  $0 \in (A+B)q$ , т. е.  $q \in S$ .

Поскольку  $x_n = P_{C_n} x_1$  и  $S \subseteq C_n$ , то

$$(x_n - x_1, z - x_n) \geq 0 \quad \forall z \in S. \tag{3}$$

Совершив в неравенстве (3) предельный переход, получим  $(q - x_1, z - q) \geq 0 \quad \forall z \in S$ , то есть  $q = P_{(A+B)^{-1}0} x_1$ .

*Работа выполнена при финансовой поддержке МОН Украины (проект "Розробка алгоритмів моделювання та оптимізації динамічних систем для оборони, медицини та екології", 0116U004777).*

## ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Bauschke H.H., Combettes P.L. Convex Analysis and Monotone Operator Theory in Hilbert Spaces. Berlin etc.: Springer, 2011. 408 p.
2. Tseng P. A modified forward-backward splitting method for maximal monotone mappings. *SIAM J. Control and Optimization*. 2000. **38**. P. 431–446. doi: <https://doi.org/10.1137/S0363012998338806>
3. Semenov V.V. Hybrid Splitting Methods for the System of Operator Inclusions with Monotone Operators. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2014. **50**. P. 741–749. doi: <https://doi.org/10.1007/s10559-014-9664-y>
4. Semenov V.V. A Strongly Convergent Splitting Method for Systems of Operator Inclusions with Monotone Operators. *J. Automation and Information Sciences*. 2014. **46**, № 5. P. 45–56. doi: <https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v46.i5.40>
5. Alvarez F., Attouch H. An inertial proximal method for monotone operators via discretization of a nonlinear oscillator with damping. *Set-Valued Anal.* 2001. **9**. P. 3–11. doi: <https://doi.org/10.1023/A:1011253113155>
6. Attouch H., Chbani Z., Riahi H. Combining fast inertial dynamics for convex optimization with Tikhonov regularization. *J. Math. Anal. Appl.* 2018. **457**. P. 1065–1094. doi: <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2016.12.017>
7. Dong Q.L., Lu Y.Y., Yang J. The extragradient algorithm with inertial effects for solving the variational inequality. *Optimization*. 2016. **65**. P. 2217–2226. doi: <https://doi.org/10.1080/02331934.2016.1239266>
8. Dong Q.L., Yuan H.B., Cho Y.J., Rassias Th.M. Modified inertial Mann algorithm and inertial CQ-algorithm for nonexpansive mappings. *Optim. Lett.* 2018. **12**, № 1. P. 87–102. doi: <https://doi.org/10.1007/s11590-016-1102-9>
9. Lorenz D., Pock T. An inertial forward-backward algorithm for monotone inclusions. *J. Math. Imaging and Vision*. 2015. **51**. P. 311–325. doi: <https://doi.org/10.1007/s10851-014-0523-2>
10. Nakajo K., Takahashi W. Strong convergence theorems for nonexpansive mappings and nonexpansive semi-groups. *J. Math. Anal. Appl.* 2003. **279**. P. 372–379. doi: [https://doi.org/10.1016/S0022-247X\(02\)00458-4](https://doi.org/10.1016/S0022-247X(02)00458-4)
11. Takahashi W., Takeuchi Y., Kubota R. Strong convergence theorems by hybrid methods for families of nonexpansive mappings in Hilbert spaces. *J. Math. Anal. Appl.* 2008. **341**. P. 276–286. doi: <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2007.09.062>
12. Verlan D.A., Semenov V.V., Chabak L.M. A Strongly Convergent Modified Extragradient Method for Variational Inequalities with Non-Lipschitz Operators. *J. Automation and Information Sciences*. 2015. **47**, № 7. P. 31–46. doi: <https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v47.i7.40>
13. Denisov S.V., Semenov V.V., Chabak L.M. Convergence of the Modified Extragradient Method for Variational Inequalities with Non-Lipschitz Operators. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2015. **51**. P. 757–765. doi: <https://doi.org/10.1007/s10559-015-9768-z>

Поступило в редакцию 06.08.2018

## REFERENCES

1. Bauschke, H. H. & Combettes, P. L. (2011). Convex Analysis and Monotone Operator Theory in Hilbert Spaces. Berlin etc.: Springer.
2. Tseng, P. (2000). A modified forward-backward splitting method for maximal monotone mappings. *SIAM J. Control and Optimization*, 38, pp. 431-446. doi: <https://doi.org/10.1137/S0363012998338806>
3. Semenov, V. V. (2014). Hybrid Splitting Methods for the System of Operator Inclusions with Monotone Operators. *Cybernetics and Systems Analysis*, 50, pp. 741-749. doi: <https://doi.org/10.1007/s10559-014-9664-y>
4. Semenov, V. V. (2014). A Strongly Convergent Splitting Method for Systems of Operator Inclusions with Monotone Operators. *J. Automation and Information Sciences*, 46, No. 5, pp. 45-56. doi: <https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v46.i5.40>
5. Alvarez, F. & Attouch, H. (2001). An inertial proximal method for monotone operators via discretization of a nonlinear oscillator with damping. *Set-Valued Anal.*, 9, pp. 3-11. doi: <https://doi.org/10.1023/A:1011253113155>
6. Attouch, H., Chbani, Z. & Riahi, H. (2018). Combining fast inertial dynamics for convex optimization with Tikhonov regularization. *J. Math. Anal. Appl.*, 457, pp. 1065-1094. doi: <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2016.12.017>

7. Dong, Q. L., Lu, Y. Y. & Yang, J. (2016). The extragradient algorithm with inertial effects for solving the variational inequality. *Optimization*, 65, pp. 2217-2226. doi: <https://doi.org/10.1080/02331934.2016.1239266>
8. Dong, Q. L., Yuan, H. B., Cho, Y. J. & Rassias, Th. M. (2018). Modified inertial Mann algorithm and inertial CQ-algorithm for nonexpansive mappings. *Optim. Lett.*, 12, No. 1, pp. 87-102. doi: <https://doi.org/10.1007/s11590-016-1102-9>
9. Lorenz, D. & Pock, T. (2015). An inertial forward-backward algorithm for monotone inclusions. *J. Math. Imaging and Vision*, 51, pp. 311-325. doi: <https://doi.org/10.1007/s10851-014-0523-2>
10. Nakajo, K. & Takahashi, W. (2003). Strong convergence theorems for nonexpansive mappings and nonexpansive semigroups. *J. Math. Anal. Appl.*, 279, pp. 372-379. doi: [https://doi.org/10.1016/S0022-247X\(02\)00458-4](https://doi.org/10.1016/S0022-247X(02)00458-4)
11. Takahashi, W., Takeuchi, Y., & Kubota, R. (2008). Strong convergence theorems by hybrid methods for families of nonexpansive mappings in Hilbert spaces. *J. Math. Anal. Appl.*, 341, pp. 276-286. doi: <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2007.09.062>
12. Verlan, D. A., Semenov, V. V. & Chabak, L. M. (2015). A Strongly Convergent Modified Extragradient Method for Variational Inequalities with Non-Lipschitz Operators. *J. Automation and Information Sciences*, 47, No. 7, pp. 31-46. doi: <https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v47.i7.40>
13. Denisov, S. V., Semenov, V. V. & Chabak, L. M. (2015). Convergence of the Modified Extragradient Method for Variational Inequalities with Non-Lipschitz Operators. *Cybernetics and Systems Analysis*, 51, pp. 757-765. doi: <https://doi.org/10.1007/s10559-015-9768-z>

Received 06.08.2018

*В.В. Семенов*

Київський національний університет ім. Тараса Шевченка

E-mail: [semenov.volodya@gmail.com](mailto:semenov.volodya@gmail.com)

#### ЗБІЖНІСТЬ ІНЕРЦІЙНИХ ГІБРИДНИХ АЛГОРИТМІВ РОЗЩЕПЛЕННЯ

Запропоновано два нових інерційних алгоритми для розв'язання операторних включень з максимальними монотонними операторами, що діють в гільбертовому просторі. Алгоритми базуються на схемі інерційної екстраполяції та трьох відомих методах: алгоритмі розщеплення Tseng'a та двох гібридних алгоритмах для апроксимації нерухомих точок нерозтягуючих операторів. Доведено теореми про сильну збіжність породжених алгоритмами послідовностей.

**Ключові слова:** операторне включення, максимальний монотонний оператор, гільбертовий простір, інерційний метод, алгоритм Tseng'a, гібридний алгоритм, сильна збіжність.

*V.V. Semenov*

Taras Shevchenko National University of Kiev

E-mail: [semenov.volodya@gmail.com](mailto:semenov.volodya@gmail.com)

#### CONVERGENCE OF INERTIAL HYBRID SPLITTING ALGORITHMS

Two new algorithms for solving the operator inclusion problems with maximal monotone operators acting in a Hilbert space are proposed. Algorithms are based on the inertial extrapolation and three well-known methods: Tseng forward-backward splitting algorithm and two hybrid algorithms for the approximation of fixed points of nonexpansive operators. Theorems on the strong convergence of the sequences generated by the algorithms are proved.

**Keywords:** operator inclusion problem, maximal monotone operator, Hilbert space, inertial method, Tseng algorithm, hybrid algorithm, strong convergence.