



# ОПОВІДІ НАЦІОНАЛЬНОЇ АКАДЕМІЇ НАУК УКРАЇНИ

# 10 • 2018

НАУКОВО-ТЕОРЕТИЧНИЙ ЖУРНАЛ • ЗАСНОВАНИЙ У 1939 Р. • ВИХОДИТЬ ЩОМІСЯЦЯ • КИЇВ

REPORTS OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF UKRAINE

## Зміст

### МАТЕМАТИКА

- Михайлець В.А., Молибога В.Н.* О лакунах в спектре оператора Хилла–Шредингера с сингулярным потенциалом . . . . . 3
- Gutlyanskiĭ V.Ya., Nesmelova O.V., Ryazanov V.I.* On the regularity of solutions of quasilinear Poisson equations . . . . . 9

### ІНФОРМАТИКА

- Панкратова Н.Д., Савченко І.О., Гайко Г.І., Кравець В.Г.* Системний підхід до освоєння підземного простору мегаполісів в умовах невизначеностей та багатофакторних ризиків . . . . . 18
- Ustimenko V.A.* On new symbolic key exchange protocols and cryptosystems based on a hidden tame homomorphism . . . . . 26

### МЕХАНІКА

- Жбадинський І.Я.* Взаємодія одноперіодичних податливих дискових еліптичної форми включень при падінні пружної гармонічної хвилі . . . 37
- Каминський А.А., Курчаков Е.Е.* Об эволюции зоны предразрушения у вершины трещины в нелинейном анизотропном теле . . . . . 44
- Трощенко В.Т., Хамаза Л.А.* Стадии усталостного разрушения металлов и сплавов . . . . . 56

## Contents

### MATHEMATICS

- Mikhailets V.A., Molyboga V.M.* On spectral gaps of the Hill–Schrödinger operator with singular potential . . . . . 3
- Gutlyanskiĭ V.Ya., Nesmelova O.V., Ryazanov V.I.* On the regularity of solutions of quasilinear Poisson equations . . . . . 9

### INFORMATICS

- Pankratova N.D., Savchenko I.O., Haiko H.I., Kravets V.H.* A system approach to developing the underground space of metropolises under conditions of uncertainty and multifactor risks . . 18
- Ustimenko V.A.* On new symbolic key exchange protocols and cryptosystems based on a hidden tame homomorphism . . . . . 26

### MECHANICS

- Zhbadynskiy I.Ya.* Interaction of one-periodic compliant disk elliptic-shape inclusions under the action of an incident elastic time-harmonic wave . . . . . 37
- Kaminsky A.A., Kurchakov E.E.* On the evolution of the prefracture zone near the crack tip in a nonlinear anisotropic body . . . . . 44
- Troshchenko V.T., Khamaza L.A.* Stages of fatigue failure of metals and alloys . . . . . 56

## НАУКИ ПРО ЗЕМЛЮ

Орлюк М.І., Роменець А.О. Просторово-часова збуреність геомагнітного поля ряду територій північної та південної півкуль Землі . . . . . 64

## ХІМІЯ

Крупская Т.В., Ругаль А.А., Туров В.В. Особенности связывания воды в композитных системах SiO<sub>2</sub>/левомицетин и SiO<sub>2</sub>/левомицетин/AM1 . . . . . 72

Москвіна В.С., Красилов І.В., Хиля В.П. Синтез оксимів піранонеофлавонів та спіропіранонеофлавонів . . . . . 79

## БІОЛОГІЯ

Бузіашвілі А.Ю., Ємець А.І. Отримання ліній рослин картоплі та томатів з геном лактоферину людини . . . . . 88

Колесников Я.С., Кретинін С.В. Роль специфічних ізоферментів фосфоліпази D у реалізації біологічного ефекту жасмонової кислоти в реакціях рослин на дію стресів . . . . . 95

Співак М.Я., Рибалко С.Л., Старосила Д.Б., Завелевич М.П., Олексієнко І.П., Дядюн С.Т., Руденко А.В., Атаманюк В.П. Оцінка впливу флавоноїдвмісного препарату Протефлазид на моделі папіломавірусної інфекції *in vitro* . . . . 103

## МЕДИЦИНА

Дёміна Э.А. Оценка влияния профессионального облучения на цитогенетические показатели лимфоцитов периферической крови . . . 112

## ЕКОЛОГІЯ

Бабенко Л.М., Водка М.В., Акимов Ю.Н., Бабенко А.В., Косаковская І.В. Влияние экстремальных температур на ультраструктуру митохондрий клеток мезофилла листьев *Triticum spelta* . . . . . 120

## GEOSCIENCES

Orlyuk M.I., Romenets A.O. Spatial-temporal perturbation of the geomagnetic field of certain territories in the northern and southern hemispheres of the Earth . . . . . 64

## CHEMISTRY

Krupskaya T.V., Rugal A.O., Turov V.V. Water bounding peculiarities in SiO<sub>2</sub>/laevomycetin and SiO<sub>2</sub>/laevomycetin/AM1 composite systems . . . 72

Moskvina V.S., Krasyllov I.V., Khilya V.P. Synthesis of oximes of pyranoneoflavons and spiropyranoneoflavons . . . . . 79

## BIOLOGY

Buziashvili A.Yu., Yemets A.I. The obtaining of tomato and potato plants with human lactoferrin gene *hLF* . . . . . 88

Kolesnikov Ya.S., Kretynin S.V. Role of specific phospholipase D isoenzymes in biological action of jasmonic acid during plant stress responses . . . 95

Spivak M.Ya., Rybalko S.L., Starosyla D.B., Zavelevich M.P., Oleksiienko I.P., Diadiun S.T., Rudenko A.V., Atamaniuk V.P. Study of the effects of flavonoid-containing composition Proteflazid on modeled papillomavirus infection *in vitro* . . . . . 103

## MEDICINE

Domina E.A. Evaluation of the effect of professional irradiation on cytogenetic parameters of peripheral blood lymphocytes . . . . . 112

## ECOLOGY

Babenko L.M., Vodka M.V., Akimov Yu.N., Babenko A.V., Kosakivska I.V. Extreme temperature effects on the ultrastructure of mitochondria of mesophyll cells in *Triticum spelta* leaves . . . . . 120

doi: <https://doi.org/10.15407/dopovidi2018.10.003>

УДК 517.984.5

**В.А. Михайлец, В.Н. Молибога**

Институт математики НАН Украины, Киев

E-mail: [mikhailets@imath.kiev.ua](mailto:mikhailets@imath.kiev.ua), [molyboga@imath.kiev.ua](mailto:molyboga@imath.kiev.ua)

## О лакунах в спектре оператора Хилла–Шредингера с сингулярным потенциалом

*Представлено членом-корреспондентом НАН Украины А.Н. Кочубеем*

*Исследуется непрерывный спектр оператора Хилла–Шредингера в гильбертовом пространстве  $L^2(\mathbb{R})$ . Предполагается, что потенциал оператора принадлежит классу Соболева  $H_{loc}^{-1}(\mathbb{R})$ . Найдены условия, при которых последовательность длин спектральных лакун: а) ограничена; б) стремится к нулю. Особо изучен случай, когда потенциал является вещественной мерой Радона на  $\mathbb{R}$ .*

**Ключевые слова:** оператор Хилла, непрерывный спектр, спектральная лакуна, сильно сингулярный потенциал.

1. Рассмотрим дифференциальное выражение Хилла–Шредингера

$$S(q)u = -u'' + q(x)u, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

с вещественной 1-периодической обобщенной функцией  $q(\cdot)$  из негативного пространства Соболева  $H_{loc}^{-1}(\mathbb{R})$ . Ее ряд Фурье–Шварца имеет вид

$$q(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{q}(k) e^{ik2\pi x}, \quad (2)$$

где коэффициенты ряда удовлетворяют условиям

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} (1 + 2|k|)^{-2} |\hat{q}(k)|^2 < \infty$$

и

$$\hat{q}(k) = \overline{\hat{q}(-k)}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Дифференциальное выражение (1) корректно определяется как квазидифференциальное [1–5]. Оно задает в сепарабельном комплексном гильбертовом пространстве  $L^2(\mathbb{R})$  оператор Хилла–Шредингера  $S(q)$ , который определен на плотном в  $L^2(\mathbb{R})$  множестве функций

$$\text{Dom}(S(q)) = \{u \in H^1(\mathbb{R}) \mid -u'' + q(x)u \in L^2(\mathbb{R})\}$$

© В.А. Михайлец, В.Н. Молибога, 2018

ISSN 1025-6415. Допов. Нац. акад. наук Укр. 2018. № 10

и действует по формуле (1). При этом выражения  $u''$  и  $q(x)u$  понимаются в смысле распределений.

Оператор  $S(q)$  самосопряжен в гильбертовом пространстве  $L^2(\mathbb{R})$  и полуограничен снизу (см., например, [4], где также приведены иные эквивалентные определения этого оператора). Спектр оператора  $S(q)$  абсолютно непрерывен и имеет зонную структуру: его спектральные зоны перемежаются со спектральными лакунами [2–5]. При этом концы спектральных лагун  $\{\lambda_0^+(q), \lambda_n^\pm(q)\}_{n=1}^\infty$ , как и в классическом случае суммируемого с квадратом потенциала, удовлетворяют неравенствам [4, теорема С]:

$$-\infty < \lambda_0^+(q) < \lambda_1^-(q) \leq \lambda_1^+(q) < \lambda_2^-(q) \leq \lambda_2^+(q) < \lambda_3^-(q) \leq \lambda_3^+(q) \dots,$$

где  $\{\lambda_0^+(q), \lambda_n^\pm(q)\}_{n=1}^\infty$  при четных/нечетных  $n$  являются собственными значениями соответствующих периодической/полупериодической граничных задач на единичном отрезке [6, 7].

2. Обозначим через

$$\gamma_q(n) := \lambda_n^+(q) - \lambda_n^-(q) \geq 0, \quad n \in \mathbb{N},$$

длины спектральных лагун оператора  $S(q)$ . Некоторые из лагун могут вырождаться. Если  $q(\cdot) \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ , то, как известно, длины спектральных лагун стремятся к нулю, а скорость сходимости возрастает вместе с гладкостью потенциала [8–10]. В случае сингулярного потенциала ситуация качественно меняется. Примеры показывают, что в этом случае последовательность  $\{\gamma_q(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  может быть и неограничена. В связи с этим возникает вопрос о нахождении условий, при которых последовательность  $\{\gamma_q(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  принадлежит классу  $\mathbf{l}_\infty$  или  $\mathbf{c}_0$ . Его исследованию и посвящена данная работа.

Обозначим через  $s(q)$  порядок гладкости произвольного распределения  $q(\cdot)$  в гильбертовой шкале соболевских пространств на единичной окружности  $\mathbb{T}$ :

$$s(q) := \sup\{s \in \mathbb{R} \mid q \in H^s(\mathbb{T})\} \geq -1.$$

Как известно, периодическое распределение  $q(\cdot)$  вида (2) принадлежит пространству Соболева  $H^s(\mathbb{T})$  тогда и только тогда, когда

$$\|q\|_{H^s(\mathbb{T})}^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (1 + 2|k|)^{2s} |\hat{q}(k)|^2 < \infty.$$

**Теорема 1.** Пусть  $u$  оператора  $S(q)$  порядок сингулярности потенциала  $s(q) \in [-1, -1/2)$ . Тогда последовательность длин спектральных лагун  $\{\gamma_q(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  неограничена.

Доказательство теоремы использует известные асимптотические формулы для длин спектральных лагун. Пусть  $q \in H^s(\mathbb{T})$ ,  $s \in (-1, 0]$ , тогда согласно [12, теорема 1] мы имеем:

$$\gamma_q(n) = 2|\hat{q}(n)| + h^{1+2s-\delta}(n) \quad \forall \delta > 0. \tag{3}$$

Тут весовые пространства последовательностей  $h^s(\mathbb{N}) \equiv h^s(\mathbb{N}; \mathbb{C})$  определяются следующим образом:

$$h^s(\mathbb{N}) := \left\{ \{a(k)\}_{k \in \mathbb{N}} \mid \sum_{k \in \mathbb{N}} (1 + |k|)^{2s} |a(k)|^2 < \infty \right\},$$

а через  $h^s(n)$  обозначено  $n$ -й элемент последовательности, принадлежащей  $h^s(\mathbb{N})$ . Очевидно, что

$$\{a(k)\}_{k \in \mathbb{N}} \in h^s(\mathbb{N}) \Rightarrow a(k) = o(k^{-s}), \quad k \rightarrow \infty.$$

Нам также будет необходимо соотношение между гладкостью потенциала и скоростью изменения длин спектральных лагун [11, теорема 29] (см. также [12, 13]):

$$q \in H^s(\mathbb{T}) \Leftrightarrow \{\gamma_q(n)\}_{n \in \mathbb{N}} \in h^s(\mathbb{N}), \quad s \in [-1, \infty). \quad (4)$$

Доказательство проведем от противного. Предположим, что существует такой потенциал  $q \in H^{-1}(\mathbb{T})$  с  $s(q) \in (-1, -1/2)$ , для которого соответствующая последовательность длин спектральных лагун  $\{\gamma_q(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  является ограниченной, т. е.,  $\{\gamma_q(n)\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbf{l}_\infty(\mathbb{N})$ . Тогда очевидно, что  $\{\gamma_q(n)\}_{n \in \mathbb{N}} \in h^{-1/2-\delta}(\mathbb{N}) \quad \forall \delta > 0$ .

Тогда в силу (4) мы имеем  $q \in H^{-1/2-\delta}(\mathbb{T}) \quad \forall \delta > 0$ , т. е.,  $s(q) \geq -1/2$ . Полученное противоречие доказывает ошибочность сделанного предположения.

Теорему 1 дополняет

**Теорема 2.** Пусть  $\gamma$  оператора  $S(q)$  порядок сингулярности потенциала  $s(q) \in (-1/2, 0]$ . Тогда последовательность

$$\gamma_q(n) - 2|\hat{q}(n)| \in \mathbf{c}_0.$$

В частности,

- а)  $\gamma_q(n) \in \mathbf{l}_\infty$  тогда и только тогда, когда потенциал  $q(\cdot)$  является псевдомерой, т. е.  $\{\hat{q}(k)\}_{k \in \mathbb{Z}} \in \mathbf{l}_\infty$ ;
- б) условие  $\gamma_q(n) \in \mathbf{c}_0$  равносильно тому, что  $q(\cdot)$  является псевдофункцией, т. е.  $\{\hat{q}(k)\}_{k \in \mathbb{Z}} \in \mathbf{c}_0$ .

**Доказательство.** Пусть  $s(q) \in (-1, 2, 0]$ . Тогда  $q \in H^{s(q)-\varepsilon}(\mathbb{T}) \quad \forall \varepsilon > 0$ , и в силу формулы (3) мы имеем:

$$\gamma_q(n) = 2|\hat{q}(n)| + h^{1+2s(q)-2\varepsilon-\delta}(n) \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \forall \delta > 0. \quad (5)$$

Поскольку  $s(q) > -1/2$ , то мы можем выбрать  $\varepsilon > 0$  и  $\delta > 0$  таким образом, чтобы выполнялось неравенство

$$1 + 2s(q) - 2\varepsilon - \delta \geq 0.$$

Тогда асимптотические оценки принимают вид

$$\gamma_q(n) = 2|\hat{q}(n)| + h^0(n). \quad (6)$$

Но  $h^0(n) = o(1)$ ,  $n \rightarrow \infty$ . Поэтому из (6) следуют утверждения теоремы.

**Следствие.** Пусть  $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  — произвольная последовательность натуральных чисел, а  $c \in [0, +\infty]$ . Тогда если  $s(q) \in (-1/2, 0]$ , то

$$\gamma_q(n_k) \rightarrow 2c \Leftrightarrow |\hat{q}(n_k)| \rightarrow c,$$

когда  $k \rightarrow \infty$ .

Теорема 2 позволяет строить примеры потенциалов, для которых последовательность длин спектральных лакун имеет заданные свойства. В частности, таких, что  $s(q) = 0$ , но последовательность  $\{\gamma_q(n)\}_{n \in \mathbb{N}} \notin \mathbf{1}_\infty$ .

**Пример.** Пусть

$$v(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{v}(k) e^{ik2\pi x},$$

где коэффициенты ряда Фурье–Шварца определены следующим образом:

$$\hat{v}(k) := \begin{cases} n, & \text{если } |k| = 2^n, n \in \mathbb{N}, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{v}(k)|^2 = 2 \sum_{n \in \mathbb{N}} n^2 = +\infty, \quad \text{т. е., } v \notin L^2(\mathbb{T}).$$

Однако для каждого  $\delta > 0$

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} (1 + 2|k|)^{-2\delta} |\hat{v}(k)|^2 = 2 \sum_{n \in \mathbb{N}} (1 + 2^{n+1})^{-2\delta} n^2 < \infty, \quad \text{т. е., } v \in H^{-\delta}(\mathbb{T}).$$

В силу теоремы 2 последовательность длин спектральных лакун неограничена, а в силу следствия из нее

$$\lim_{M \ni n \rightarrow \infty} \gamma_q(n) = +\infty;$$

$$\lim_{M \nexists n \rightarrow \infty} \gamma_q(n) = 0,$$

где  $M := \{n \in \mathbb{N} \mid n = 2^k, k \in \mathbb{N}\}$ .

**3.** Вопрос о том, верна ли теорема 2 при  $s(q) = -\frac{1}{2}$ , остается пока открытым. Этот случай особо важен для физических приложений, так как вместе со случаем  $s(q) > -\frac{1}{2}$  он охватывает все вещественные меры Радона на  $\mathbb{R}$ , которые являются обобщенными производными функций из класса  $BV_{\text{loc}}(\mathbb{R}) \subset L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ . Он требует отдельного исследования. Вместе с тем для мер нами установлена

**Теорема 3.** Последовательность длин спектральных лакун  $\{\gamma_q(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  оператора Хилла–Шредингера  $S(q)$  с потенциалом  $q(\cdot)$ , который является вещественной 1-периодической мерой Радона, ограничена

Доказательство теоремы 3 использует результат [14, теорема 12.8.1] и [15, теорема 1]. Оно будет приведено в другой публикации.

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Савчук А.М., Шкаликов А.А. Операторы Штурма Лиувилля с потенциалами–распределениями. Тр. Моск. мат. об-ва. 2003. **64**. С. 159–212.

2. Hryniv R.O., Mykytyuk Ya.V. 1-D Schrödinger operators with periodic singular potentials. *Methods Funct. Anal. Topology*. 2001. **7**, № 4. P. 31–42.
3. Korotyaev E. Characterization of the spectrum of Schrödinger operators with periodic distributions. *Int. Math. Res. Not.* 2003. **37**. P. 2019–2031. doi: <https://doi.org/10.1155/S1073792803209107>
4. Mikhailets V., Molyboga V. One-dimensional Schrödinger operators with singular periodic potentials. *Methods Funct. Anal. Topology*. 2008. **14**, № 2. P. 184–200.
5. Djakov P., Mityagin B. Fourier method for one-dimensional Schrödinger operators with singular periodic potentials. *Topics in Operator Theory. Operator Theory: Advances and Applications*, Vol. 203. Basel: Birkhäuser, 2010. P. 195–236. doi: [https://doi.org/10.1007/978-3-0346-0161-0\\_9](https://doi.org/10.1007/978-3-0346-0161-0_9)
6. Mikhailets V., Molyboga V. Singularly perturbed periodic and semiperiodic differential operators. *Ukr. Math. J.* 2007. **59**, № 6. P. 858–873. doi: <https://doi.org/10.1007/s11253-007-0055-7>
7. Mikhailets V., Molyboga V. On the spectrum of singular perturbations of operators on the circle. *Math. Notes*. 2012. **91**, № 3–4. P. 588–591. doi: <https://doi.org/10.1134/S0001434612030352>
8. Марченко В.А., Островский И.В. Характеристика спектра оператора Хилла. *Матем. сб.* 1975. **97**, № 4. С. 540–606.
9. Djakov P., Mityagin B. Instability zones of periodic 1-dimensional Schrödinger and Dirac operators. *Russ. Math. Surv.* 2006. **61**, № 4. P. 663–766. doi: <https://doi.org/10.1070/RM2006v061n04ABEH004343>
10. Mikhailets V., Molyboga V. Smoothness of Hill's potential and lengths of spectral gaps. *Spectral Theory, Mathematical System Theory, Evolution Equations, Differential and Difference Equations. Operator Theory: Advances and Applications*, Vol. 221. Basel: Birkhäuser, 2012. P. 469–479. doi: [https://doi.org/10.1007/978-3-0348-0297-0\\_27](https://doi.org/10.1007/978-3-0348-0297-0_27)
11. Djakov P., Mityagin B. Spectral gaps of Schrödinger operators with periodic singular potentials. *Dynam. Part. Differ. Eq.* 2009. **6**, № 2. P. 95–165. doi: <https://doi.org/10.4310/DPDE.2009.v6.n2.a1>
12. Mikhailets V., Molyboga V. Spectral gaps of the one-dimensional Schrödinger operators with singular periodic potentials. *Methods Funct. Anal. Topology*. 2009. **15**, № 1. P. 31–40.
13. Mikhailets V., Molyboga V. Hill's potentials in Hörmander spaces and their spectral gaps. *Methods Funct. Anal. Topology*. 2011. **17**, № 3. P. 235–243.
14. Atkinson F.V. Discrete and continuous boundary problems. *Mathematics in Science and Engineering*. Vol. 8. New York, London: Academic Press, 1964. xiv+570 pp.
15. Молибога В.Н. Характеризация спектральных лагун в спектре оператора Хилла с потенциалом–распределением. *Зб. праць Інституту математики НАН України*. 2013. **10**, № 2. С. 248–259.

Поступило в редакцию 12.07.2018

## REFERENCES

1. Savchuk, A. M. & Shkalikov, A. A. (2003). Sturm–Liouville operators with distribution potentials. *Tr. Mosk. mat. ob-va.*, **64**, pp. 159-212 (in Russian).
2. Hryniv, R. O. & Mykytyuk, Ya. V. (2001). 1-D Schrödinger operators with periodic singular potentials. *Methods Funct. Anal. Topology*, **7**, No. 4, pp. 31-42.
3. Korotyaev, E. L. (2003). Characterization of the spectrum of Schrödinger operators with periodic distributions. *Int. Math. Res. Not.*, **37**, pp. 2019-20131. doi: <https://doi.org/10.1155/S1073792803209107>
4. Mikhailets, V. & Molyboga, V. (2008). One-dimensional Schrödinger operators with singular periodic potentials. *Methods Funct. Anal. Topology*, **14**, No. 2, pp. 184-200.
5. Djakov, P. & Mityagin, B. (2010). Fourier method for one-dimensional Schrödinger operators with singular periodic potentials. In *Topics in Operator Theory. Operator Theory: Advances and Applications* (Vol. 203) (pp. 195-236). Basel: Birkhäuser. doi: [https://doi.org/10.1007/978-3-0346-0161-0\\_9](https://doi.org/10.1007/978-3-0346-0161-0_9)
6. Mikhailets, V. A. & Molyboga, V. M. (2007). Singularly perturbed periodic and semiperiodic differential operators. *Ukr. Math. J.*, **59**, No. 6, pp. 858-873. doi: <https://doi.org/10.1007/s11253-007-0055-7>
7. Mikhailets, V. A. & Molyboga, V. (2012). On the spectrum of singular perturbations of operators on the circle. *Math. Notes*, **91**, No. 3-4, pp. 588-591. doi: <https://doi.org/10.1134/S0001434612030352>
8. Marčenko, V. A & Ostrov's'kiĭ, I. V. (1975). A characterization of the spectrum of the Hill operator. *Mat. USSR-Sb.*, **26**, No. 4, pp. 493-554.



9. Djakov, P. & Mityagin, B. (2006). Instability zones of periodic 1-dimensional Schrödinger and Dirac operators. Russ. Math. Surv., 64, No. 4, pp. 663-766. doi: <https://doi.org/10.1070/RM2006v061n04ABEH004343>
10. Mikhailets, V. & Molyboga, V. (2012). Smoothness of Hill's potential and lengths of spectral gaps. Spectral Theory, Mathematical System Theory, Evolution Equations, Differential and Difference Equations. Operator Theory: Advances and Applications (Vol. 221) (pp. 469-479). Basel: Birkhäuser. doi: [https://doi.org/10.1007/978-3-0348-0297-0\\_27](https://doi.org/10.1007/978-3-0348-0297-0_27)
11. Djakov, P. & Mityagin, B. (2009). Spectral gaps of Schrödinger operators with periodic singular potentials. Dynam. Part. Differ. Eq., 6, No. 2, pp. 95-165. doi: <https://doi.org/10.4310/DPDE.2009.v6.n2.a1>
12. Mikhailets, V. & Molyboga, V. (2009). Spectral gaps of the one-dimensional Schrödinger operators with singular periodic potentials. Methods Funct. Anal. Topology, 15, No. 1, pp. 31-40.
13. Mikhailets, V. & Molyboga, V. (2011). Hill's potentials in Hörmander spaces and their spectral gaps. Methods Funct. Anal. Topology, 17, No. 3, pp. 235-243.
14. Atkinson, F. V. (1964). Discrete and continuous boundary problems. Mathematics in Science and Engineering, Vol. 8. New York, London: Academic Press.
15. Molyboga, V. (2013). Characterization of spectral gaps in the spectrum of Hill's operator with distributional potential. Zb. Prats Instytutu matematyky NAN Ukrajin, 10, No. 2, pp. 248-259 (in Russian).

Received 12.07.2018

*В.А. Михайлець, В.М. Молибога*

Інститут математики НАН України, Київ  
E-mail: [mikhailets@imath.kiev.ua](mailto:mikhailets@imath.kiev.ua), [molyboga@imath.kiev.ua](mailto:molyboga@imath.kiev.ua)

#### ПРО ЛАКУНИ В СПЕКТРІ ОПЕРАТОРА ХІЛЛА—ШРЕДІНГЕРА З СИНГУЛЯРНИМ ПОТЕНЦІАЛОМ

Досліджується неперервний спектр оператора Хілла—Шредінгера в гільбертовому просторі  $L^2(\mathbb{R})$ . Вважається, що потенціал оператора належить до класу Соболева  $H_{\text{loc}}^{-1}(\mathbb{R})$ . Знайдено умови, за яких послідовність довжин спектральних лакун: а) обмежена; б) прямує до нуля. Окремо досліджено випадок, коли потенціал є дійсною мірою Радона на  $\mathbb{R}$ .

**Ключові слова:** *оператор Хілла, неперервний спектр, спектральна лакуна, сильно сингулярний потенціал.*

*V.A. Mikhailets, V.M. Molyboga*

Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine, Kiev  
E-mail: [mikhailets@imath.kiev.ua](mailto:mikhailets@imath.kiev.ua), [molyboga@imath.kiev.ua](mailto:molyboga@imath.kiev.ua)

#### ON SPECTRAL GAPS OF THE HILL—SCHRÖDINGER OPERATOR WITH SINGULAR POTENTIAL

We study the continuous spectrum of the Hill—Schrödinger operator in a Hilbert space  $L^2(\mathbb{R})$ . The operator potential belongs to a Sobolev space  $H_{\text{loc}}^{-1}(\mathbb{R})$ . The conditions are found for the sequence of lengths of spectral gaps to: a) be bounded; b) converge to zero. The case where the potential is a real Radon measure on  $\mathbb{R}$  is studied separately.

**Keywords:** *Hill's operator, continuous spectrum, spectral gap, strongly singular potential.*