ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

МЕХАНІКА
MECHANICS

https://doi.org/10.15407/dopovidi2026.05.013
УДК 539.3

М.В. Войтко, https://orcid.org/0000-0001-5021-5091

Фізико-механічний інститут ім. Г.В. Карпенка НАН України, Львів, Україна
E-mail: myron.voytko@gmail.com

Взаємодія SH-хвилі зі скінченною тріщиною в пружному шарі

Представлена членом-кореспондентом НАН України В.В. Михаськівим

Розв'язано задачу дифракції нормальної SH-хвилі на скінченній тріщині в плоскому пружному шарі, розташованій паралельно до його граней. Тріщину змодельовано нескінченно тонким розрізом, на берегах якого відсутні напруження, а сформовані тріщиною області розглянуто як пружні хвилеводи. Грані шару також вважали вільними від напружень. Використовуючи перетворення Фур'є, відповідну змішану крайову задачу дифракції зведено до функціонального рівняння типу Вінера—Гопфа. За допомогою процедури факторизації його зведено до нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь 2-го роду. Виконано асимптотичний аналіз матричних елементів отриманої системи і показано, що вона має єдиний розв'язок у просторі послідовностей l_2, за винятком дискретних значень хвильового числа, які відповідають спектру задачі. Для переходу в координатний простір використано обернене перетворення Фур'є, а вирази для дифрагованого поля зміщень подано рядами. Проведено чисельний аналіз залежності поведінки амплітуди поля зміщень на лицьових гранях шару від ширини тріщини за заданих фіксованої глибини її залягання та частоти опромінення. За результатами аналізу встановлено ознаки для ідентифікації країв тріщини, які можна використати для інтерпретації результатів акустико-оптичного діагностування.

***Ключові слова**: SH-хвиля, дифракція, тріщина, пружний шар, метод Вінера—Гопфа.*

Вступ. Розв'язування задач про поширення пружних хвиль у шаруватих структурах з неоднорідностями є важливим для дослідження широкого класу проблем, які виникають у механіці, акустиці, сейсмології, геофізиці [1, 2]. Коректні розв'язки таких задач дають змогу глибше зрозуміти природу багатьох фізичних процесів в об'єктах дослідження. Такі задачі є важливими і для розв'язання проблем ідентифікації дефектів під час розроблення технологій технічної діагностики та неруйнівного контролю [3]. У статті роз-

Цитування: Войтко М.В. Взаємодія SH-хвилі зі скінченною тріщиною в пружному шарі. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2026. № 5. С. 13—21. https://doi.org/10.15407/dopovidi2026.05.013

© Видавець ВД «Академперіодика» НАН України, 2026. Стаття опублікована за умовами відкритого доступу за ліцензією CC BY-NC-ND (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/)

глянуто задачу дифракції нормальної SH-хвилі на тонкому дефекті в шарі, розміщеному паралельно до його лицьових поверхонь, для з'ясування особливостей формування розподілу поля зміщень на поверхнях діагностування з метою його ідентифікації. Цю задачу розв'язуватимемо методом Вінера—Гопфа [4—6], який дає змогу отримати розв'язки із заданою точністю, що можуть бути використані як реперні для розроблення більш загальних, зокрема чисельних, методів [7—9]. Раніше у роботах [10, 11] було розв'язано задачу про взаємодію SH-хвилі з напівнескінченною тріщиною в пружному шарі та з тонким міжфазним дефектом з'єднання плоского шару з інтерфейсом і проаналізовано поведінку поля зміщень на поверхнях шару залежно від параметрів задачі. У роботі [12] цю задачу розв'язано методом часткових областей для дослідження енергетичних коефіцієнтів відбивання і проникнення нормальних хвиль через область, яка містить розріз скінченної довжини.

Метою дослідження є вивчення дифракції нормальної SH-хвилі на скінченній тріщині в пружному шарі та аналіз розподілу поля зміщень на його поверхнях для ідентифікації внутрішніх дефектів.

Формулювання задачі. У декартовій системі координат $Oxyz$ розглянемо пружний шар $P:\{x\in(-\infty,\infty),\ y\in[-d,+d],\ z\in(-\infty,\infty)\}$ з внутрішньою тріщиною скінченної ширини $\Gamma:\{x\in(-L,0),\ y=h\in P\}$ (рис. 1), яка опромінюється однією з незгасних поперечних нормальних SH-хвилеводних мод, що поширюються в шарі з гармонічною залежністю від часу $e^{-i\omega t}$ (цей множник надалі опускаємо). Дифракційні процеси в цій динамічній системі описуються однією скалярною функцією $u = u(x, y)$, яка є z-компонентою вектора зміщень дифрагованого поля $\mathbf{u} \equiv \mathbf{e}_z u(x, y)$. Поле зміщень $u(x, y)$ шукаємо з розв'язку крайової задачі для рівняння Гельмгольца

$$\partial_x^2 u + \partial_y^2 u + k^2 u = 0\,,\ \ (x,y)\in P\,. \tag{1}$$

Функція $u(x, y)$ повинна задовольняти граничні умови на вільних межах шару та тріщини:

$$\tau_{zy} = \mu\partial_y u^{\text{tot}}(x,y) = 0,\ \ y=\pm d,\ \ x\in(-\infty,\infty)\,, \tag{2}$$

$$\tau_{zy} = \mu\partial_y u^{\text{tot}}(x,y) = 0,\ \ y=h\pm 0,\ \ x\in(-L,0)\,, \tag{3}$$

Тут $u^{\text{tot}}(x, y) = u(x, y) + u^{\text{inc}}(x, y)$ — повне поле, де $u^{\text{inc}} = u^{\text{inc}}(x,y) = e^{\gamma_j x}\cos(\beta_j y)$ — збуджувальна хвиля, яка поширюється у від'ємному напрямку осі Ox; $\beta_j = \pi j/2d$, $j = 0, 2, 4, \ldots$; $\gamma_j = \sqrt{\beta_j^2 - k^2}$, $\operatorname{Re}\gamma_j > 0$; $k = k' + ik''$ — хвильове число ($k', k'' > 0$, $k' >> k''$).

Розв'язок крайової задачі (1)—(3) шукаємо у класі функцій, які забезпечують виконання умов граничного поглинання, коли $|x| \to \infty$, а також умову обмеженості енергії на вершинах тріщини [5, 6]. У нашому випадку умова обмеженості енергії зводиться до виконання умов Мейкснера на вершинах тріщини [5, 6]:

$$u \sim \rho_{1(2)}^{1/2},\ \partial_y u \sim \rho_{1(2)}^{-1/2},\ \ \rho_1 = [x^2 + y^2]^{1/2} \to 0\,,\ \ \rho_2 = [(x+L)^2 + y^2]^{1/2} \to 0\,, \tag{4}$$

де $\rho_{1(2)}$ — відстань до вершин тріщини в локальній системі координат.

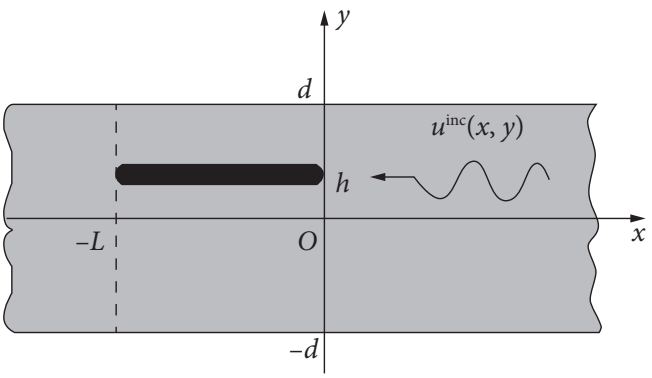


Рис. 1. Геометрична схема задачі

Розв'язування задачі. Невідоме поле подамо інтегралом Фур'є:

$$u(x,y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}U(\alpha,y)e^{-i\alpha x}\,d\alpha\,, \tag{5}$$

де $\alpha=\mathrm{Re}\,\alpha+i\,\mathrm{Im}\,\alpha,\ \alpha\equiv\sigma+i\tau$.

Використовуючи граничні умови (2), отримаємо подання Фур'є трансформанти дифрагованого поля у вигляді

$$U(\alpha,y)=\begin{cases}-\dfrac{e^{-i\alpha L}\Psi^{-}(\alpha)+\Psi^{(+)}(\alpha)}{\gamma\,\mathrm{sh}\,(\gamma l_2)}\,\mathrm{ch}\gamma(y-d),\ \ y\in[h,d],\\[2ex] \dfrac{e^{-i\alpha L}\Psi^{-}(\alpha)+\Psi^{(+)}(\alpha)}{\gamma\,\mathrm{sh}\,(\gamma l_3)}\,\mathrm{ch}\gamma(y+d),\ \ y\in[-d,h].\end{cases} \tag{6}$$

Тут $l_2=d-h$; $l_3=d+h$;

$$\Psi^{(+)}(\alpha)=U'^{+}(\alpha,h)-\frac{i\beta_j\sin(\beta_j h)}{\sqrt{2\pi}(\alpha-i\gamma_j)}\,; \tag{7}$$

$$\Psi^{-}(\alpha)=U'^{-}(\alpha,h)+\frac{i\beta_j\sin(\beta_j h)e^{-\gamma_j L}}{\sqrt{2\pi}(\alpha-i\gamma_j)}\,, \tag{8}$$

де

$$U'^{-}(\alpha,h\pm0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{-L}\partial_y u(x,h\pm0)e^{i\alpha(x+L)}dx\,; \tag{9}$$

$$U'^{+}(\alpha,h\pm0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{\infty}\partial_y u(x,h\pm0)e^{i\alpha x}dx\,. \tag{10}$$

Далі, використовуючи умови неперервності поля зміщень і напружень за межами тріщини, зведемо задачу до рівняння типу Вінера—Гопфа:

$$M(\alpha)[\Psi^{(+)}(\alpha)+e^{-i\alpha L}\Psi^{-}(\alpha)]+J_1(\alpha)=0,\ \alpha\in\prod, \tag{11}$$

де смуга регулярності $\prod:\{|\ \tau\ |<\tau_0\}$ охоплює дійсну вісь, $\tau_0 < k''$;

$$M(\alpha)=-\frac{\operatorname{sh}(2\gamma d)}{\gamma\operatorname{sh}(\gamma l_2)\operatorname{sh}(\gamma l_3)}; \tag{12}$$

$$J_1(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-L}^{0}(u(x,h+0)-u(x,h-0))e^{i\alpha x}dx. \tag{13}$$

Тут $\Psi^{-}(\alpha)$, $\Psi^{(+)}(\alpha)$, $J_1(\alpha)$ — невідомі функції з відомими властивостями регулярності. Функція $\Psi^{-}(\alpha)$ регулярна в комплексній півплощині $\tau < \tau_0$, а $\Psi^{(+)}(\alpha)$ — у півплощині $\tau > -\tau_0$, за винятком точки $\alpha = i\gamma_j$, де вона має простий полюс; $\gamma=\sqrt{\alpha^2-k^2}$; $J_1(\alpha)$ — ціла функція, яка за фізичним змістом є трансформантою Фур'є стрибка зміщень на берегах тріщини.

Із поведінки поля напружень у вершинах тріщини (4) знаходимо асимптотику поведінки функцій (7), (8) в областях регулярності: $\overset{(+)}{\Psi}{}^{-}(\alpha)=O(\alpha^{-1/2})$, коли $|\alpha|\to\infty$. З умови (4) також випливає, що ціла функція (13) в області $\tau < \tau_0$ спадає до нуля, $J_1(\alpha) = O(\alpha^{-3/2})$, а коли $\tau > -\tau_0$, $e^{i\alpha L}J_1(\alpha)=O(\alpha^{-3/2})$ при $|\alpha|\to\infty$.

Функція (12) є парною, регулярною в $\prod$ і прямує до нуля як α^{-1} в області регулярності при $|\alpha|\to\infty$. За межами смуги регулярності ця функція допускає прості нулі та полюси, і можна провести її факторизацію методом нескінченних добутків [4, 5]:

$$M(\alpha)=M_{+}(\alpha)M_{-}(\alpha). \tag{14}$$

Тут $M_{\mp}(\alpha)=M_{\pm}(-\alpha)$,

$$M_{\pm}(\alpha)=-\sqrt{\frac{k\sin(2kd)}{\sin(kl_2)\sin(kl_3)}}\,\frac{e^{\mp\frac{i\alpha}{\pi}\left(l_2\ln\left(\frac{2d}{l_2}\right)+l_3\ln\left(\frac{2d}{l_3}\right)\right)}\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left[1\pm\frac{\alpha}{i\gamma_{n1}}\right]e^{\pm i\alpha\frac{2d}{n\pi}}}{(k\pm\alpha)\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left[1\pm\frac{\alpha}{i\gamma_{n2}}\right]e^{\pm i\alpha\frac{l_2}{n\pi}}\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left[1\pm\frac{\alpha}{i\gamma_{n3}}\right]e^{\pm i\alpha\frac{l_3}{n\pi}}}, \tag{15}$$

де $\gamma_{n1}=\frac{1}{2d}\sqrt{(\pi n)^2-(2kd)^2}$, $\gamma_{n2(3)}=\frac{1}{l_{2(3)}}\sqrt{(\pi n)^2-(kl_{2(3)})^2}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$.

У формулах (14) функції $M_{\pm}(\alpha)$ регулярні і не мають нулів відповідно у півплощинах $\tau > -\tau_0$ та $\tau < \tau_0$. В областях регулярності при $|\alpha|\to\infty$ для них справедлива асимптотична оцінка $M_{\pm}(\alpha)=O(\alpha^{-1/2})$. За межами областей регулярності функції $M_{\pm}(\alpha)$ мають прості нулі в точках $\alpha=\mp i\gamma_{n1}$ і полюси при $\alpha=\mp i\gamma_{n2}$ та $\alpha=\mp i\gamma_{n3}$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$), а також простий полюс, коли $\alpha=\mp k$.

Врахувавши розклад (15), а також аналітичні властивості функцій, що входять до рівняння Вінера—Гопфа (11), і застосувавши процедуру декомпозиції, зведемо його до функціональних співвідношень:

$$M_+(\alpha)\Psi^{(+)}(\alpha)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{i\xi_n L}\Psi^-(-\xi_n)}{[M_+^{-1}(-\xi_n)]'(\alpha+\xi_n)}=f(\alpha), \tag{16}$$

$$M_-(\alpha)\Psi^-(\alpha)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{i\xi_n L}\Psi^{(+)}(\xi_n)}{[M_-^{-1}(\xi_n)]'(\alpha-\xi_n)}=0, \tag{17}$$

де $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}=k\bigcup\{i\gamma_{m2}\}_{m=1}^{\infty}\bigcup\{i\gamma_{r3}\}_{r=1}^{\infty}$ — полюси функції $M_-(\alpha)$ ($\operatorname{Im}\xi_n>0$, $\xi_1=k$), впорядковані так, що $\operatorname{Im}\xi_{n+1}\geq\operatorname{Im}\xi_n$; $f(\alpha)=-i(2\pi)^{-1/2}\beta_j\sin(\beta_j h)M_+(i\gamma_j)/(\alpha-i\gamma_j)$.

Поклавши в рівнянні (16) $\alpha=\xi_q$, а в рівнянні (17) $\alpha=-\xi_q$, $q=1, 2, \ldots$, і записавши суму та різницю для кожного q, отримаємо дві незв'язані нескінченні системи лінійних алгебраїчних рівнянь (НСЛАР) другого роду

$$\left[\mathbf{I}\pm\mathbf{A}\right]\mathbf{X}=\mathbf{F}. \tag{18}$$

Тут $\mathbf{X}:\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$, $X_n=X_n^+\pm X_n^-$, $X_n^+=M_+(\xi_n)\Psi^{(+)}(\xi_n)$, $X_n^-=M_+(\xi_n)\Psi^-(-\xi_n)$; $X_n=O(n^{-1})$ при $n\to\infty$; $\mathbf{A}:\{a_{qn}\}_{q,n=1}^{\infty}$,

$$a_{qn}=e^{i\xi_n L}\Psi^{(+)}(\xi_n)/\{[M_-^{-1}(\xi_n)]'M_+(\xi_n)(\xi_q+\xi_n)\};\ \mathbf{F}:\{f_q=f(\xi_q)\}_{q=1}^{\infty}.$$

Для матричних елементів цієї системи справедлива асимптотична оцінка: $|a_{mn}|\leq Ce^{-\pi nL/d}/(m+n)$, коли $m, n\to\infty$, де $C=\text{const}$, а отже, виконується умова $\sum_{m,n}|a_{mn}|^2<\infty$. Тоді оператор $\mathbf{A}$ є компактним в l_2. Оскільки вектор $\mathbf{F}\subset l_2$, то НСЛАР (18) має єдиний розв'язок в l_2 для довільних параметрів задачі, за винятком дискретних значень хвильового числа, що належать його спектру. Цей розв'язок знаходимо методом редукції.

Дифраговані поля зміщень. Застосовуючи обернене перетворення Фур'є, дифраговане поле зміщень записуємо у вигляді

$$u(x,y)=\mp\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}[\Psi^{(+)}(\alpha)+e^{-i\alpha L}\Psi^-(\alpha)]\frac{\operatorname{ch}(\gamma(y\mp d))}{\gamma\operatorname{sh}(\gamma l_{2(3)})}e^{-i\alpha x}\,d\alpha. \tag{19}$$

Тут верхні знаки беремо для $y\in[h,d]$, а нижні — для $y\in[-d,h]$.

Обчислення інтегралів у (19) виконаємо для чотирьох областей:

$$\mathrm{D}_1=\{x,y: x>0, y\in[-d,d]\},$$
$$\mathrm{D}_2=\{x,y: -L<x<0, y\in[h,d]\},$$
$$\mathrm{D}_3=\{x,y: -L<x<0, y\in[-d,h]\},$$
$$\mathrm{D}_4=\{x,y: x<-L, y\in[-d,d]\}.$$

Далі, замикаючи контури інтегрування у відповідні півплощини та використовуючи лему Жордана, отримуємо вирази для полів зміщень:

$$u_{\mathrm{D}_1}(x,y)=\sum_{q=1}^{\infty}R_q\sin(\pi q l_2/2d)e^{-\gamma_{q1}x}\cos\left(\frac{\pi q(y-d)}{2d}\right),\ \ x,y\in\mathrm{D}_1\,, \tag{20}$$

$$u_{\mathrm{D}_2}(x,y)=-\frac{\sqrt{2\pi}}{l_2}\sum_{q=0}^{\infty}\frac{\varepsilon_q(-1)^q}{\gamma_{q2}}[\Psi^{(+)}(i\gamma_{q2})e^{\gamma_{q2}x}+\Psi^{-}(-i\gamma_{q2})e^{-\gamma_{q2}(x+L)}]\times$$

$$\times\cos\left(\frac{\pi q(y-d)}{l_2}\right)-u^{\mathrm{inc}},\ \ x,y\in\mathrm{D}_2, \tag{21}$$

$$u_{\mathrm{D}_3}(x,y)=\frac{\sqrt{2\pi}}{l_3}\sum_{q=0}^{\infty}\frac{\varepsilon_q(-1)^q}{\gamma_{q3}}[\Psi^{(+)}(i\gamma_{q3})e^{\gamma_{q3}x}+\Psi^{-}(-i\gamma_{q3})e^{-\gamma_{q3}(x+L)}]\times$$

$$\times\cos\left(\frac{\pi q(y+d)}{l_3}\right)-u^{\mathrm{inc}},\ \ x,y\in\mathrm{D}_3, \tag{22}$$

$$u_{\mathrm{D}_4}(x,y)=-u^{\mathrm{inc}}-\sum_{q=1}^{\infty}T_q\sin(\pi q l_3/2d)e^{\gamma_{q1}(x+L)}\cos\left(\frac{\pi q(y-d)}{2d}\right),\ \ x,y\in\mathrm{D}_4\,. \tag{23}$$

Тут

$$R_q=\frac{\sqrt{2\pi}}{(2d)^2}\frac{(-1)^q\pi q M_+(i\gamma_{q1})}{\gamma_{q1}}\left[\frac{1}{l_2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varepsilon_n e^{-\gamma_{n2}L}\Psi^{-}(-i\gamma_{n2})}{\gamma_{n2}M_+(i\gamma_{n2})(\gamma_{q1}-\gamma_{n2})}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{l_3}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\varepsilon_m e^{-\gamma_{m3}L}\Psi^{-}(-i\gamma_{m3})}{\gamma_{m3}M_+(i\gamma_{m3})(\gamma_{q1}-\gamma_{m3})}-\frac{\beta_j\sin(\beta_j h)M_+(i\gamma_j)}{\sqrt{2\pi}(\gamma_{q1}+\gamma_j)}\right],$$

$$T_q=\frac{\sqrt{2\pi}}{(2d)^2}\frac{(-1)^q\pi q M_+(i\gamma_{q1})}{\gamma_{q1}}\left[\frac{1}{l_2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varepsilon_n e^{-\gamma_{n2}L}\Psi^{(+)}(i\gamma_{n2})}{\gamma_{n2}M_+(i\gamma_{n2})(\gamma_{q1}-\gamma_{n2})}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{l_3}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\varepsilon_m e^{-\gamma_{m3}L}\Psi^{(+)}(i\gamma_{m3})}{\gamma_{m3}M_+(i\gamma_{m3})(\gamma_{q1}-\gamma_{m3})}\right].$$

Чисельний аналіз результатів. Введемо безрозмірні величини $\overline{y}=y/2d$, $\overline{x}=x/2d$, $\overline{h}=h/2d$, $\overline{L}=L/2d$ та $\overline{\omega}=2kd$. Дослідимо залежності амплітуди повного поля зміщень $|u^{\mathrm{tot}}|$ від нормованої координати $\overline{x}$ на лицьових поверхнях $\overline{y}=\pm0{,}5$ шару P (рис. 2) за фіксованих безрозмірних параметрів $\overline{h}$ $(0<\overline{h}<0{,}5)$ та $\overline{L}$. Проаналізуємо поширення першої не-

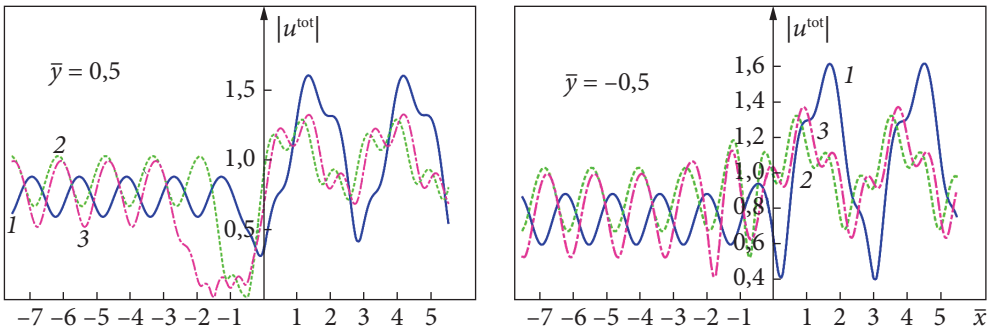


Рис. 2. Залежність поля зміщень $|u^{\text{tot}}|$ від нормованої координати $\bar{x}$ на верхній (*а*) та нижній (*б*) вільних поверхнях шару *P* за фіксованих $\bar{h}$ = 0,05, $\bar{\omega}$ = 6,38 та $\bar{L}$: *1* — $\bar{L}$ = 0,5; *2* — 1,5; *3* — 2,5

нульової моди ($j = 2$) в області D_1 за умови $2\pi < \bar{\omega} < 4\pi$. Обчислення виконаємо для одного значення параметра $\bar{h} = 0{,}05$ (тріщина розташована близько до середини шару) та трьох значень $\bar{L} = \{0{,}5;\ 1{,}5;\ 2{,}5\}$ за опромінення частотою $\bar{\omega} = 6{,}38$, що відповідає поширенню без згасання моди $j = 2$. Тоді перші дві нормовані критичні частоти дифрагованої нормальної хвилі для областей D_2 і D_3 будуть відповідно $\bar{\omega}^{(2)}_{\{1;2\}} = \{20\pi/9;\ 40\pi/9\}$ і $\bar{\omega}^{(3)}_{\{1;2\}} = \{20\pi/11;\ 40\pi/11\}$. За частоти зондування $\bar{\omega}$ = 6,38 в області D_2 поширюватиметься тільки нульова мода ($\bar{\omega} < \bar{\omega}^{(2)}_1$), а у D_3 дві — нульова і перша ($\bar{\omega}^{(3)}_1 < \bar{\omega} < \bar{\omega}^{(3)}_2$). Згідно з наведеними графіками (див. рис. 2), розподіл дифрагованого поля зміщень $|u^{\text{tot}}|$ має осциляційний характер на обох гранях шару. Як випливає з виразів (21), (22), поля в цих областях формуються однорідними (біжучими) модами хвиль, які поширюються в протилежних напрямках, тому внаслідок їхньої інтерференції відбуваються осциляції поля зміщень на гранях шару. Для областей $D_{1(4)}$ критичними частотами дифрагованої хвилі будуть $\bar{\omega}^{(1,4)}_{\{1;2\}} = \{\pi; 2\pi\}$, і оскільки $\bar{\omega}^{(1,4)}_1 < \bar{\omega}^{(1,4)}_2 < \bar{\omega}$, то в цих областях однорідними будуть дві перші нормальні моди, у формування яких основний внесок дають два перші доданки у виразах (20), (23). Крім того, в області D_1 на формування $|u^{\text{tot}}|$ також впливатиме адитивний внесок u^{inc}, тому розподіл дифрагованого поля матиме іншу амплітуду осциляцій, що дає змогу ідентифікувати край тріщини. Для областей $D_{1(4)}$ характерним є те, що коливання на обох гранях відбуваються практично періодично. Із поведінки поля в цих областях бачимо, що амплітуда осциляцій $|u^{\text{tot}}|$ більша на нижній грані ($\bar{y} = -0{,}5$) порівняно з верхньою ($\bar{y} = 0{,}5$). Також зі зростанням $\bar{L}$ амплітуда осциляцій в області D_1 зменшується, а в області D_4 збільшується (криві *1—3* на рис. 2). Дещо іншу поведінку спостерігаємо для областей $D_{2(3)}$, причому ця відмінність помітніша для більших тріщин в області D_2 (див. рис. 2, *а*) там, де може поширюватися тільки нульова мода. В околі точок стику областей (D_1, D_2), (D_4, D_2) і (D_1, D_3), (D_4, D_3) на вільній поверхні шару істотно змінюється поведінка модулів поля зміщень, що свідчить про можливість ідентифікації країв дефекту.

Висновки. Розв'язано задачу дифракції нормальної SH-хвилі на тріщині скінченної ширини в пружному шарі. Розв'язок отримано методом Вінера—Гопфа. Встановлено залежності розподілу поля зміщень на вільних від напружень лицьових поверхнях шару від параметрів тріщини за фіксованої частоти зондування. Виявлено ознаки, які дають можливість ідентифікувати параметри тріщини в шарі, що можна використати для інтерпретації результатів діагностування.

ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Gopalakrishnan S. Wave propagation in materials and structures. Boca Raton: CRC Press, 2016. 971 p. https://doi.org/10.1201/9781315372099
2. Sharma S. Composite materials: mechanics, manufacturing and modeling. Boca Raton: CRC Press, 2021. 558 p. https://doi.org/10.1201/9781003147756
3. Nazarchuk Z., Muravsky L., Kuryliak D. Optical metrology and optoacoustics in nondestructive evaluation of materials. Springer Series in Optical Sciences, Vol. 242. Singapore: Springer, 2023. 401 p. https://doi.org/10.1007/978-981-99-1226-1
4. Noble B. Methods based on the Wiener—Hopf technique for the solution of partial differential equations. London: Pergamon Press, 1958. 246 p.
5. Mittra R., Lee S.W. Analytical techniques in the theory of guided waves. New York: Macmillan. 1971.
6. Rokhlin S. Diffraction of Lamb waves by a finite crack in an elastic layer. *J. Acoust. Soc. Am.* 1980. **67**, № 4. P. 1157—1165. https://doi.org/10.1121/1.384175
7. Rose J.L. Ultrasonic guided waves in solid media. Cambridge: Cambridge University Press, 2014. 454 p. https://doi.org/10.1017/CBO9781107273610
8. Auld B.A. Acoustic fields and waves in solids. Vol. 1, 2. 2nd edn. Malabar: Krieger Publishing Company, 1990.
9. Mykhas'kiv V.V., Zhbadynskyi I.Ya., Zhang Ch. On propagation of time-harmonic elastic waves through a double-periodic array of penny-shaped cracks. *Eur. J. Mech. A-Solids*. 2019. **73**. P. 306—317. https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2018.09.009
10. Nazarchuk Z.T.,·Voytko M.V.,· Kuryliak D.B., Kulynych Ya.P. Interaction of SH-wave with a semi-infinite crack in an elastic layer. *Mater. Sci*. 2025. **60**. P. 692—701. https://doi.org/10.1007/s11003-025-00938-3
11. Kuryliak D.B., Nazarchuk Z.T.,·Voytko M.V.,·Kulynych Ya.P. SH-wave diffraction from the thin impedance-type defect in the rigid joint of interface and elastic layer. *Z. Angew. Math. Phys.* 2026. **77**. 159. https://doi.org/10.1007/s00033-026-02792-y
12. Семків М.Я., Зражевський Г.М., Маципурв В.Т. Дифракція нормальних SH-хвиль на розрізі скінченної довжини у пружному хвилеводі. *Акустичний вісник*. 2013—2014. **16**, № 1. С. 54—63.

Надійшла до редакції 28.08.2026

REFERENCES

1. Gopalakrishnan, S. (2016). Wave propagation in materials and structures. Boca Raton: CRC Press. https://doi.org/10.1201/9781315372099
2. Sharma, S. (2021). Composite materials: Mechanics, manufacturing and modeling. Boca Raton: CRC Press. https://doi.org/10.1201/9781003147756
3. Nazarchuk, Z., Muravsky, L. & Kuryliak, D. (2023). Optical metrology and optoacoustics in nondestructive evaluation of materials. Springer Series in Optical Sciences, Vol. 242. Singapore: Springer. https://doi.org/10.1007/978-981-99-1226-1
4. Noble, B. (1958). Methods based on the Wiener—Hopf technique for the solution of partial differential equations. London: Pergamon Press.
5. Mittra, R. & Lee, S. W. (1971). Analytical techniques in the theory of guided waves. New York: Macmillan.
6. Rokhlin, S. (1980). Diffraction of Lamb waves by a finite crack in an elastic layer. J. Acoust. Soc. Am., 67, No. 4, pp. 1157-1165. https://doi.org/10.1121/1.384175
7. Rose, J. L. (2014). Ultrasonic guided waves in solid media. Cambridge: Cambridge University Press. https://doi.org/10.1017/CBO9781107273610
8. Auld, B. A. (1990). Acoustic fields and waves in solids. Vol. 1, 2. 2nd edn. Malabar: Krieger Publishing Company.
9. Mykhas'kiv, V. V., Zhbadynskyi, I. Ya. & Zhang, Ch. (2019) On propagation of time-harmonic elastic waves through a double-periodic array of penny-shaped cracks. Eur. J. Mech. A-Solids, 73, pp. 306-317. https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2018.09.009
10. Nazarchuk, Z. T.,·Voytko, M. V.,·Kuryliak, D. B. & Kulynych, Ya. P. (2025). Interaction of SH-wave with a semi-infinite crack in an elastic layer. Mater. Sci., 60, pp. 692-701. https://doi.org/10.1007/s11003-025-00938-3

11. Kuryliak, D. B., Nazarchuk, Z. T.,·Voytko, M. V. &·Kulynych, Ya. P. (2026). SH-wave diffraction from the thin impedance-type defect in the rigid joint of interface and elastic layer. Z. Angew. Math. Phys., 77, 159. https://doi.org/10.1007/s00033-026-02792-y
12. Semkiv, M. Ya., Zrazhevsky, H. M. & Matsypura, V. T. (2013-2014). Dyffraction of normal SH-wave by finite length crack in the elastic waveguide. Acoustic Bulletin, 16, No. 1, pp. 54-63 (in Ukrainian).

Received 28.08.2026

M.V. Voytko, https://orcid.org/0000-0001-5021-5091

Karpenko Physico-Mechanical Institute of the NAS of Ukraine, Lviv, Ukraine
E-mail: myron.voytko@gmail.com

INTERACTION OF SH-WAVE WITH FINITE CRACK IN ELASTIC LAYER

The problem of the diffraction of a normal SH-wave at a finite crack in a flat elastic layer, located parallel to its boundaries, is solved. The crack is modeled as an infinitely thin, stress-free slit, and the regions formed by the crack are treated as elastic waveguides. It is also assumed that the boundaries of the layer are not under stress. This formulation allows us to describe the interaction of directed normal shear waves with a finite internal defect and to analyze the resulting diffraction field. Using the Fourier transform, the corresponding mixed boundary-value problem is reduced to a Wiener—Hopf functional equation. By applying a factorization procedure, this equation is reduced to an infinite system of linear algebraic equations of the second kind. An asymptotic estimate of the matrix elements of the resulting system is obtained, and it is shown that the system has a unique solution in the space of l_2 sequences, except for discrete values of the wavenumber corresponding to the problem's spectrum. These exceptional values are related to the waveguide modes and may correspond to resonant conditions that significantly affect the amplitude and spatial distribution of the diffracted field. The inverse Fourier transform is used to obtain the solution in the coordinate space, and the expressions for the diffracted displacement field are represented in the form of a series. A numerical analysis of the dependence of the displacement field amplitude at the layer boundaries on the crack width, for a fixed crack depth and excitation frequency, was performed. The results reveal characteristic variations of the wave field near the crack edges. These features can be used to identify the crack edges, estimate crack parameters, and interpret the results of acousto-optic diagnostics of layered elastic structures.

Keywords*: SH-wave, diffraction, crack, elastic layer, Wiener—Hopf technique.*