

---

doi: <https://doi.org/10.15407/dopovidi2018.09.051>

УДК 539.3

**Л.П. Хорошун, О.И. Левчук**

Институт механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины, Киев

E-mail: lkhorooshun@ukr.net, 2013levchuk@gmail.com

## **Эффективные упругие свойства стохастических однонаправленных волокнистых композитов при несовершенной адгезии**

*Представлено членом-корреспондентом НАН Украины Л.П. Хорошун*

*Рассмотрена задача об эффективных упругих свойствах стохастического однонаправленного волокнистого композита с несовершенными условиями контакта матрицы и цилиндрических волокон в виде наличия межфазных пористых слоев, которые рассматриваются как третий компонент. В основу положены стохастические двумерные уравнения упругости для материала с трансверсально-изотропными компонентами. Применяется подход, где трехкомпонентный материал сводится к двухкомпонентному заменой волокон с межфазным слоем эффективными композитными волокнами с эквивалентными или эффективными модулями упругости. Исследованы зависимости эффективных модулей упругости от объемного содержания волокон и пористости межфазных слоев.*

**Ключевые слова:** *однонаправленный волокнистый композит, стохастические уравнения, пористые межфазные слои, условия несовершенного контакта, эффективные упругие свойства.*

Создание композитных материалов (КМ) с заданными механическими свойствами достигается выбором соответствующих компонентов, геометрических параметров структуры, а также осуществлением оптимального сцепления (адгезии) компонентов на границе их раздела. Идеальное сцепление или совершенный контакт описывается непрерывностью перемещений и поверхностных напряжений на межфазной границе. В действительности межфазная граница представляет собой не поверхность, а переходную зону [1–5] со свойствами, отличными от свойств компонентов. Это обусловлено наличием разрывов различной природы между компонентами, нанесением аппретов на включения для усиления химических связей с матрицей, наличием микропустот, связанных с особенностями технологии и эксплуатации КМ. Поэтому адекватная модель несовершенного контакта матрицы и включений сводится к наличию между ними межфазных слоев, рассматриваемых как третий компонент, который состоит из приповерхностных частей матрицы и включений, аппретов и дефектов в виде микропустот. На поверхностях раздела межфазных слоев с матрицей и включениями выполняются условия совершенного контакта в виде непрерывности перемещений и поверхностных напряжений [3–5].

© Л.П. Хорошун, О.И. Левчук, 2018

ISSN 1025-6415. Допов. Нац. акад. наук Укр. 2018. № 9

В настоящей работе исследованы эффективные упругие свойства трехкомпонентного композитного материала стохастической структуры, состоящего из матрицы, однонаправленных волокон и межфазных пористых слоев. Трехкомпонентный материал сводится к двухкомпонентному путем замены волокон с межфазными слоями эффективными композитными волокнами с эквивалентными или эффективными упругими свойствами. Композитные волокна моделируются двухкомпонентным волокнистым матричным материалом, где волокна и матрица имеют упругие модули и объемные содержания соответственно реальных волокон и межфазных слоев. Построены кривые зависимостей эффективных упругих постоянных от объемного содержания волокон и пористости межфазных слоев.

**Исходные уравнения.** Рассмотрим композитный материал, образованный однонаправленными хаотически расположенными трансверсально-изотропными волокнами, связанными в монолит некоторым изотропным связующим, представляющим матрицу [6]. Будем предполагать, что между волокнами и матрицей существует межфазный слой, свойства которого отличаются от свойств волокон и матрицы. При этом на поверхностях раздела межфазного слоя с матрицей и волокном выполняются условия совершенного контакта, обеспечивающие непрерывность перемещений и поверхностных напряжений. Вследствие хаотичности расположения волокон упругие модули будут случайными статистически однородными и изотропными функциями координат плоскости, нормальной к направлению волокон. Пусть волокна направлены вдоль оси  $x_3$ . Тогда зависимости между напряжениями  $\sigma_{ij}$  и деформациями  $\varepsilon_{ij}$  в микроточке можно представить в виде

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= (2kV_{ijmn} + 2mD_{ijmn})\varepsilon_{mn} + \lambda_{13}\varepsilon_{33}\delta_{ij}, \\ \sigma_{33} &= \lambda_{13}\varepsilon_{rr} + \lambda_{33}\varepsilon_{33}, \quad \sigma_{i3} = 2\mu\varepsilon_{i3} \quad (i, j, m, n, r = 1, 2),\end{aligned}\tag{1}$$

где обозначено

$$\begin{aligned}2k &= \lambda_{11} + \lambda_{12}, \quad 2m = \lambda_{11} - \lambda_{12}, \quad 2\mu = \lambda_{44}, \quad V_{ijmn} = \frac{1}{2}\delta_{ij}\delta_{mn}, \\ D_{ijmn} &= \frac{1}{2}\delta_{im}\delta_{jn} + \delta_{in}\delta_{jm} - \delta_{ij}\delta_{mn} \quad (i, j, m, n = 1, 2),\end{aligned}\tag{2}$$

причем  $\lambda_{12}, \lambda_{12}, \lambda_{13}, \lambda_{33}, \lambda_{44}$  — модули упругости, являющиеся случайными функциями координат  $x_1, x_2$  [7]. Объемные содержания и модули упругости волокон и матрицы обозначим соответственно  $c_k, \lambda_{11k}, \lambda_{12k}, \lambda_{13k}, \lambda_{33k}, \lambda_{44k}$  ( $k = 1, \dots, N$ ).

Если композитный материал находится в условиях однородных нагрузок, то напряжения  $\sigma_{ij}$  и деформации  $\varepsilon_{ij}$  также будут статистически однородными случайными функциями координат  $x_1, x_2$ . Представим напряжения  $\sigma_{ij}$ , деформации  $\varepsilon_{ij}$  и перемещения  $u_i$  в виде суммы математических ожиданий и флуктуаций

$$\sigma_{ij} = \langle \sigma_{ij} \rangle + \sigma_{ij}^0, \quad \varepsilon_{ij} = \langle \varepsilon_{ij} \rangle + \varepsilon_{ij}^0, \quad u_i = \langle \varepsilon_{ij} \rangle x_j + u_i^0.\tag{3}$$

Тогда, подставляя (1), (3) в уравнение равновесия

$$\sigma_{ij,j} = 0\tag{4}$$

и учитывая соотношения Коши

$$\varepsilon_{ij} = u_{(i,j)} \equiv \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad (5)$$

приходим к уравнениям равновесия относительно флуктуаций перемещений

$$\begin{aligned} m_c u_{i,rr}^0 + k_c u_{r,ri}^0 &= -[(k' - m')\varepsilon_{rr}\delta_{ij} + 2m'\varepsilon_{ij} + \lambda_{13}\langle\varepsilon_{33}\rangle\delta_{ij}], \quad j, \\ \mu_c u_{3,rr}^0 &= -2(\mu'\varepsilon_{3j})_{,j} \quad (i, j, r = 1, 2), \\ (k' &= k - k_c, \quad m' = m - m_c, \quad \mu' = \mu - \mu_c), \end{aligned} \quad (6)$$

где  $k_c, m_c, \mu_c$  — упругие постоянные однородного тела сравнения [6].

Воспользуемся функциями Грина, удовлетворяющими уравнениям

$$\begin{aligned} m_c G_{ij,rr}(x_p^{(1)} - x_p^{(2)}) + k_c G_{ir,rj}(x_p^{(1)} - x_p^{(2)}) + \delta(x_p^{(1)} - x_p^{(2)})\delta_{ij} &= 0, \\ \mu_c G_{,rr}(x_p^{(1)} - x_p^{(2)}) + \delta(x_p^{(1)} - x_p^{(2)})\delta_{ij} &= 0 \quad (i, j, r, p = 1, 2). \end{aligned} \quad (7)$$

Тогда на основе теоремы взаимности Бетти из уравнений (6), (7) следует

$$\begin{aligned} u_i^{0(1)} &= \int_{D^{(2)}} G_{i\alpha}(x_p^{(1)} - x_p^{(2)})[(k'^{(2)} - m'^{(2)})\varepsilon_{rr}^{(2)}\delta_{\alpha\beta} + 2m'^{(2)}\varepsilon_{\alpha\beta}^{(2)} + \lambda_{13}^{(2)}\langle\varepsilon_{33}\rangle\delta_{\alpha\beta}]_{,\beta} dD^{(2)}, \\ u_3^{0(1)} &= 2 \int_{D^{(2)}} G(x_p^{(1)} - x_p^{(2)}) (\mu'^{(2)}\varepsilon_{3\beta}^{(2)})_{,\beta} dD^{(2)} \quad (i, \alpha, \beta, p, r = 1, 2). \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь индексы в круглых скобках сверху обозначают точку плоскости.

Подставляя (3), (8) в (5), получим интегральные уравнения относительно деформаций

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}^{(1)} &= \langle\varepsilon_{ij}\rangle + \int_{D^{(2)}} G_{(i\alpha,j)\beta}(x_p^{(1)} - x_p^{(2)})[(k'^{(2)} - m'^{(2)})\varepsilon_{rr}^{(2)}\delta_{\alpha\beta} + 2m'^{(2)}\varepsilon_{\alpha\beta}^{(2)} + \lambda_{13}^{(2)}\langle\varepsilon_{33}\rangle\delta_{\alpha\beta}] dD^{(2)} + \\ &+ \int_{S^{(2)}} G_{(i\alpha,j)\beta}(x_p^{(1)} - x_p^{(2)})[(k'^{(2)} - m'^{(2)})\varepsilon_{rr}^{(2)}\delta_{\alpha\beta} + 2m'^{(2)}\varepsilon_{\alpha\beta}^{(2)} + \lambda_{13}^{(2)}\langle\varepsilon_{33}\rangle\delta_{\alpha\beta}] n_{\beta}^{(2)} dS^{(2)}, \\ \varepsilon_{3j}^{(1)} &= \langle\varepsilon_{3j}\rangle + \int_{D^{(2)}} G_{,j\beta}(x_p^{(1)} - x_p^{(2)})\mu'^{(2)}\varepsilon_{3\beta}^{(2)} dD^{(2)} + \int_{S^{(2)}} G_{,j}(x_p^{(1)} - x_p^{(2)})\mu'^{(2)}\varepsilon_{3\beta}^{(2)} n_{\beta}^{(2)} dS^{(2)}, \\ &(i, j, \alpha, \beta = 1, 2), \end{aligned} \quad (9)$$

где  $n_q$  — направляющие косинусы нормали к криволинейной бесконечно удаленной границе  $S$  области  $D$ .

Функции Грина, удовлетворяющие уравнениям (7), определяются формулами

$$\begin{aligned} G_{ij}(x_p^{(1)} - x_p^{(2)}) &= \frac{1}{4\pi m_c(k_c + m_c)} \left[ (k_c + 2m_c) \ln \frac{1}{r} \delta_{ij} + k_c \frac{(x_i^{(1)} - x_i^{(2)})(x_j^{(1)} - x_j^{(2)})}{r^2} \right], \\ G_{ij}(x_p^{(1)} - x_p^{(2)}) &= \frac{1}{2\pi\mu_c} \ln \frac{1}{r}, \quad r^2 = (x_k^{(1)} - x_k^{(2)})(x_k^{(1)} - x_k^{(2)}) \quad (i, j, k = 1, 2). \end{aligned} \quad (10)$$

Представим систему интегральных уравнений (9) в символической форме

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(1)} = \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle + K(x^{(1)} - x^{(2)}) \boldsymbol{\lambda}'^{(2)} \boldsymbol{\varepsilon}^{(2)} \quad (11)$$

и умножим (11) на условную плотность  $f(\boldsymbol{\varepsilon}^{(1)}, \boldsymbol{\varepsilon}^{(2)}, \boldsymbol{\lambda}^{(2)} |_{\mathbf{v}}^{(1)})$  (плотность распределения деформаций в точках  $x^{(1)}$ ,  $x^{(2)}$  и модулей упругости в точке  $x^{(2)}$  при условии, что точка  $x^{(1)}$  находится в  $\mathbf{v}$ -компоненте) и проведем статистическое усреднение. Тогда, пренебрегая флуктуациями деформаций в пределах компонента, приходим к системе алгебраических уравнений относительно средних по компонентам деформаций

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{v}} \rangle = \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle + \sum_{k=1}^N K(x) p_{\mathbf{v}k}(x) \boldsymbol{\lambda}'_k \langle \boldsymbol{\varepsilon}^k \rangle \quad (\mathbf{v} = 1, \dots, N), \quad (12)$$

где  $p_{\mathbf{v}k}(x^{(1)} - x^{(2)})$  – вероятность перехода из  $\mathbf{v}$ -компонента в точке  $x^{(1)}$  в  $k$ -компонент в точке  $x^{(2)}$ , которая удовлетворяет условиям

$$c_k p_{k\mathbf{v}} = c_{\mathbf{v}} p_{\mathbf{v}k}(x), \quad \sum_{k=1}^N p_{\mathbf{v}k}(x) = 1, \quad p_{\mathbf{v}k}(0) = \delta_{\mathbf{v}k}, \quad p_{\mathbf{v}k}(\infty) = c_k, \quad (13)$$

где  $c_k$  – объемное содержание  $k$ -компонента.

Если свойства композитного материала статистически изотропны в плоскости, перпендикулярной направлению волокон, то условные вероятности  $p_{\mathbf{v}k}(x^{(1)} - x^{(2)})$  зависят только от расстояния между точками  $x^{(1)}$  и  $x^{(2)}$ . В этом случае после интегрирования в (12) получим

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{v}} \rangle = \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle + A \sum_{k=1}^N (\delta_{\mathbf{v}k} - c_k) \boldsymbol{\lambda}'_k \langle \boldsymbol{\varepsilon}^k \rangle \quad (\mathbf{v} = 1, \dots, N), \quad (14)$$

или в индексной форме

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon_{ij}^{\mathbf{v}} \rangle &= \langle \varepsilon_{ij} \rangle + A_{ijpq} \sum_{k=1}^N (\delta_{\mathbf{v}k} - c_k) [(k'_k - m'_k) \langle \varepsilon_{rr}^k \rangle \delta_{pq} + 2m'_k \varepsilon_{pq}^k + \lambda_{13k}^k \langle \varepsilon_{33} \rangle \delta_{pq}], \\ \langle \varepsilon_{i3}^{\mathbf{v}} \rangle &= \langle \varepsilon_{i3} \rangle + A_{3i3q} \sum_{k=1}^N (\delta_{\mathbf{v}k} - c_k) \mu'^k \langle \varepsilon_{q3} \rangle \quad (i, j, p, q, r = 1, 2, \quad \mathbf{v} = 1, \dots, N), \end{aligned} \quad (15)$$

где ненулевые компоненты  $A_{ijpq}$  определяются формулами

$$\begin{aligned} A_{1111} = A_{2222} &= -\frac{k_c + 4m_c}{8m_c(k_c + m_c)}, \quad A_{1122} = A_{2211} = \frac{k_c}{8m_c(k_c - m_c)}, \\ A_{1212} = A_{2121} = A_{1221} = A_{2112} &= -\frac{k_c + 2m_c}{8m_c(k_c + m_c)}, \\ A_{1313} = A_{2323} = A_{3131} = A_{3232} = A_{1331} = A_{2332} = A_{3113} = A_{3223} &= -\frac{1}{4\mu_c}. \end{aligned} \quad (16)$$

**Эффективные упругие постоянные.** Решение системы уравнений (15) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon_{ij}^v \rangle &= \left( \frac{1}{k_v + \bar{k}} \left\langle \frac{1}{k + \bar{k}} \right\rangle^{-1} V_{ijpq} + \frac{1}{m_v + \bar{m}} \left\langle \frac{1}{m + \bar{m}} \right\rangle^{-1} D_{ijpq} \right) \langle \varepsilon_{pq} \rangle - \\ &- \frac{1}{2(k_v + \bar{k})} \left( \lambda_{13}^v - \left\langle \frac{1}{k + \bar{k}} \right\rangle^{-1} \left\langle \frac{\lambda_{13}}{k + \bar{k}} \right\rangle \right) \langle \varepsilon_{33} \rangle \delta_{ij}, \\ \langle \varepsilon_{33}^v \rangle &= \langle \varepsilon_{33} \rangle, \quad \langle \varepsilon_{i3}^v \rangle = \frac{1}{\mu + \bar{\mu}} \left\langle \frac{1}{\mu + \bar{\mu}} \right\rangle^{-1} \langle \varepsilon_{i3} \rangle \quad (i, j, p, q = 1, 2), \end{aligned} \quad (17)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} \bar{k} &= m_c, \quad \bar{m} = \frac{k_c m_c}{k_c + 2m_c}, \quad \bar{\mu} = \mu_c, \quad \left\langle \frac{1}{k + \bar{k}} \right\rangle^{-1} = \left( \sum_{k=1}^N \frac{c_k}{k_k + \bar{k}} \right)^{-1}, \\ \left\langle \frac{1}{m + \bar{m}} \right\rangle^{-1} &= \left( \sum_{k=1}^N \frac{c_k}{m_k + \bar{m}} \right)^{-1}, \quad \left\langle \frac{\lambda_{13}}{k + \bar{k}} \right\rangle = \sum_{k=1}^N \frac{c_k \lambda_{13k}^1}{k_k + \bar{k}}, \quad \left\langle \frac{1}{\mu + \bar{\mu}} \right\rangle^{-1} = \left( \sum_{k=1}^N \frac{c_k}{\mu_k + \bar{\mu}} \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (18)$$

Подставив (17) в (1), получим выражения средних напряжений  $v$ -компонента через макродеформации

$$\begin{aligned} \langle \sigma_{ij}^v \rangle &= 2(k_v^* V_{ijpq} + m_v^* D_{ijpq}) \langle \varepsilon_{pq} \rangle + \lambda_{13v}^* \langle \varepsilon_{33} \rangle, \quad \langle \sigma_{33}^v \rangle = \lambda_{13v}^* \langle \varepsilon_{rr} \rangle + \lambda_{33v}^* \langle \varepsilon_{33} \rangle, \quad \langle \sigma_{i3}^v \rangle = 2\mu_v^* \langle \varepsilon_{i3} \rangle, \\ k_v^* &= \frac{k_v}{k_v + \bar{k}} \left\langle \frac{1}{k + \bar{k}} \right\rangle^{-1}, \quad m_v^* = \frac{m_v}{m_v + \bar{m}} \left\langle \frac{1}{m + \bar{m}} \right\rangle^{-1}, \quad \lambda_{13v}^* = \frac{\lambda_{13v}^v}{k_v + \bar{k}} \left\langle \frac{1}{k + \bar{k}} \right\rangle^{-1}, \\ \lambda_{33v}^* &= \lambda_{33}^v + \frac{\lambda_{13}^v}{k_v + \bar{k}} \left( \left\langle \frac{1}{k + \bar{k}} \right\rangle^{-1} \left\langle \frac{\lambda_{13}}{k + \bar{k}} \right\rangle - \frac{\lambda_{13}^v}{k_v + \bar{k}} \right) \\ \mu_v^* &= \frac{\mu_v}{\mu_v + \bar{\mu}} \left\langle \frac{1}{\mu + \bar{\mu}} \right\rangle^{-1} \quad (i, j, p, q, r = 1, 2, \quad v = 1, \dots, N). \end{aligned} \quad (19)$$

Осреднив выражения (19), приходим к соотношениям упругости для макрообъема волокнистого материала

$$\begin{aligned} \langle \sigma_{ij} \rangle &= 2(k^* V_{ijpq} + m^* D_{ijpq}) \langle \varepsilon_{pq} \rangle + \lambda_{13}^* \langle \varepsilon_{33} \rangle \delta_{ij}, \quad \langle \sigma_{33} \rangle = \lambda_{13}^* \langle \varepsilon_{rr} \rangle + \lambda_{33}^* \langle \varepsilon_{33} \rangle, \\ \langle \sigma_{i3} \rangle &= 2\mu^* \langle \varepsilon_{i3} \rangle \quad (i, j, r, p, q = 1, 2), \end{aligned} \quad (20)$$

где эффективные модули упругости определяются формулами

$$k^* = \left\langle \frac{1}{k + \bar{k}} \right\rangle^{-1} \left\langle \frac{k}{k + \bar{k}} \right\rangle = \left( \sum_{k=1}^N \frac{c_k}{k_k + \bar{k}} \right)^{-1} \left( \sum_{k=1}^N \frac{c_k k_k}{k_k + \bar{k}} \right),$$

$$\begin{aligned}
m^* &= \left\langle \frac{1}{m + \bar{m}} \right\rangle^{-1} \left\langle \frac{m}{m + \bar{m}} \right\rangle = \left( \sum_{k=1}^N \frac{c_k}{m_k + \bar{m}} \right)^{-1} \left( \sum_{k=1}^N \frac{c_k m_k}{m_k + \bar{m}} \right), \\
\lambda_{13}^* &= \left\langle \frac{1}{k + \bar{k}} \right\rangle^{-1} \left\langle \frac{\lambda_{13}}{k + \bar{k}} \right\rangle = \left( \sum_{k=1}^N \frac{c_k}{k_k + \bar{k}} \right)^{-1} \left( \sum_{k=1}^N \frac{c_k \lambda_{13k}}{k_k + \bar{k}} \right), \\
\lambda_{33}^* &= \langle \lambda_{33} \rangle + \left\langle \frac{1}{k + \bar{k}} \right\rangle^{-1} \left\langle \frac{\lambda_{13}}{k + \bar{k}} \right\rangle^2 - \left\langle \frac{(\lambda_{13})^2}{k_v + \bar{k}} \right\rangle = \\
&= \left( \sum_{k=1}^N \frac{c_k}{k_k + \bar{k}} \right)^{-1} \left( \sum_{k=1}^N \frac{c_k \lambda_{13k}}{k_k + \bar{k}} \right)^2 + \sum_{k=1}^N c_k \left( \lambda_{33k} - \frac{\lambda_{13k}^2}{k_k + \bar{k}} \right), \\
\mu^* &= \left\langle \frac{1}{\mu + \bar{\mu}} \right\rangle^{-1} \left\langle \frac{\mu}{\mu + \bar{\mu}} \right\rangle = \left( \sum_{k=1}^N \frac{c_k}{\mu_k + \bar{\mu}} \right)^{-1} \left( \sum_{k=1}^N \frac{c_k \mu_k}{\mu_k + \bar{\mu}} \right). \tag{21}
\end{aligned}$$

В случае двухкомпонентного однонаправленного волокнистого КМ выражения эффективных модулей упругости (21) можно представить в виде

$$\begin{aligned}
k^* &= \langle k \rangle - \frac{c_1 c_2 (k_1 - k_2)^2}{c_1 k_2 + c_2 k_1 + \bar{k}}, \quad m^* = \langle m \rangle - \frac{c_1 c_2 (m_1 - m_2)^2}{c_1 m_2 + c_2 m_1 + \bar{m}}, \\
\lambda_{13}^* &= \langle \lambda_{13} \rangle - \frac{c_1 c_2 (k_1 - k_2) (\lambda_{131} - \lambda_{132})}{c_1 k_2 + c_2 k_1 + \bar{k}}, \quad \lambda_{33}^* = \langle \lambda_{33} \rangle - \frac{c_1 c_2 (\lambda_{131} - \lambda_{132})^2}{c_1 k_2 + c_2 k_1 + \bar{k}}, \\
\mu^* &= \langle \mu \rangle - \frac{c_1 c_2 (\mu_1 - \mu_2)^2}{c_1 \mu_2 + c_2 \mu_1 + \bar{\mu}}, \tag{22}
\end{aligned}$$

где индексы 1, 2 относятся соответственно к волокнам и матрице.

В решение задачи (17) – (21) наряду с модулями упругостями и объемными содержаниями компонентов, являющимися вполне определенными параметрами, входят постоянные тела сравнения  $k_c$ ,  $m_c$ ,  $\mu_c$ , которые определяются неоднозначным выбором тела сравнения. Поэтому возникает вопрос о корректном выборе постоянных упругости тела сравнения. При формальном решении статистически нелинейной задачи об эффективных упругих свойствах КМ стохастической структуры упругие постоянные тела сравнения обычно выбираются в виде математических ожиданий упругих модулей или податливостей, хотя при этом не исключаются и другие варианты. Однако здесь корректность выбора тела сравнения зависит непосредственно от связности компонентов, что особенно наглядно проявляется для двухкомпонентного однонаправленного волокнистого КМ. В самом деле, здесь физический смысл имеет выбор

$$k_c = \left\langle \frac{1}{k} \right\rangle^{-1} = \left( \frac{c_1}{k_1} + \frac{c_2}{k_2} \right)^{-1}, \quad m_c = \left\langle \frac{1}{m} \right\rangle^{-1} = \left( \frac{c_1}{m_1} + \frac{c_2}{m_2} \right)^{-1}, \quad \mu_c = \left\langle \frac{1}{\mu} \right\rangle^{-1} = \left( \frac{c_1}{\mu_1} + \frac{c_2}{\mu_2} \right)^{-1}. \tag{23}$$

если жесткость волокон выше жесткости матрицы, и

$$k_c = \langle k \rangle = c_1 k_1 + c_2 k_2, \quad m_c = \langle m \rangle = c_1 m_1 + c_2 m_2, \quad \mu_c = \langle \mu \rangle = c_1 \mu_1 + c_2 \mu_2, \quad (24)$$

если жесткость матрицы выше жесткости волокон. Из (22)–(24) соответственно следуют формулы для КМ с бесконечно жесткими волокнами и с нулевой жесткостью волокон, т.е. с цилиндрическими порами.

В случае многокомпонентного КМ выбор тела сравнения не имеет такой наглядности как для двухкомпонентного КМ, т.е. задача значительно усложняется.

**Эффективные модули упругости трехкомпонентного КМ.** Проблематичность корректного выбора постоянных тела сравнения  $k_c$ ,  $m_c$ ,  $\mu_c$  для многокомпонентного КМ затрудняет применение соотношений (21) для определения эффективных упругих постоянных трехкомпонентного однонаправленного волокнистого КМ, состоящего из матрицы, волокон и межфазных слоев между ними. В связи с этим по аналогии с [4] воспользуемся подходом, в котором трехкомпонентный КМ сводится к двухкомпонентному путем замены волокон с межфазными слоями эффективными композитными волокнами с эквивалентными или эффективными свойствами. Волокна с межфазными слоями моделируем двухкомпонентным матричным материалом волокнистой структуры, где волокна и матрица имеют упругие модули и объемные содержания такие же как реальные волокна и межфазные слои. Основанием для этого является зависимость эффективных упругих постоянных (21), (22) только от объемных содержаний компонентов, другие геометрические параметры структуры эти выражения не содержат.

Обозначим объемные содержания и модули упругости волокон, матрицы и межфазных слоев соответственно,  $c_k, k_k, m_k, \lambda_{13k}, \lambda_{33k}, \mu_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ), а объемное содержание и эффективные модули упругости композитных волокон на основе реальных волокон межфазных слоев —  $c_4 = c_1 + c_3, k_4, m_4, \lambda_{134}, \lambda_{334}, \mu_4$ . Тогда, согласно (19), получим выражения средних напряжений компонентов 1 и 3 через средние деформации  $\langle \epsilon_{ij}^4 \rangle$  композитных волокон

$$\langle \sigma_{ij}^v \rangle = 2(k_v^* V_{ijpq} + m_v^* D_{ijpq}) \langle \epsilon_{pq}^4 \rangle + \lambda_{13v}^* \langle \epsilon_{33}^4 \rangle,$$

$$\langle \sigma_{33}^v \rangle = \lambda_{13v}^* \langle \epsilon_{rr}^4 \rangle + \lambda_{33v}^* \langle \epsilon_{33}^4 \rangle, \quad \langle \sigma_{i3}^v \rangle = 2\mu_v^* \langle \epsilon_{i3}^4 \rangle, \quad (i, j, r, p, q, = 1, 2 \quad v = 1, 3),$$

$$k_v^* = \frac{k_v}{k_v + \bar{k}_{13}} \left( \frac{s_1}{k_1 + \bar{k}_{13}} + \frac{s_3}{k_3 + \bar{k}_{13}} \right)^{-1}, \quad m_v^* = \frac{m_v}{m_v + \bar{m}_{13}} \left( \frac{s_1}{m_1 + \bar{m}_{13}} + \frac{s_3}{m_3 + \bar{m}_{13}} \right)^{-1},$$

$$\lambda_{13v}^* = \frac{\lambda_{13v}}{k_v + \bar{k}_{13}} \left( \frac{s_1}{k_1 + \bar{k}_{13}} + \frac{s_3}{k_3 + \bar{k}_{13}} \right)^{-1}, \quad \mu_v^* = \frac{\mu_v}{\mu_v + \bar{\mu}_{13}} \left( \frac{s_1}{\mu_1 + \bar{\mu}_{13}} + \frac{s_3}{\mu_3 + \bar{\mu}_{13}} \right)^{-1},$$

$$\lambda_{33v}^* = \lambda_{33}^v + \frac{\lambda_{13v}}{k_v + \bar{k}_{13}} \left[ \left( \frac{s_1}{k_1 + \bar{k}_{13}} + \frac{s_3}{k_3 + \bar{k}_{13}} \right)^{-1} \left( \frac{s_1 \lambda_{131}}{k_1 + \bar{k}_{13}} + \frac{s_3 \lambda_{133}}{k_3 + \bar{k}_{13}} \right) - \lambda_{13v} \right],$$

$$s_1 = \frac{c_1}{c_1 + c_3}, \quad s_3 = \frac{c_3}{c_1 + c_3},$$

$$\bar{k}_{13}^* = m_{13}^c, \quad \bar{m}_{13} = \frac{k_{13}^c m_{13}^c}{k_{13}^c + 2m_{13}^c}, \quad \bar{\mu}_{13}^* = \mu_{13}^c, \quad k_{13}^c = \begin{cases} s_1 k_1 + s_3 k_3, & k_3 \geq k_1; \\ \left( \frac{s_1}{k_1} + \frac{s_3}{k_3} \right)^{-1}, & k_3 \leq k_1; \end{cases}$$

$$m_{13}^c = \begin{cases} s_1 m_1 + s_3 m_3, & m_3 \geq m_1, \\ \left( \frac{s_1}{m_1} + \frac{s_3}{m_3} \right)^{-1}, & m_3 \leq m_1, \end{cases} \quad \mu_{13}^c = \begin{cases} s_1 \mu_1 + s_3 \mu_3, & \mu_3 \geq \mu_1, \\ \left( \frac{s_1}{\mu_1} + \frac{s_3}{\mu_3} \right)^{-1}, & \mu_3 \leq \mu_1. \end{cases} \quad (25)$$

На основе (25) находим зависимости между средними по композитным волокнам напряжениями и деформациями

$$\langle \sigma_{ij}^4 \rangle = 2(k_4 V_{ijpq} + m_4 D_{ijpq}) \langle \epsilon_{pq}^4 \rangle + \lambda_{134} \langle \epsilon_{33}^4 \rangle \delta_{ij}, \quad (26)$$

$$\langle \sigma_{33}^4 \rangle = \lambda_{134} \langle \epsilon_{rr}^4 \rangle + \lambda_{334} \langle \epsilon_{33}^4 \rangle, \quad \langle \sigma_{i3}^4 \rangle = 2\mu_4 \langle \epsilon_{i3}^4 \rangle \quad (i, j, r, p, q, = 1, 2),$$

где эффективные упругие модули определяются формулами

$$k_4 = s_1 k_1^* + s_3 k_3^*, \quad m_4 = s_1 m_1^* + s_3 m_3^*, \quad \lambda_{134} = s_1 \lambda_{131}^* + s_3 \lambda_{133}^*, \quad (27)$$

$$\lambda_{334} = s_1 \lambda_{331}^* + s_3 \lambda_{333}^*, \quad \mu_4 = s_1 \mu_1^* + s_3 \mu_3^*.$$

Согласно применяемому подходу эффективные постоянные упругости трехкомпонентного КМ, образованного матрицей, волокнами и межфазными слоями, определяются как эффективные постоянные упругости двухкомпонентного КМ, образованного матрицей и композитными волокнами, имеющими объемные содержания и модули упругости соответственно  $c_2, c_2, k_2, m_2, \lambda_{132}, \lambda_{332}, \mu_2$  и  $c_4 = c_1 + c_3, k_4, m_4, \lambda_{134}, \lambda_{334}, \mu_4$ . Тогда, согласно (19), находим выражения средних напряжений по компонентам 2 и 4 через макродеформации  $\langle \epsilon_{ij} \rangle$  трехкомпонентного КМ

$$\langle \sigma_{ij}^v \rangle = 2(k_v^* V_{ijpq} + m_v^* D_{ijpq}) \langle \epsilon_{pq} \rangle + \lambda_{13v}^* \langle \epsilon_{33} \rangle,$$

$$\langle \sigma_{33}^v \rangle = \lambda_{13v}^* \langle \epsilon_{rr} \rangle + \lambda_{33v}^* \langle \epsilon_{33} \rangle, \quad \langle \sigma_{i3}^v \rangle = 2\mu_v^* \langle \epsilon_{i3} \rangle \quad (i, j, r, p, q, = 1, 2, \quad v = 2, 4),$$

$$k_v^* = \frac{k_v}{k_v + \bar{k}_{24}} \left( \frac{c_2}{k_2 + \bar{k}_{24}} + \frac{c_4}{k_4 + \bar{k}_{24}} \right)^{-1}, \quad m_v^* = \frac{m_v}{m_v + \bar{m}_{24}} \left( \frac{c_2}{m_2 + \bar{m}_{24}} + \frac{c_4}{m_4 + \bar{m}_{24}} \right)^{-1},$$

$$\lambda_{13v}^* = \frac{\lambda_{13v}}{k_v + \bar{k}_{24}} \left( \frac{c_2}{k_2 + \bar{k}_{24}} + \frac{c_4}{k_4 + \bar{k}_{24}} \right)^{-1}, \quad \mu_v^* = \frac{\mu_v}{\mu_v + \bar{\mu}_{24}} \left( \frac{c_2}{\mu_2 + \bar{\mu}_{24}} + \frac{c_4}{\mu_4 + \bar{\mu}_{24}} \right)^{-1},$$

$$\lambda_{33v}^* = \lambda_{33v} + \frac{\lambda_{13v}}{k_v + \bar{k}_{24}} \left[ \left( \frac{c_2}{k_2 + \bar{k}_{24}} + \frac{c_4}{k_4 + \bar{k}_{24}} \right)^{-1} \left( \frac{c_2 \lambda_{132}}{k_2 + \bar{k}_{24}} + \frac{c_4 \lambda_{134}}{k_4 + \bar{k}_{24}} \right) - \lambda_{13v} \right],$$



$$\bar{k}_{24} = m_{24}^c, \quad \bar{m}_{24} = \frac{k_{24}^c m_{24}^c}{k_{24}^c + 2m_{24}^c}, \quad \bar{\mu}_{24} = \mu_{24}^c, \quad k_{24}^c = \begin{cases} c_2 k_2 + c_4 k_4, & k_4 \geq k_2, \\ \left( \frac{c_2}{k_2} + \frac{c_4}{k_4} \right)^{-1}, & k_4 \leq k_2, \end{cases}$$

$$m_{24}^c = \begin{cases} c_2 m_2 + c_4 m_4, & m_4 \geq m_2, \\ \left( \frac{c_2}{m_2} + \frac{c_4}{m_4} \right)^{-1}, & m_4 \leq m_2, \end{cases} \quad \mu_{24}^c = \begin{cases} c_2 \mu_2 + c_4 \mu_4, & \mu_4 \geq \mu_2, \\ \left( \frac{c_2}{\mu_2} + \frac{c_4}{\mu_4} \right)^{-1}, & \mu_4 \leq \mu_2. \end{cases} \quad (28)$$

Отсюда следуют зависимости между макронапряжениями и макродеформациями трехкомпонентного однонаправленного волокнистого КМ

$$\langle \delta_{ij} \rangle = 2(k^* V_{ijpq} + m^* D_{ijpq}) \langle \epsilon_{pq} \rangle + \lambda_{13}^* \langle \epsilon_{33} \rangle \delta_{ij}, \quad (29)$$

$$\langle \sigma_{33} \rangle = \lambda_{13}^* \langle \epsilon_{rr} \rangle + \lambda_{33}^* \langle \epsilon_{33} \rangle, \quad \langle \sigma_{i3} \rangle = 2\mu^* \langle \epsilon_{i3} \rangle \quad (i, j, r, p, q, = 1, 2),$$

где эффективные модули упругости определяются формулами

$$k^* = c_2 k_2^* + c_4 k_4^*, \quad m^* = c_2 m_2^* + c_4 m_4^*, \quad \lambda_{13}^* = c_2 \lambda_{132}^* + c_4 \lambda_{134}^*,$$

$$\lambda_{33}^* = c_2 \lambda_{332}^* + c_4 \lambda_{334}^*, \quad \mu^* = c_2 \mu_2^* + c_4 \mu_4^*. \quad (30)$$

Объемные содержания волокон, матрицы и межфазных слоев  $c_1, c_2, c_3$  вычисляются по формулам

$$c_1 = \frac{v_1}{v_1 + v_2 + v_3}, \quad c_2 = \frac{v_2}{v_1 + v_2 + v_3}, \quad c_3 = \frac{v_3}{v_1 + v_2 + v_3}, \quad (31)$$

где  $v_1, v_2, v_3$  — объемы соответственно волокон, матрицы и межфазных слоев в некотором макрообъеме КМ. Если макрообъем содержит  $n$  цилиндрических волокон радиуса  $r_0$ , а толщина межфазного слоя равна  $h$ , то будем иметь

$$v_1 = \pi n l r_0^2, \quad v_3 = 2\pi n l h r_0. \quad (32)$$

Здесь  $l$  — длина волокна в макрообъеме. Из (31), (32) следует зависимость

$$c_3 = 2 \frac{h}{r_0} c_1. \quad (33)$$

В изложенных выше результатах по определению эффективных модулей упругости и средних по компонентам напряжений трехкомпонентного однонаправленного волокнистого КМ предполагаются заданными объемные содержания и модули упругости трансверсально-изотропных волокон, матрицы и межфазных слоев. Как частный случай отсюда следуют варианты с изотропными свойствами компонентов. Наличие в межфазных слоях дефектов меняет их упругие свойства. Если дефекты моделировать микропорами, а материал

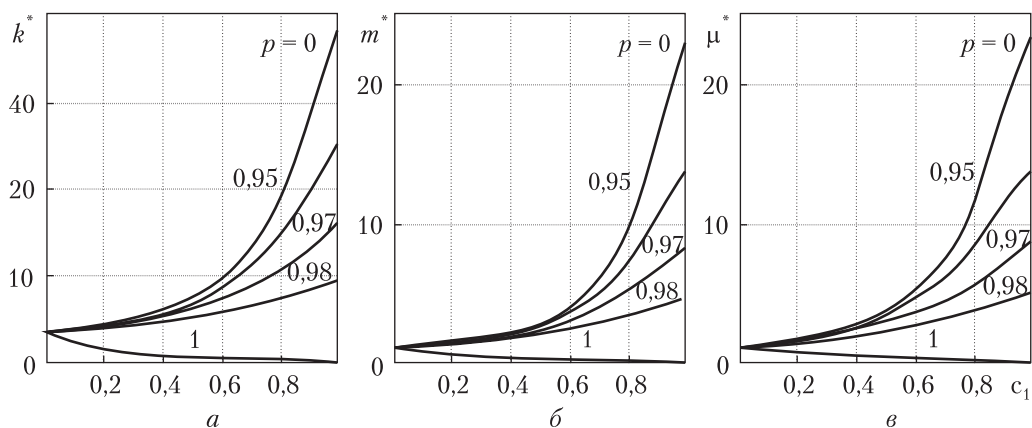


Рис. 1

каркаса пористых межфазных слоев принять изотропным, то эффективные модули объемного сжатия  $K_3$  и сдвига  $\mu_3$  межфазных пористых слоев определяются формулами [5]

$$K_3 = \frac{4K_0\mu_0 + (1-p)^2}{4\mu_0 + (3K_0 - 4\mu_0)p}, \quad \mu_3 = \frac{\mu_0(9K_0 + 8\mu_0)(1-p)^2}{9K_0 + 8\mu_0 - (3K_0 - 4\mu_0)p}, \quad (34)$$

где  $K_0$ ,  $\mu_0$  — соответственно модули объемного сжатия и сдвига материала каркаса;  $p$  — пористость.

**Численные результаты.** На основе приведенных соотношений проведено численное исследование влияние несовершенных условий контакта компонентов на эффективные упругие свойства стохастического КМ на основе однонаправленных волокон из алюмосиликатного стекла и матрицы из отвержденного эпоксидного связующего, которые имеют упругие модули объемного сжатия и сдвига соответственно [8]:

$$K_c = 33,333 \text{ ГПа}; \quad \mu_c = 25 \text{ ГПа}; \quad K_3 = 33,333 \text{ ГПа}; \quad \mu_3 = 1,111 \text{ ГПа}. \quad (35)$$

Несовершенные условия контакта волокон и матрицы принимаем в виде наличия межфазных пористых слоев между волокнами и матрицей, которые рассматриваются как третий компонент КМ. Аппретирующее покрытие волокон рекомендуется [1] применять с модулями упругости, промежуточными между модулями волокон и матрицы, что обеспечивает равномерную передачу усилий. Поэтому в безразмерных единицах, представляющих отношения соответствующих модулей к модулю сдвига эпоксидной матрицы  $\mu_3$ , согласно (34), (35), принимаем следующие значения:

$$K_1 = 30; \quad \mu_1 = 22,5; \quad K_2 = 3; \quad \mu_2 = 1; \quad K_0 = 16,5; \quad \mu_0 = 11,75. \quad (36)$$

Объемное содержание третьего компонента с модулями упругости (34) определяется формулой (33), где отношение толщины межфазного слоя  $h$  к радиусу цилиндрического волокна принято равным 0,01.

На рис. 1 и 2 приведены зависимости эффективных модулей упругости  $k^*$ ,  $m^*$ ,  $\mu^*$ ,  $\lambda_{13}^*$ ,  $\lambda_{33}^*$ , входящих в (29), от объемного содержания волокон  $c_1$  при заданных пористостях  $p$  межфазных слоев. Здесь объемное содержание волокон  $c_1$  находится в допустимом интер-

вале  $0 \leq c_1 \leq 0,98$  согласно (33). На рис. 3 даны зависимости эффективных поперечного  $v_{21}^*$  и продольного  $v_{31}^*$  коэффициентов Пуассона от объемного содержания волокон  $c_1$ , вычисленных по формулам

$$v_{21}^* = \frac{(k^* - m^*)\lambda_{33}^* - \lambda_{13}^{*2}}{(k^* + m^*)\lambda_{33}^* - \lambda_{13}^{*2}}, \quad (37)$$

$$v_{31}^* = \frac{2m^*\lambda_{13}^{*2}}{(k^* + m^*)\lambda_{33}^* - \lambda_{13}^{*2}}.$$

Как видим, увеличение пористости  $p$  межфазных слоев эквивалентно уменьшению адгезии и ведет к уменьшению эффективных модулей упругости  $k^*$ ,  $m^*$ ,  $\mu^*$ ,  $\lambda_{13}^*$ ,  $\lambda_{33}^*$ , что вполне соответствует физическим представлениям. Однако монотонное увеличение модулей  $k^*$ ,  $m^*$ ,  $\mu^*$ ,  $\lambda_{13}^*$  с ростом объемного содержания  $c_1$  волокон сохраняется при росте пористости  $p$  лишь до определенных соответственно значений  $p_1 = 0,989158$ ;  $p_2 = p_3 = 0,991435$ ;  $p_4 = 0,98507$ , после чего модули уменьшаются с ростом объемного содержания  $c_1$  волокон. Исключение представляет лишь модуль  $\lambda_{33}^*$ , который увеличивается с ростом объемного содержания  $c_1$  волокон при произвольных значениях пористости  $p$  межфазных слоев.

Кривые зависимостей эффективных коэффициентов Пуассона  $v_{21}^*$ ,  $v_{31}^*$  от объемного содержания  $c_1$  волокон имеют немонотонный характер. При этом с ростом пористости  $p$  межфазных слоев коэффициент  $v_{31}^*$  убывает для всех значений объемного содержания  $c_1$  волокон, в то время как коэффициент  $v_{21}^*$  растет в диапазоне  $0 \leq p \leq 0,99$ , затем убывает, имея более сложный характер зависимости от  $c_1$ .

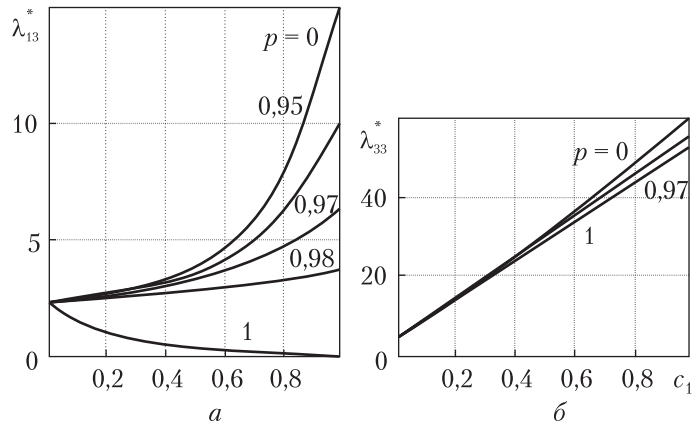


Рис. 2

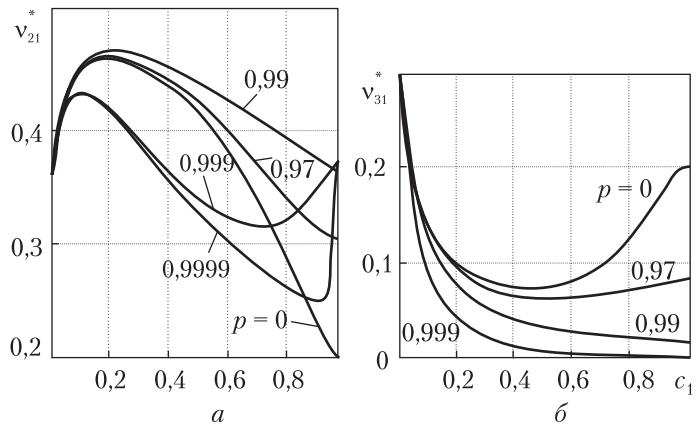


Рис. 3

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Современные композиционные материалы: Браутман Л. и Крок Р. (ред.). Москва: Мир. 1970. 672 с.
2. Achenbach J.D., Zhu H. Effect of interfacial zone on mechanical behavior and failure of fiber-reinforced composites. *J. Mech. Phys. Solids*. 1989. **37**. P. 381–393.
3. Benveniste Y., Miloh T. Imperfect soft and stiff interfaces in two-dimensional elasticity. *Mech. Mater.* 2001. **33**. P. 309–323.
4. Hashin Z. Thin interphase imperfect interface in elasticity with application to coated fiber composites. *J. Mech. Phys. Solids*. 2002. **50**. P. 2509–2537.

5. Khoroshun L.P. Effective Elastic Properties of Stochastic Granular Composites with Interfacial Defects. *Int. Appl. Mech.* 2017. **52**, № 5. P. 574–587.
6. Шермергор Т.Д. Теория упругости микронеоднородных сред. Москва: Наука, 1977, 400 с.
7. Khoroshun L.P. Statistical theory of deformation of unidirectional fibrous materials. *Int. Appl. Mech.* 1968. **4**, № 7. P. 5–9.
8. Крегерс А.Ф. Математическое моделирование термического расширения пространственно армированных композитов. *Механика композит. материалов.* 1988. № 3. С. 433–441.

Поступило в редакцию 26.04.2018

## REFERENCES

1. Brautman, L. & Krok, P. (Eds.) (1970). Modern composite materials, Moscow: Mir (in Russian).
2. Achenbach, J. D. & Zhu, H. (1989). Effect of interfacial zone on mechanical behavior and failure of fiber-reinforced composites. *J. Mech. Phys. Solids.*, 37, pp. 381-393.
3. Benveniste, Y. & Miloh, T. (2001). Imperfect soft and stiff interfaces in two-dimensional elasticity. *Mech. Mater.*, 33, pp. 309-323.
4. Hashin, Z. (2002). Thin interphase imperfect interface in elasticity with application to coated fiber composites. *J. Mech. Phys. Solids*, 50, pp. 2509-2537.
5. Khoroshun, L. P. (2017). Effective Elastic Properties of Stochastic Granular Composites with Interfacial Defects. *Int. Appl. Mech.*, 52, No.5, pp. 574-587.
6. Shermergor, T. D. (1977). Elasticity theory of micrononhomogenous mediums. Moscow: Nauka (in Russian).
7. Khoroshun, L. P. (1968). Statistical theory of deformation of unidirectional fibrous materials. *Int. Appl. Mech.*, 4, No. 7, pp. 5-9.
8. Kregers, A. F. (1988). Mathematical modeling of thermal expansion of spatially reinforced composites. *Mechanics of Composite Materials*, No. 3, pp. 433-441 (In Russian).

Received 26.04.2018

Л.П. Хорошун, О.И. Левчук

Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАН України, Київ  
E-mail: lkhoshun@ukr.net, 2013levchuk@gmail.com

## ЕФЕКТИВНІ ПРУЖНІ ВЛАСТИВОСТІ СТОХАСТИЧНИХ ОДНОСПРЯМОВАНИХ ВОЛОКНИСТИХ КОМПОЗИТИВ ПРИ НЕДОСКОНАЛІЙ АДГЕЗІЇ

Розглянуто задачу про ефективні пружні властивості стохастичного односпрямованого волокнистого композиту з недосконалими умовами контакту матриці і циліндричних волокон у вигляді наявності міжфазних пористих шарів, які розглядаються як третій компонент. В основу покладено стохастичні двовимірні рівняння пружності для матеріалу з трансверсально-ізотропними компонентами. Застосовано підхід, де трикомпонентний матеріал зводиться до двокомпонентного заміною волокон з міжфазним шаром ефективними композитними волокнами з еквівалентними чи ефективними модулями пружності. Досліджено залежність ефективних модулів пружності від об'ємного вмісту волокон і пористості міжфазних шарів.

**Ключові слова:** односпрямований волокнистий композит, стохастичні рівняння, пористі міжфазні шари, умови недосконалого контакту, ефективні пружні властивості.

*L.P. Khoroshun, O.I. Levchuk*

S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of the NAS of Ukraine, Kiev

E-mail: lkhoshun@ukr.net, 2013levchuk@gmail.com

EFFECTIVE ELASTIC PROPERTIES  
OF STOCHASTIC UNIDIRECTIONAL FIBROUS  
COMPOSITES UNDER IMPERFECT ADHESION

A problem of effective elastic properties of a stochastic unidirectional fibrous composite is considered. The interface conditions are assumed in the form of the presence of porous interphase layers between the matrix and cylindrical fibers, which are accepted as the third component. An approach, in which the three-component material is reduced to a two-component one, by replacing the fiber with the interphase layer by a composite fiber with equivalent or effective properties, is used. A dependence of the effective moduli on the volume fractions of fibers and the porosity of interphase layers is investigated.

**Keywords:** *unidirectional fibrous composite, stochastic equations, porous interphase layers, imperfect interphase conditions, effective elastic properties.*