

---

doi: <https://doi.org/10.15407/dopovidi2018.09.042>

УДК 539.3

**М.П. Семенюк<sup>1</sup>, В.М. Трач<sup>2</sup>, Н.Б. Жукова<sup>1</sup>**

<sup>1</sup> Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАН України, Київ

<sup>2</sup> Національний університет водного господарства та природокористування, Рівне

E-mail: zhukova\_n@ukr.net, trach-vm@ukr.net

## **До континуальної розрахункової моделі стійкості нанотрубок з напівсферичними кришками**

*Представлено членом-кореспондентом НАН України В. М. Назаренком*

*Для дослідження стійкості вуглецевих нанотрубок запропоновано континуальну розрахункову модель, в основу якої покладено нелінійну теорію анізотропних оболонок середнього згину. Проведено розрахунок критичних станів для нанотрубок з напівсферичними кришками та без них при різних граничних умовах і різних зовнішніх навантаженнях.*

**Ключові слова:** *теорія оболонок, стійкість, вуглецева нанотрубка, напівсферичні кришечки, зовнішній тиск, осьовий тиск.*

Дослідженню стійкості вуглецевих нанотрубок присвячені численні роботи [1–10]. Інтерес до цієї задачі зумовлений тим, що вигин нанотрубок при втраті стійкості може істотно погіршити високі показники їх пружності і міцності, тепло- і електропровідності, змінити їх функціонування в нанопристрої [7]. Було відзначено, що нанотрубки можуть бути закриті половинкою фуллерена — напівсферичної поверхні, що утворює кінцеві кришечки (рис.1). Однак у більшості робіт зі стійкості нанотрубок вони розглядаються як порожнисті циліндри без урахування кінцевих півсфер [3, 5, 6]. При цьому основна увага приділяється стійкості циліндричної частини і обґрунтуванню застосування до розрахунку таких нанорозмірних об'єктів як вуглецеві трубки континуальної оболонкової моделі циліндричної форми або стрижневої моделі [3, 9, 10]. На додаток до експериментальних методів дослідження розроблялися також теоретичні моделі, що враховують дискретну структуру нанотрубок [6, 10]. Поєднання різних підходів дало можливість прийти до висновку, що при малих деформаціях зазначені континуальні моделі можуть бути застосовані до розрахунку стійкості нанотрубок. Але останні є специфічним об'єктом із доволі широким діапазоном співвідношень товщини, радіуса і довжини і тому до розрахунку нанотрубок необхідно в кожному випадку проводити додаткову перевірку можливості застосування того чи іншого підходу [9].

У даній роботі пропонується розрахункова модель, на підставі якої розглядається вплив кінцевих напівсферичних кришок на стійкість нанотрубок при рівномірному зовнішньому

тиску і осьовому стиску. Ряд експериментальних досліджень показують, що при навантаженні в поздовжньому і поперечному напрямках вуглецева нанотрубка виявляє анізотропні властивості. У зв'язку з цим в основу континуальної моделі покладено нелінійну теорію анізотропних оболонок такого типу, яка є придатною як при малих, так і при великих довжинах оболонок.

1. Потенціальна енергія деформації тонких шаруватих анізотропних оболонок може бути записана у вигляді [11]

$$P = \iint_{\Omega} L \dots(\varepsilon, \kappa) d\Omega, \quad (1)$$

де

$$L(\varepsilon, \kappa) = \frac{1}{2}(\varepsilon^T C \varepsilon + 2\varepsilon^T B \kappa + \kappa^T D \kappa). \quad (2)$$

У виразах (2) використані векторно-матричні позначення

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{pmatrix}, \quad \kappa = \begin{pmatrix} k_{11} \\ k_{22} \\ k_{12} \end{pmatrix}, \quad (3)$$

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{12} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{66} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Компонентами векторів  $\varepsilon$  і  $\kappa$  є тангенціальні деформації оболонки  $\varepsilon_{ij}$  і збільшення кривизн і кручення  $k_{ij}$  [11]. Компоненти матриці жорсткостей розтягу та зсуву  $C$ , матриці жорсткостей взаємовпливу  $B$  і жорсткостей вигину  $D$  обчислюються з точністю до квадратичних членів [11, 12].

Відповідно до методу Гамільтона [13] утворюємо канонічний інтеграл

$$A_R = \iint [T_1 \varepsilon_1(u) + T_{13}(\theta + \theta_1(u)) - H_g] A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 - U, \quad (5)$$

де  $\varepsilon_1(u)$  – вектор, компонентами якого є вирази деформацій,  $\varepsilon_{11}(u)$ ,  $\varepsilon_{12}(u)$ ,  $k_{11}(u)$ ,  $T_{13}$  – множник Лагранжа;  $U$  – робота зовнішніх навантажень. В (5) варіюються переміщення, а також зусилля  $T_{11}$ ,  $T_{12}$ ,  $T_{13}$  і момент  $M_{11}$  [11].

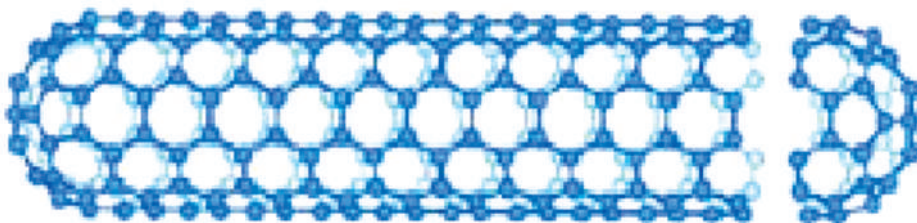


Рис. 1. Нанотрубка з півсферичними кінцевими кришками

Варіація роботи  $\delta U$  може бути представлена у вигляді

$$\delta U = \iint (q_1 \delta u + q_2 \delta v + q_3 \delta w) A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 + \int_{\alpha_2} \left[ T_{11}^0 \delta u + \left( T_{12}^0 - \frac{M_{12}^0}{R_2} \right) \delta v + \left( T_{13}^0 + \frac{\partial M_{12}^0}{\partial \alpha_1} \right) \delta w + M_{11}^0 \delta \theta \right]_{\alpha_1} A_2 d\alpha_2. \quad (6)$$

де  $q_i$  – поверхневі навантаження;  $T_{ij}^0, M_{ij}^0$  – зусилля і моменти, прикладені до контурних ліній, що обмежують поверхню. На ділянках лінії, де задані переміщення, граничні умови вважаємо виконаними.

Використовуючи умови стаціонарності функціоналу (5), отримаємо

$$\begin{aligned} & \iint \left[ \frac{1}{A_1} \frac{\partial T_{11}}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial T_{21}^*}{\partial \alpha_2} + a_1 (T_{12}^* + T_{21}^*) + a_2 (T_{11} - T_{22}) - \frac{1}{R_1} T_{13}^* + q_1 \right] \delta u + \\ & + \left[ \frac{1}{A_1} \frac{\partial T_{12}^*}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial T_{22}}{\partial \alpha_2} + a_2 (T_{12}^* + T_{21}^*) - a_1 (T_{11} - T_{22}) - \frac{1}{R_2} T_{23}^* + q_1 \right] \delta v + \\ & + \left[ \frac{1}{A_1} \frac{\partial T_{13}^*}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial T_{23}^*}{\partial \alpha_2} + a_2 T_{13}^* + a_1 T_{23}^* + \frac{T_{11}}{R_1} + \frac{T_{23}}{R_2} + q_3 \right] \delta w - \\ & - \left[ \frac{1}{A_1} \frac{\partial M_{11}}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial M_{12}}{\partial \alpha_2} + 2a_1 M_{12} + a_2 (M_{11} - M_{22}) - T_{13} \right] \delta \theta - \\ & - \{ [\varepsilon_{11}(u) - A_{11} T_{11} - A_{12} T_{12} - A_{13} M_{11} + d_{11} \varepsilon_{22} + d_{12} k_{22} + d_{13} k_{12}] \delta T_{11} - \\ & - [\varepsilon_{12}(u) - A_{12} T_{11} - A_{22} T_{12} - A_{23} M_{11} + d_{21} \varepsilon_{22} + d_{22} k_{22} + d_{23} k_{12}] \delta T_{12} - \\ & - [k_{11}(u) - A_{13} T_{11} - A_{23} T_{12} - A_{33} M_{11} + d_{31} \varepsilon_{22} + d_{32} k_{22} + d_{33} k_{12}] \delta M_{11} - \\ & - [\theta_1(u) + \theta] \delta T_{13} \} A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 - \\ & - \int_{\alpha_2} \left\{ \left[ (T_{11} - T_{11}^0) \delta u + \left( T_{12}^* - T_{12}^0 + 2 \frac{M_{12}}{R_2} \right) \delta v + (T_{13}^* - T_{13}^0) \delta w - (M_{11} - M_{11}^0) \delta \theta \right] \right\}_{\alpha_1} A_2 d\alpha_2 = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Тут:  $A_{ij}$  – компоненти матриці  $H_{11}^{-1}$ ;  $d_{ij}$  – компоненти матриці  $H_{11}^{-1} H_{12}$  [11]

$$\begin{aligned} T_{12}^* &= T_{12} + T_{11} \omega_1 - \frac{2}{R_2} M_{12}, \quad T_{21}^* = T_{12} + T_{22} \omega_2, \quad T_{13}^* = T_{13} + T_{11} \theta_1 + T_{12} \theta_2, \\ T_{23}^* &= \frac{1}{A_2} \frac{\partial M_{22}}{\partial \alpha_2} - a_1 (M_{11} - M_{22}) + 2a_2 M_{12} + T_{12} \theta_1 + T_{22} \theta_2, \\ T_{22} &= d_{11} T_{11} + d_{21} T_{12} + d_{31} M_{11} + (C_{22}^* - C_{22}^0) \varepsilon_{22} + (B_{22}^* - B_{22}^0) k_{22} + (B_{26}^* - B_{26}^0) k_{12}, \\ M_{22} &= d_{12} T_{11} + d_{22} T_{12} + d_{32} M_{11} + (B_{22}^* - B_{22}^0) \varepsilon_{22} + (D_{22} - D_{22}^0) k_{22} + (D_{26} - D_{26}^0) k_{12}, \\ M_{12} &= d_{13} T_{11} + d_{23} T_{12} + d_{33} M_{11} + (B_{26}^* - B_{26}^0) \varepsilon_{22} + (D_{26} - D_{26}^0) k_{22} + (D_{26} - D_{66}^0) k_{12}. \end{aligned} \quad (8)$$

З огляду на незалежність варіацій  $\delta T_{ij}$ , і  $\delta u, \delta v, \delta w, \delta \theta$  кожний доданок в варіаційному рівнянні (7) можна прирівняти до нуля. Отримаємо вісім рівнянь в частинних похідних. Їх можна використати для скорочення розмірності задачі, якщо апроксимувати незалежні функції по одній з координат. Після приведення рівнянь в частинних похідних до звичайних диференціальних рівнянь, отримаємо канонічну систему рівнянь, яка після деяких перетворень набуває нормального вигляду.

Лінеарізуємо рівняння

$$P_i = 0, \quad i = 1, \dots, 8, \quad (9)$$

де  $P_i$  — диференціальні вирази в квадратних дужках при незалежних варіаціях зусиль і переміщень в рівнянні (7). Вважаємо, що на оболонку діє осесиметричне навантаження, тому функції з індексом “с” від окружної координати не залежать. Рівняння  $P_i = 0$  в околі критичної точки зберігає свій вигляд, відрізняючись від вихідних тільки тим, що вони будуть однорідними.

З огляду на замкнутість оболонки по окружній координаті зусилля, моменти і переміщення є періодичними функціями координати  $\alpha_2$ . В якості цієї координати візьмемо кут  $\phi$ , який відраховується від початкового меридіана уздовж дуги кола в напрямку, що забезпечує правобічність системи координат  $\alpha_1, \alpha_2, z$ . Подамо розв’язок у вигляді рядів Фур’є. В цьому випадку

$$(T_{11}, T_{12}, T_{13}, M_{11}, u, v, w, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (T_{11,n}, T_{12,n}, T_{13,n}, M_{11,n}, u_n, v_n, w_n, \theta_n) e^{in\phi}. \quad (10)$$

При негативних значеннях  $n$  амплітуди функцій  $f_{-n} = \bar{f}_n$ , де  $\bar{f}_n$  — комплексна величина, сполучена до  $f_n$ .

Якщо підставити (10) в лінеаризоване рівняння  $P_i = 0$ , то отримаємо систему з восьми звичайних диференціальних рівнянь в нормальному вигляді

$$\frac{dy_i}{d\alpha_1} = F_i(y_{i,c}, y_i), \quad (11)$$

де

$$y_1 = T_{11,n}, \quad y_2 = T_{12,n}^*, \quad y_3 = T_{13,n}^*, \quad y_4 = M_{11}, \quad y_5 = u, \quad y_6 = v, \quad y_7 = w, \quad y_8 = \theta. \quad (12)$$

Природні граничні умови формулюються відносно функцій  $y_i (i = 1, \dots, 4)$ . Для розв’язання системи рівнянь (11) при відповідних граничних умовах використовуємо метод дискретної ортогоналізації [4,14].

2. Розглянемо оболонку, поверхня якої утворена обертанням навколо осі  $x$  плоскої кривої, яка складається з двох кіл і прямої, що паралельна осі  $x$  (рис.2). У прямокутній системі координат  $x, y$  рівняння такої кривої можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{2Rx - x^2} \quad \text{при } 0 < x \leq R, \\ y &= R \quad \text{при } R < x < R + L, \\ y &= \sqrt{2Rx' - x'^2} \quad \text{при } x' = x - L, \quad R \leq x' \leq 2R. \end{aligned} \quad (13)$$

Необхідні в рівняннях коефіцієнти Ламе і радіуси кривизни визначаються з використанням відомих співвідношень диференціальної геометрії і виразів (13):

для сферичних частин

$$A_1 = \frac{R}{y}, \quad A_2 = y, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = \frac{R-x}{Ry}, \quad R_1 = R, \quad R_2 = R,$$

для циліндричної частини

$$A_1 = 1, \quad A_2 = R, \quad a_1 = a_2 = 0, \quad R_1 = 0, \quad R_2 = R.$$

Оболонку такого виду можна розглядати в якості континуальної моделі нанотрубки з напівсферичними кінцевими кришками. Вважаємо, що оболонка знаходиться під дією всебічного зовнішнього тиску (див. рис. 2). При проведенні розрахунків будемо використовувати параметри нанотрубок, отримані в роботі [10]. Згідно з [10], нанотрубка є ізотропною з модулем пружності  $E = 5,5 \text{ ТПа}$ , коефіцієнтом Пуассона  $0,19$ , радіусом  $R = 0,61 \text{ нм}$ , товщиною  $t = 0,066 \text{ нм}$ . Довжина нанотрубок варіюється від  $L/R = 2,64$  до  $L/R = 39,15$ . Оболонка складається з двох частин, кожна з яких окремо має різні критичні значення інтенсивності тиску, причому для оболонки сферичної форми вони значно вищі, ніж для циліндричної того ж радіуса [11]. Як це позначається на стійкості складової конструкції розглянемо, аналізуючи стійкість нанотрубок різної довжини зі сферичними кришечками і без них. При цьому передбачається, що в полюсах півсфер є маленький круговий отвір, на контурі якого задаються граничні умови. Радіус отвору вибирається таким, щоб його вплив на результати розрахунку був мінімальним. Наявність полюсного отвору зумовлена необхідністю усунення особливості в розв'язувальних рівняннях задачі.

У табл. 1 наведені результати розрахунку критичних значень інтенсивності зовнішнього тиску, обчисленого в  $\text{нН/нм}^2$ , що рівномірно розподілений по всій поверхні, при різних граничних умовах. У першій графі таблиці наведені значення довжини нанотрубок ( $L$ ).

Таблиця 1. Критичні значення інтенсивності зовнішнього тиску

| L, нм  | Шарнірне опирання<br>обох торців |                        | Жорстке защемлення<br>обох торців |                        | Жорстке защемлення,<br>вільний край |                        |
|--------|----------------------------------|------------------------|-----------------------------------|------------------------|-------------------------------------|------------------------|
|        | оболонка<br>з кришками           | оболонка<br>без кришок | оболонка<br>з кришками            | оболонка<br>без кришок | оболонка<br>з кришками              | оболонка<br>без кришок |
| 1      | 2                                | 3                      | 4                                 | 5                      | 6                                   | 7                      |
| 1,609  | 7,08                             | 6,06                   | 7,09                              | 7,03                   | 7,06                                | 3,06                   |
| 2,104  | 5,89                             | 4,57                   | 5,94                              | 6,46                   | 5,88                                | 2,81                   |
| 2,846  | 3,99                             | 3,53                   | 4,02                              | 5,49                   | 3,98                                | 2,63                   |
| 4,083  | 2,98                             | 2,90                   | 3,00                              | 3,74                   | 2,98                                | 2,52                   |
| 5,321  | 2,68                             | 2,67                   | 2,69                              | 3,09                   | 2,68                                | 2,48                   |
| 7,796  | 2,51                             | 2,53                   | 2,52                              | 2,65                   | 2,51                                | 2,45                   |
| 10,271 | 2,48                             | 2,48                   | 2,47                              | 2,53                   | 2,46                                | 2,44                   |
| 11,509 | 2,46                             | 2,47                   | 2,46                              | 2,45                   | 2,44                                | 2,44                   |
| 17,697 | 2,44                             | 2,44                   | 2,44                              | 2,45                   | 2,44                                | 2,44                   |
| 23,880 | 2,43                             | 2,44                   | 2,44                              | 2,44                   | 2,43                                | 2,43                   |

Для оболонок з кришками до неї додаються два радіуси кінцевих півсфер, друга і третя графі містять критичні значення інтенсивності тиску для випадку шарнірного опирання обох торців оболонки з кришечками і без них відповідно. З наведених результатів розрахунків видно, що при  $L < 5,321$  оболонки мають різні критичні навантаження, причому вони вищі для оболонок з кінцевими півсферами. При  $L > 5,321$  відмінність між ними стає незначною.

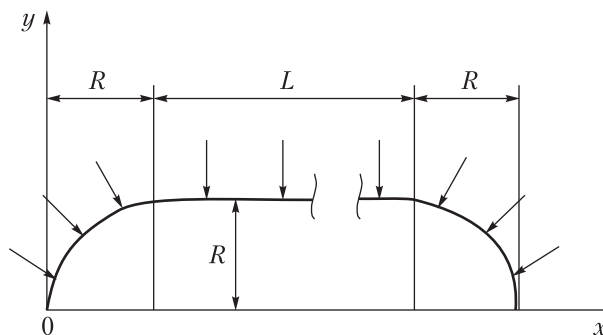


Рис. 2. Схема оболонки з навантаженнями

У четвертій і п'ятій графах наведені результати обчислень для таких же оболонок, але при жорсткому закріпленні торців. Тут для оболонок малої і середньої довжини критичні навантаження вищі за відсутності кінцевих півсфер, ніж для оболонок з ними. При  $L > 7,796$  геометрія торців впливає на стійкість оболонок незначно. У шостій і сьомій графах табл. 1 наведені критичні значення інтенсивності тиску для оболонок розглянутих типів при одному вільному і другому жорстко закріпленому торцях в залежності від довжини циліндричної частини нанотрубки. Оболонка зі сферичним торцем має значно вищі критичні навантаження в разі малої і середньої довжини. При  $L > 7,796$  оболонки обох типів при всіх розглянутих варіантах граничних умов мають однакові критичні навантаження.

Нанотрубки зі товщиною  $t = 0,066$  нм і радіусом  $R = 0,61$  нм не можна віднести до тонких оболонок, так як  $R/t = 9,24$ . У табл. 2 наведені результати розрахунку критичних навантажень нанотрубок зі сферичними торцями при вільному одному з них і жорстко закріпленому іншому в залежності від довжини  $L$ . Значення критичного тиску  $q_k$  отримані за викладеною методикою, а  $q_T$  — за методикою, що розроблена на основі теорії оболонок Тимошенко—Міндліна [11]. Наведені в останній графі табл. 2 величини  $q'$  відношення уточненого критичного навантаження до навантаження, що отримано в рамках гіпотези Кірхгофа—Лява ( $q' = q_T/q_K$ ), показують, що для коротких нанотрубок при дослідженні їх стійкості слід використовувати теорію Тимошенко—Міндліна.

На рис. 3 наведені криві, що ілюструють вигляд вигнутих при втраті стійкості твірних циліндричних нанотрубок без сферичних кришок (крива 1) і зі сферичними кришками (крива 2). Розглядаються оболонки з одним вільним і іншим жорстко закріпленним торцями. Довжина нанотрубок без урахування радіусів кінцевих півсфер дорівнює 1,609 та 5,321 нм, відповідно. Вигляд деформованої циліндричної оболонки без кришок характеризується істотним прогином в околі вільного торця, в той час як у випадках нанотрубок сферичними

Таблиця 2. Критичні навантаження нанотрубок з одним вільним, а другим жорстко закріпленим сферичними торцями

| $L$ , нм | $q_K$ | $q_T$            | $q'$ |
|----------|-------|------------------|------|
| 1,609    | 7,06  | 5,66 ( $n = 3$ ) | 0,80 |
| 2,104    | 5,88  | 4,29 ( $n = 2$ ) | 0,73 |
| 2,846    | 3,98  | 3,34             | 0,84 |
| 4,083    | 2,98  | 2,77             | 0,93 |
| 5,321    | 2,68  | 2,58             | 0,96 |
| 7,796    | 2,51  | 2,46             | 0,98 |
| 10,271   | 2,46  | 2,42             | 0,98 |
| 11,509   | 2,44  | 2,42             | 0,99 |
| 17,697   | 2,44  | 2,40             | 0,99 |
| 23,880   | 2,43  | 2,40             | 0,99 |

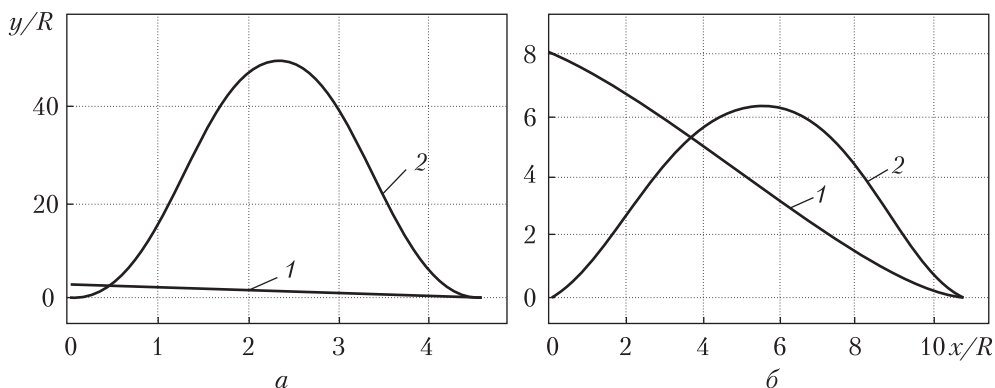


Рис. 3. Вигляд твірних циліндричних нанотрубок при довжині 1,609 (а) та 5,321 (б)

кришками графіки майже симетричні щодо середини оболонки, тобто на формі твірної майже не відображується той факт, що один її край не закріпленний, вільний.

Суттєво по іншому втрачають стійкість нанотрубки з кришками при осьовому стиску. В цьому випадку осьове навантаження сконцентровано в околі полюсного отвору, радіус якого  $r_0$  визначається центральним кутом  $\varphi_0$ . Радіус півсфери  $R = 0,61$  нм, довжина циліндричної частини дорівнює 2 нм з тим же радіусом. Зосереджене навантаження  $P = 2\pi r_0 T_0$ , де  $T_0$  – зусилля, що направлене вздовж осі  $x$ . Крайові умови при  $x = x_0 = R(1 - \cos \varphi_0/2)$  визначаються як  $T_{11,0} = T_0 \sin \frac{\varphi_0}{2}$  та  $T_{13,0} = T_0 \cos \frac{\varphi_0}{2}$ ,  $T_{12,0} = 0$ ,  $M_{11,0} = 0$ . На протилежному торці при  $x = L - 2x_0$  задаються умови жорсткого защемлення.

Розрахунки показали, що як сфера, так і півсфера без циліндричної частини втрачають стійкість при  $T_0 = 5,61 \text{ nPa/nm}$ . Критичне значення осьового зусилля для вказаної циліндричної оболонки ( $\varphi_0 = 0$ ) з одним вільним, а другим защемленим торцями дорівнює  $T_0 = 7,45 \text{ nPa/nm}$ . Якщо оболонка складається з двох півсфер і циліндра, то  $T_0 = 5,1 \text{ nPa/nm}$ . Різниця в критичних навантаженнях сфери та циліндра призводить до того, що при втраті стійкості нанотрубки з кришками відбувається локальне вигинання півсфер. Критичні навантаження півсфери та циліндра з півсферою відрізняються незначно.

Таким чином, авторами розроблено континуальну розрахункову модель нанотрубок у вигляді оболонок обертання, що дозволяє досліджувати їх стійкість при наявності кінцевих напівсферичних кришок і без них. Досліджено вплив кришок на критичні значення інтенсивності зовнішнього тиску для нанотрубок різної довжини при різних граничних умовах. Встановлено, що наявність напівсферичних кришок на кінцях нанотрубок відіграє позитивну роль, підвищуючи їх стійкість при зовнішньому тиску. Якщо нанотрубки дуже довгі, то вплив виду граничних умов, а також наявності на краях кришок на критичних навантаженнях не позначається.

Досліджено також стійкість сферичних (фулеренів) та циліндричних оболонок (нанотрубок) з напівсферичними кришками при осьовому стиску зосередженими навантаженнями. Показано, що для сферичних і напівсферичних оболонок критичні значення навантажень збігаються. При стиску нанотрубок з кришками відбувається локальне вигинання півсфер при навантаженнях значно менших, ніж для окремого циліндра. Отримані результати можуть бути корисні в різних нанопристроях, зокрема, при використанні нанотрубок в якості зондів.

ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Гузь А.Н., Рущицкий Я.Я., Гузь И.А. Введение в механику нанокомпозитов. Киев: Институт механики им. С.П.Тимошенко, 2010. 398 с.
2. Elishakoff I., Pentaras D. et al. Carbon nanotubes and Nanosensors: Vibration, Buckling and Ballistic Impact. Wiley-ISTE, 2012. 448 p.
3. Ru C.Q. Elastic buckling of singwalled carbon nanotubes ropes under hight pressure. *Phys. Review*. 2000. **62**. P. 10405–10408.
4. Семенюк Н.П. К устойчивости двухслойных углеродных нанотрубок. *Прикл. механика*. 2016. **52**, № 1. С. 108–117.
5. Shima H. Buckling of Carbon Nanotubes: A State of the Art Review. *Materials*. 2012. **5**. P. 47–84.
6. Sears A., Batra B.C. Buckling of multiwalled carbon nanotubes under axial compression. *Phys. review*. 2006. **B 73**. P. 1–11.
7. Thostenton E.T., Li C., Chou T.-W. Nanocomposites in context (review). *Composites Science and Technology*. 2005. **65**. P. 491–516.
8. Wang C.M., Zhang Y.Y., Xiang Y., Reddy J.N. Recent Studies on Buckling of Carbon Nanotubes. *Appl. Mech. Reviews*. 2010. **63**, № 3. P. 1–18.
9. Wang C.M., Tay Z.Y., Chowdhuary A.H., Duan W.D., Zhang Y.Y., Silvestre N. Examination of cylindrical shells theories for buckling of carbon nanotubes. *Int. J. Struct. Stability and Dynamics*. 2011. **11**, № 6. P. 1035–1058.
10. Yakobson B.I., Brabec C.J., Brabec J. Nanomechanics of carbon tubes instabilities beyond linear response. *Phys. Review Letters*. 1996. **76**. P. 2511–2514.
11. Баженов В.А., Семенюк М.П., Трач В.М. Нелінійне деформування, стійкість і закритична поведінка анізотропних оболонок. Київ: Каравела, 2010. 352 с.
12. Ванин Г.Л., Семенюк Н.П. Устойчивость оболочек из композиционных материалов с несовершенствами. Київ: Наук. думка, 1987. 200 с.
13. Lanczos C. *The Variational Principles of Mechanics*. Univ. of Toronto Press, 1964. 367 p.
14. Семенюк Н.П., Жукова Н.Б. Об устойчивости и закритическом поведении ортотропных цилиндрических оболочек с локальными прогибами. *Прикл. механика*. 2016. **52**, № 3. С. 92–104.

Надійшло до редакції 07.05.2018

REFERENCES

1. Guz, A. N., Rushchitsky, J. J. & Guz, I. A. (2010). Introduction in Mechanics of nanocomposites. Kiev: S.P. Timoshenko Institute of Mechanics (in Russian).
2. Elishakoff, I. & Pentaras, D. et al. (2012). Carbon nanotubes and Nanosensors: Vibration, Buckling and Ballistic Impact. Wiley-ISTE.
3. Ru, C. Q. (2000). Elastic buckling of singwalled carbon nanotubes ropes under hight pressure. *Phis. Review*, 62, pp. 10405-10408.
4. Semenyuk, N. P. (2016). Stability of double-walled carbon nanotubes revisited. *Int. Appl. Mech.*, 52, No. 1, pp. 73-81.
5. Shima, H. (2012). Buckling of Carbon Nanotubes: A State of the Art Review. *Materials*, 5, pp. 47-84.
6. Sears, A. & Batra, B. C. (2006). Buckling of multiwalled carbon nanotubes under axial compression. *Phis. Review*, B 73, pp. 1-11.
7. Thostenton, E. T., Li, C. & Chou, T.-W. (2005). Nanocomposites in context (review). *Composites Science and Technology*, 65, pp. 491-516.
8. Wang, C. M., Zhang, Y. Y., Xiang, Y. & Reddy, J. N. (2010). Recent Studies on Buckling of Carbon Nanotubes. *Appl. Mechanics Reviews*, 63, No. 3, pp. 1-18.
9. Wang, C. M., Tay, Z. Y., Chowdhuary, A. H., Duan, W. D., Zhang, Y. Y. & Silvestre, N. (2011). Examination of cylindrical shells theories for buckling of carbon nanotubes. *Int. J. Struct. Stability and Dynamics*, 11, No. 6, pp. 1035-1058.
10. Yakobson, B. I., Brabec, C. J. & Brabec, J. (1996). Nanomechanics of carbon tubes instabilities beyond linear response. *Phys. Review Letters*, 76, pp. 2511-2514.



11. Bazhenov, V. A., Semenyuk, M. P. & Trach, V. M. (2010). Nonlinear deformation, stability and post-buckling behavior of anisotropic shells. Kiev: Caravela (in Ukrainian).
12. Vanin, G. A. & Semenyuk, N. P. (1987). Stability of shells made of composite materials with imperfections. Kiev: Naukova dumka (in Russian).
13. Lanczos, C. (1964). The Variational Principles of Mechanics. Univ. of Toronto Press.
14. Semenyuk, N. P. & Zhukova, N. B. (2016). Stability and Post-Buckling Behavior of Orthotropic Cylindrical Shells with Local Deflection. Int. Appl. Mech., 52, No. 3, pp. 290-300.

Received 07.05.2018

Н.П. Семенов<sup>1</sup>, В.М. Трач<sup>2</sup>, Н.Б. Жукова<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Институт механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины, Киев

<sup>2</sup> Национальный университет водного хозяйства и природопользования, Ровно

E-mail: zhukova\_n@ukr.net, trach-vm@ukr.net

#### К КОНТИНУАЛЬНОЙ РАСЧЕТНОЙ МОДЕЛИ УСТОЙЧИВОСТИ НАНОТРУБОК С ПОЛУСФЕРИЧЕСКИМИ КРЫШКАМИ

Для исследования устойчивости углеродных нанотрубок предлагается континуальная расчетная модель, в основу которой положена нелинейная теория анизотропных оболочек среднего изгиба. Проведены расчеты критических состояний для нанотрубок с торцевыми полусферическими крышками и без них при различных граничных условиях и различных внешних нагрузках.

**Ключевые слова:** теория оболочек, устойчивость, углеродная нанотрубка, полусферические крышки, внешнее давление, осевое сжатие

N.P. Semenyuk<sup>1</sup>, V.M. Trach<sup>2</sup>, N.B. Zhukova<sup>1</sup>

<sup>1</sup> S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of the NAS of Ukraine, Kiev

<sup>2</sup> National University of Water and Environmental Engineering, Rivne

E-mail: zhukova\_n@ukr.net, trach-vm@ukr.net

#### TO A CONTINUAL CALCULATION MODEL OF STABILITY OF NANOTUBES WITH HEMISPHERICAL END CAPS

A continual calculation model is offered to study the stability of carbon nanotubes. It is based on the non-linear theory of anisotropic shells with medium curvature. The calculations of critical states for nanotubes with hemispherical end caps and without them under different boundary conditions and different external loads are carried out.

**Keywords:** theory of shells, stability, carbon nanotube, hemispherical end caps, external pressure, axial compression.