ДОПОВІДІ НАЦІОНАЛЬНОЇ АКАДЕМІЇ НАУК УКРАЇНИ

doi: https://doi.org/10.15407/dopovidi2018.09.012
УДК 517.58/.5892

С.С. Зуб

Киевский национальный университет им. Тараса Шевченко
E-mail: stah@univ.kiev.ua

Математические модели динамики симметричного волчка во внешних аксиально симметричных полях

Представлено членом-корреспондентом НАН Украины С.И. Ляшко

Описан новый подход к исследованию динамической устойчивости магнитных тел в аксиально симметричном магнитном поле. Рассмотрен гамильтониан, описывающий широкий класс моделей с симметричным волчком, взаимодействующим с внешними аксиально симметричными полями. Найдены необходимые и достаточные условия динамического равновесия для нового класса моделей с симметричным волчком. Получены уравнения движения в форме удобной для численного моделирования.

Ключевые слова: *динамические системы, математические модели, симметричный волчок, устойчивость, уравнения движения.*

В работе обобщаются все предыдущие подходы к исследованию динамической устойчивости магнитных тел в аксиально симметричном магнитном поле с учетом силы тяжести. Предлагается гамильтониан, описывающий широкий класс моделей с симметричным волчком, взаимодействующим с внешними аксиально симметричными полями. Рассматривается устойчивость относительных равновесий. Исследование проводится с использованием инерциальной системы отсчета. Устойчивость исследуется с помощью теоремы Ратью—Ортега. Эквивалентность алгоритмов этой теоремы и классического метода энергии-момента обоснована в работе [1].

Найдены необходимые и достаточные условия динамического равновесия.

Впервые в общем виде выведены законченные аналитические формулы для достаточных условий. Это сделано благодаря новому, более простому, условию трансверсальности и методу исключения изолированных квадратов.

Имеем скобки Пуассона

$$\{x_i, p_j\} = \delta_{ij}, \{\nu_i, \nu_k\} = 0, \{\pi_i, \nu_j\} = \varepsilon_{ijl}\nu_l, \{\pi_i, \pi_j\} = \varepsilon_{ijl}\pi_l .$$

$$h((\vec{x}, \vec{\nu}), (\vec{p}, \vec{\pi})) = \frac{1}{2M}\vec{p}^2 + \frac{1}{2I_\perp}\vec{\pi}^2 + V(\vec{x}, \vec{\nu}).$$

Применяя $\dot{f} = \{f, h\}$ к базовым динамическим переменным (д. п.), получаем

$$\begin{cases} \dot{\vec{x}} = \dfrac{1}{M}\vec{p}; \\ \dot{\vec{p}} = -\nabla^x V(\vec{x}, \vec{\nu}); \\ \dot{\vec{\nu}} = \dfrac{1}{I_\perp}\vec{\pi} \times \vec{\nu}; \\ \dot{\vec{\pi}} = \nabla^\nu V(\vec{x}, \vec{\nu}) \times \vec{\nu}. \end{cases}$$

Так как кинетическая энергия $SO(3)$ — симметрична, то условие аксиальной симметрии гамильтониана системы сводится к требованию аксиальной симметрии потенциальной энергии:

$$\{V, j_3\} = x^1 \frac{\partial V}{\partial x^2} - x^2 \frac{\partial V}{\partial x^1} + \nu^1 \frac{\partial V}{\partial \nu^2} - \nu^2 \frac{\partial V}{\partial \nu^1} = 0,$$

которое также можно записать в виде

$$\vec{x}_\perp \times (\nabla^x V)_\perp + \vec{\nu}_\perp \times (\nabla^\nu V)_\perp = 0. \tag{1}$$

Как будет показано ниже, соотношение (1) тождественно выполняется на орбите относительного равновесия, поэтому не вносит ничего нового в исследование устойчивости.

Интегралы движения и форма присоединенного гамильтониана остаются такими же, как и в задаче об Орбитроне, а именно

$$h^\xi = h - \omega J_3 + \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2,$$

где

$$\begin{cases} C_1(\vec{\nu}, \vec{\pi}) = \vec{\nu}^2; \\ C_2(\vec{\nu}, \vec{\pi}) = \vec{\nu} \cdot \vec{\pi}; \\ J_3(((\vec{x}, \vec{\nu}), (\vec{p}, \vec{\pi}))) = \pi_3 + x_1 p_2 - x_2 p_1. \end{cases}$$

Из

$$dh^\xi = \left(\frac{1}{M}\vec{p} - \omega\vec{e}_3 \times \vec{x}\right) \cdot d\vec{p} + \left(\frac{1}{I_\perp}\vec{\pi} - \omega\vec{e}_3 + \lambda_2\vec{\nu}\right) \cdot d\vec{\pi} +$$
$$+ (\nabla^x V + \omega\vec{e}_3 \times \vec{p}) \cdot d\vec{x} + (\nabla^\nu V + 2\lambda_1\vec{\nu} + \lambda_2\vec{\pi}) \cdot d\vec{\nu}$$

получаем необходимые условия относительного равновесия

$$\begin{cases} \vec{p} = M\omega(\vec{e}_3 \times \vec{x}); \\ \nabla^x V + \omega\vec{e}_3 \times \vec{p} = 0; \\ \vec{\pi} = I_\perp \omega\vec{e}_3 - \lambda_2 I_\perp \vec{\nu}; \\ \nabla^\nu V + 2\lambda_1\vec{\nu} + \lambda_2\vec{\pi} = 0; \end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{cases} \nabla^x V = M\omega^2 \vec{x}_\perp; \\ \lambda_2 = \omega\nu_3 - \dfrac{1}{I_\perp} C_2; \\ \nabla^\nu V + \lambda\vec{\nu} + I_\perp \omega\lambda_2 \vec{e}_3 = 0, \end{cases} \tag{3}$$

где

$$\lambda = 2\lambda_1 - \lambda_2^2 I_\perp.$$

Отсюда следует

$$\begin{cases} \nabla^x V = M\omega^2 \vec{x}_\perp; \\ (\nabla^\nu V)_\perp = -\lambda\vec{\nu}_\perp; \\ \omega C_2 = \omega\langle\vec{\nu}, \vec{\pi}\rangle = \dfrac{\partial V}{\partial \nu_z} + (\lambda + I_\perp\omega^2)\nu_z. \end{cases} \tag{4}$$

Здесь символ $\vec{u}_\perp$ означает составляющую вектора $\vec{u}$, ортогональную оси симметрии системы *z*.

Замечание 1. Вектор $\vec{\nu}$ и множитель Лагранжа ω находятся из первых двух строк (2) или, что то же самое, из первой строки (3). Это отличается от Орбитрона, где было постулировано, что $\vec{\nu}$ направлен вдоль оси *z*.

Замечание 2. Соотношения (4) не только определяют $\vec{\nu}$ и множители Лагранжа ω, λ_1, λ_2, но и, скорее всего, накладывают ограничения на функцию *V* дополнительно к ее аксиальной симметрии. Опорная точка и допустимые вариации

$$\begin{cases} \vec{x}_0 = r_0\vec{e}_1; \\ \vec{p}_0 = M\omega r_0 \vec{e}_2; \\ \vec{\nu}_0 = \vec{\nu}_0, \vec{\nu}_0^2 = 1; \\ \vec{\pi}_0 = C_2\vec{\nu}_0 + I_\perp \omega P_\perp^{\nu_0}(\vec{e}_3). \end{cases} \tag{5}$$

Как уже отмечалось, вектор $\vec{\nu}_0$ должен быть найден из необходимых условий устойчивости. Допустимые вариации $v = (\delta x, \delta p, \delta\nu, \delta\pi)$ в опорной точке удовлетворяют следующим условиям:

$$\begin{cases} \delta_v C_1 = 2\nu_{0i}\delta\nu_i = 0; \\ \delta_v C_2 = \pi_{0i}\delta\nu_i + \nu_{0i}\delta\pi_i = 0; \\ \delta_v J_3 = \delta\pi_3 + p_0\delta x_1 + r_0\delta p_2 = 0. \end{cases}$$

К этим условиям добавляем условие трансверсальности, которое в отличие от задачи об Орбитроне берем в более простом виде, упрощающем дальнейшие вычисления. Таким образом, полный набор условий может быть записан в следующем виде:

$$\begin{cases} \delta\nu_3 = -\dfrac{1}{\nu_{0z}}\langle \vec{\nu}_{0\perp}, \delta\vec{\nu}\rangle; \\ \delta\pi_3 = -\dfrac{1}{\nu_{0z}}\left\langle \vec{\nu}_{0\perp}, \left(\delta\vec{\pi} - \dfrac{I_\perp\omega}{\nu_{0z}}\delta\vec{\nu}\right)\right\rangle; \\ \delta p_2 = -\dfrac{p_0}{r_0}\delta x_1 - \dfrac{1}{r_0}\delta\pi_3; \\ \delta x_2 = 0. \end{cases} \tag{6}$$

Замечание 3. То, что для касательного к орбите вектора не может выполняться $\dot{x}_{02} = 0$, следует из второй строки (5), если $r_0 \neq 0$ и $\omega \neq 0$, что всегда предполагается.

Анализ связей на вариации удобно выполнить в системе координат, приспособленной к вектору $\vec{\nu}_{0\perp}$.

Замечание 4. Если этот вектор (как в случае Орбитрона) равен 0, то новая система координат на плоскости совпадает с исходной декартовой.

Рассмотрим систему координат на плоскости, связанную с выделенным вектором $\vec{a}$. Пусть на плоскости задана система координат $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ и вектор $\vec{a}$. Направим базисный вектор $\vec{E}_1$ новой системы координат $\{\vec{E}_1, \vec{E}_2\}$ по вектору $\vec{a}$. Для того чтобы новая система координат была правильно ($\vec{E}_1 \times \vec{E}_2 = \vec{e}_3$) ориентирована, должны выполняться следующие соотношения:

$$\begin{cases} \vec{E}_1 = \dfrac{a^1}{|\vec{a}|}\vec{e}_1 + \dfrac{a^2}{|\vec{a}|}\vec{e}_2 = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}; \\ \vec{E}_2 = -\dfrac{a^2}{|\vec{a}|}\vec{e}_1 + \dfrac{a^1}{|\vec{a}|}\vec{e}_2. \end{cases}$$

Введем матрицу

$$\alpha = \begin{bmatrix} \dfrac{a^1}{|\vec{a}|} & -\dfrac{a^2}{|\vec{a}|} \\ \dfrac{a^2}{|\vec{a}|} & \dfrac{a^1}{|\vec{a}|} \end{bmatrix}, \quad \vec{E}_i = \alpha_{ki}\vec{e}_k, \quad \alpha_{ki} = \langle \vec{e}_k, \vec{E}_i\rangle.$$

Тогда

$$\alpha_{ki}X_i = \langle \vec{e}_k, X_i\vec{E}_i\rangle = \langle \vec{e}_k, \vec{x}\rangle = x_k,$$

то есть

$$x_k = \alpha_{ki}X_i, \quad \mathbf{x} = \alpha\mathbf{X},$$

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{a_1}{|\vec{a}|}X_1 - \dfrac{a_2}{|\vec{a}|}X_2; \\ x_2 = \dfrac{a_2}{|\vec{a}|}X_1 + \dfrac{a_1}{|\vec{a}|}X_2. \end{cases}$$

Соответственно,

$$X_k = (\alpha^{-1})_{ki} x_i, \quad \mathbf{X} = \alpha^{-1}\vec{x},$$

где

$$\alpha^{-1} = \alpha^T = \begin{bmatrix} \dfrac{a^1}{|\vec{a}|} & \dfrac{a^2}{|\vec{a}|} \\ -\dfrac{a^2}{|\vec{a}|} & \dfrac{a^1}{|\vec{a}|} \end{bmatrix}.$$

В нашем случае выделенный вектор на плоскости — это $\vec{\nu}_{0\perp}$, поэтому

$$\alpha = \frac{1}{|\vec{\nu}_{0\perp}|}\begin{bmatrix} \nu_{01} & -\nu_{02} \\ \nu_{02} & \nu_{01} \end{bmatrix}, \quad \vec{E}_A = \alpha_{BA}\vec{e}_B, \quad \alpha_{BA} = \langle \vec{e}_B, \vec{E}_A \rangle,$$

$$\alpha_{AB} = \frac{\nu_{01}}{|\vec{\nu}_{0\perp}|}\delta_{AB} - \frac{\nu_{02}}{|\vec{\nu}_{0\perp}|}\varepsilon_{AB},$$

$$\begin{cases} \vec{E}_1 = \dfrac{1}{|\vec{\nu}_{0\perp}|}(\nu_{01}\vec{e}_1 + \nu_{02}\vec{e}_2) = \dfrac{\vec{\nu}_{0\perp}}{|\vec{\nu}_{0\perp}|}; \\ \vec{E}_2 = \dfrac{1}{|\vec{\nu}_{0\perp}|}(-\nu_{02}\vec{e}_1 + \nu_{01}\vec{e}_2); \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{E}_1 = \dfrac{1}{|\vec{\nu}_{0\perp}|}\delta_{AB}\nu_{0A}\vec{e}_B; \\ \vec{E}_2 = \dfrac{1}{|\vec{\nu}_{0\perp}|}\varepsilon_{AB}\nu_{0A}\vec{e}_B. \end{cases}$$

Будем использовать исходную систему координат для вариаций δx, δp и базис $\{\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{e}_3\}$ для вариаций $\delta\nu$, $\delta\pi$, обозначим эти вариации в новой системе большими буквами $\delta\mathrm{N}$, $\delta\Pi$. Тогда связи (6) будут иметь вид

$$\begin{cases} \delta\nu_3 = -\dfrac{|\vec{\nu}_{0\perp}|}{\nu_{0z}}\delta\mathrm{N}_1; \\ \delta\pi_3 = -\dfrac{|\vec{\nu}_{0\perp}|}{\nu_{0z}}\left(\delta\Pi_1 - \dfrac{1}{\nu_{0z}}I_\perp\omega\delta\mathrm{N}_1\right); \\ \delta p_2 = -M\omega\delta x_1 + \dfrac{|\vec{\nu}_{0\perp}|}{r_0\nu_{0z}}\left(\delta\Pi_1 - \dfrac{1}{\nu_{0z}}I_\perp\omega\delta\mathrm{N}_1\right); \\ \delta x_2 = 0. \end{cases}$$

Введем переменную $\delta\Pi_1'$:

$$\begin{cases} \delta\Pi_1' = \delta\Pi_1 - \dfrac{1}{\nu_{0z}} I_\perp \omega \delta N_1; \\ \delta\Pi_1 = \delta\Pi_1' + \dfrac{1}{\nu_{0z}} I_\perp \omega \delta N_1. \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{cases} \delta\nu_3 = -\dfrac{|\vec{\nu}_{0\perp}|}{\nu_{0z}} \delta \mathrm{N}_1; \\ \delta\pi_3 = -\dfrac{|\vec{\nu}_{0\perp}|}{\nu_{0z}} \delta\Pi_1'; \\ \delta p_2 = -M\omega\delta x_1 + \dfrac{|\vec{\nu}_{0\perp}|}{r_0 \nu_{0z}} \delta\Pi_1'; \\ \delta x_2 = 0. \end{cases}$$

Вторая вариация присоединенного гамильтониана имеет вид (индексы $i, j, k = 1 \ldots 3$, A, B, $C = 1 \ldots 2$)

$$\delta_v^2 h^\lambda = \frac{1}{M}\delta p_3^2 + \frac{1}{M}\delta p_1^2 + \frac{1}{M}\delta p_2^2 + \frac{1}{I_\perp}\delta\vec{\pi}_\perp^2 + \frac{1}{I_\perp}\delta\pi_3^2 +$$
$$+2\lambda_2\langle\delta\vec{\pi}_\perp, \delta\vec{\nu}_\perp\rangle + 2\lambda_2\delta\pi_3\delta\nu_3 + 2\lambda_1\delta\vec{\nu}_\perp^2 + 2\lambda_1\delta\nu_3^2 -$$
$$-2\omega(\delta x_1\delta p_2 - \delta x_2 \delta p_1) + \frac{\partial^2 V}{\partial x^i \partial x^j}\delta x^i \delta x^j +$$
$$+2\frac{\partial^2 V}{\partial x^i \partial \nu^A}\delta x^i \delta\nu^A + 2\frac{\partial^2 V}{\partial x^i \partial \nu^3}\delta x^i \delta \nu^3 +$$
$$+\frac{\partial^2 V}{\partial \nu^A \partial \nu^B}\delta\nu^A\delta\nu^B + 2\frac{\partial^2 V}{\partial\nu^A\partial\nu^3}\delta\nu^A\delta\nu^3 + \frac{\partial^2 V}{\partial \nu_3^2}\delta\nu_3^2. \qquad (7)$$

Используя связи, получаем

$$\begin{cases} \dfrac{1}{M}\delta p_2^2 = M\omega^2\delta x_1^2 - 2\omega\dfrac{|\vec{\nu}_{0\perp}|}{r_0\nu_{0z}}\delta x_1 \delta\Pi_1' + \dfrac{\vec{\nu}_{0\perp}^2}{M r_0^2 \nu_{0z}^2}\delta\Pi_1'^2; \\ \dfrac{1}{I_\perp}\delta\vec{\pi}^2 = \dfrac{1}{I_\perp}\dfrac{1}{\nu_{0z}^2}\delta\Pi_1'^2 + 2\dfrac{1}{\nu_{0z}}\omega\delta\Pi_1'\delta\mathrm{N}_1 + \dfrac{1}{\nu_{0z}^2} I_\perp \omega^2 \delta\mathrm{N}_1^2 + \dfrac{1}{I_\perp}\delta\Pi_2^2; \\ \langle\delta\vec{\pi}, \delta\vec{\nu}\rangle = \dfrac{1}{\nu_{0z}^2}\delta\Pi_1'\delta\mathrm{N}_1 + \delta\Pi_2\delta\mathrm{N}_2 + \dfrac{1}{\nu_{0z}} I_\perp \omega \delta\mathrm{N}_1^2; \\ \delta\vec{\nu}^2 = \dfrac{1}{\nu_{0z}^2}\delta\mathrm{N}_1^2 + \delta\mathrm{N}_2^2; \\ -2\omega(\delta x_1 \delta p_2 - \delta x_2 \delta p_1) = 2M\omega^2\delta x_1^2 - 2\omega\dfrac{|\vec{\nu}_{0\perp}|}{r_0 \nu_{0z}}\delta x_1 \delta\Pi_1'. \end{cases} \qquad (8)$$

Далее используются следующие обозначения:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 V}{\partial x^i \partial \mathrm{N}_A} = d^2V(\vec{e}_i, \vec{E}_A); \\ \dfrac{\partial^2 V}{\partial \mathrm{N}_A \partial \mathrm{N}_B} = d^2V(\vec{E}_A, \vec{E}_B); \\ \dfrac{\partial^2 V}{\partial \mathrm{N}_A \partial \nu_3} = \partial_{\vec{E}_A}\left(\dfrac{\partial V}{\partial \nu_3}\right), \end{cases}$$

причем в выражениях этого типа всегда считается, что векторы $\vec{e}_i$ касательны к пространству переменных $\vec{x}$, а $\vec{E}_A$ — к пространству переменных $\vec{\nu}$. Подставляя (8) в (7), находим приведенную квадратичную форму $Q = Q(x_1, \ldots, x_n)$:

$$\delta_v^2 h^\lambda = \frac{1}{M}\delta p_3^2 + \frac{1}{M}\delta p_1^2 + M\omega^2\delta x_1^2 - 2\omega\frac{|\vec{\nu}_{0\perp}|}{r_0\nu_{0z}}\delta x_1\delta\Pi_1' + \frac{\vec{\nu}_{0\perp}^2}{Mr_0^2\nu_{0z}^2}\delta\Pi_1'^2 + \frac{1}{I_\perp}\frac{1}{\nu_{0z}^2}\delta\Pi_1'^2 +$$

$$+2\frac{1}{\nu_{0z}}\omega\delta\Pi_1'\delta\mathrm{N}_1 + \frac{1}{\nu_{0z}^2}I_\perp\omega^2\delta\mathrm{N}_1^2 + \frac{1}{I_\perp}\delta\Pi_2^2 + 2\lambda_2\left(\frac{1}{\nu_{0z}^2}\delta\Pi_1'\delta\mathrm{N}_1 + \delta\Pi_2\delta\mathrm{N}_2 + \frac{1}{\nu_{0z}}I_\perp\omega\delta\mathrm{N}_1^2\right) +$$

$$+2\lambda_1\left(\frac{1}{\nu_{0z}^2}\delta\mathrm{N}_1^2 + \delta\mathrm{N}_2^2\right) + 2M\omega^2\delta x_1^2 - 2\omega\frac{|\vec{\nu}_{0\perp}|}{r_0\nu_{0z}}\delta x_1\delta\Pi_1' + \frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2}\delta x_1^2 + 2\frac{\partial^2 V}{\partial x_1\partial x_3}\delta x_1\delta x_3 + \frac{\partial^2 V}{\partial x_3^2}\delta x_3^2 +$$

$$+2\frac{\partial^2 V}{\partial x^1\partial\mathrm{N}_A}\delta x^1\delta\mathrm{N}_A + 2\frac{\partial^2 V}{\partial x^3\partial\mathrm{N}_A}\delta x^3\delta\mathrm{N}_A - 2\frac{|\vec{\nu}_{0\perp}|}{\nu_{0z}}\frac{\partial^2 V}{\partial x^1\partial\nu^3}\delta x^1\delta\mathrm{N}_1 -$$

$$-2\frac{|\vec{\nu}_{0\perp}|}{\nu_{0z}}\frac{\partial^2 V}{\partial x^3\partial\nu^3}\delta x^3\delta\mathrm{N}_1 + \frac{\partial^2 V}{\partial\mathrm{N}_1^2}\delta\mathrm{N}_1^2 + 2\frac{\partial^2 V}{\partial\mathrm{N}_1\partial\mathrm{N}_2}\delta\mathrm{N}_1\delta\mathrm{N}_2 + \frac{\partial^2 V}{\partial\mathrm{N}_2^2}\delta\mathrm{N}_2^2 -$$

$$-2\frac{|\vec{\nu}_{0\perp}|}{\nu_{0z}}\frac{\partial^2 V}{\partial\mathrm{N}_1\partial\nu^3}\delta\mathrm{N}_1^2 - 2\frac{|\vec{\nu}_{0\perp}|}{\nu_{0z}}\frac{\partial^2 V}{\partial\mathrm{N}_2\partial\nu^3}\delta\mathrm{N}_1\delta\mathrm{N}_2 + \frac{\vec{\nu}_{0\perp}^2}{\nu_{0z}^2}\frac{\partial^2 V}{\partial\nu_3^2}\delta\mathrm{N}_1^2.$$

Для вывода условий положительной определенности квадратичной формы Q используем метод последовательного исключения изолированных квадратов, аналогичный процедуре Гильберта—Шмидта ортогонализации базиса. Представим

$$Q(x_1, \ldots, x_n) = Ax_1^2 + 2B(x_2, \ldots, x_n)x_1 + Q'(x_2, \ldots, x_n),$$

где B — линейная функция своих переменных, а Q' — квадратичная функция своих переменных, уже независящие от x_1.

Для положительной определенности Q необходимо, чтобы $A > 0$, тогда положительная определенность Q эквивалентна положительной определенности следующей ниже квадратичной формы Q_1 от меньшего числа переменных:

$$Q_1(x_2, \ldots, x_n) = -\frac{1}{A}B^2(x_2, \ldots, x_n) + Q'(x_2, \ldots, x_n).$$

Последовательно применяя эту процедуру, можно найти все условия положительной определенности исходной квадратичной формы, т. е. все очередные $A > 0$.

Замечание 5. Порядок исключения переменных является произвольным.

Применяя метод последовательного исключения изолированных квадратов в следующем порядке: $\delta p_3, \delta p_1, \delta\Pi_2, \delta\Pi_1', \delta N_2, \delta N_1$, получаем

$$\begin{cases} \lambda + d^2V(\vec{E}_2, \vec{E}_2) > 0; \\ \lambda + d^2V(\vec{\nu}_0^{\mathrm{T}}, \vec{\nu}_0^{\mathrm{T}}) + \dfrac{I_\perp^2 \vec{\nu}_{0\perp}^2}{I_\perp \vec{\nu}_{0\perp}^2 + Mr_0^2}(\nu_{0z}\omega + \lambda_2)^2 + \vec{\nu}_{0\perp}^2 I_\perp \omega^2 - \dfrac{d^2V(\vec{E}_2, \vec{\nu}_0^{\mathrm{T}})^2}{\lambda + d^2V(\vec{E}_2, \vec{E}_2)} > 0; \\ A > 0, \quad C > 0, \quad AC - B^2 > 0, \end{cases}$$

где A, B, C — громоздкие аналитические выражения. Используются следующие обозначения. Введем вектор $\vec{\nu}_0^{\mathrm{T}} = \nu_{0z}\vec{E}_1 - |\vec{\nu}_{0\perp}|\vec{e}_3, \quad \langle \vec{\nu}_0, \vec{\nu}_0^{\mathrm{T}} \rangle = 0.$ Тогда

$$\begin{cases} d^2V(\vec{E}_2, \vec{\nu}_0^{\mathrm{T}}) = \nu_{0z}\dfrac{\partial^2 V}{\partial N_1 \partial N_2} - |\vec{\nu}_{0\perp}|\dfrac{\partial^2 V}{\partial N_2 \partial \nu^3}; \\ d^2V(\vec{e}_1, \vec{\nu}_0^{\mathrm{T}}) = \nu_{0z}\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^1 \partial N_1} - |\vec{\nu}_{0\perp}|\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^1 \partial \nu^3}; \\ d^2V(\vec{e}_3, \vec{\nu}_0^{\mathrm{T}}) = \nu_{0z}\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^3 \partial N_1} - |\vec{\nu}_{0\perp}|\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^3 \partial \nu^3}; \\ d^2V(\vec{\nu}_0^{\mathrm{T}}, \vec{\nu}_0^{\mathrm{T}}) = \nu_{0z}^2\dfrac{\partial^2 V}{\partial N_1^2} - 2|\vec{\nu}_{0\perp}|\nu_{0z}\dfrac{\partial^2 V}{\partial N_1 \partial \nu^3} + \vec{\nu}_{0\perp}^2\dfrac{\partial^2 V}{\partial \nu_3^2}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 V}{\partial x^1 \partial N_1} = \dfrac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial \nu_1}\dfrac{\nu_{01}}{|\vec{\nu}_{0\perp}|} + \dfrac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial \nu_2}\dfrac{\nu_{02}}{|\vec{\nu}_{0\perp}|}; \\ \dfrac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial N_2} = -\dfrac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial \nu_1}\dfrac{\nu_{02}}{|\vec{\nu}_{0\perp}|} + \dfrac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial \nu_2}\dfrac{\nu_{01}}{|\vec{\nu}_{0\perp}|}; \\ \dfrac{\partial^2 V}{\partial N_1 \partial \nu^3} = \dfrac{\partial^2 V}{\partial \nu_1 \partial \nu_3}\dfrac{\nu_{01}}{|\vec{\nu}_{0\perp}|} + \dfrac{\partial^2 V}{\partial \nu_2 \partial \nu_3}\dfrac{\nu_{02}}{|\vec{\nu}_{0\perp}|}; \\ \dfrac{\partial^2 V}{\partial N_2 \partial \nu^3} = -\dfrac{\partial^2 V}{\partial \nu_1 \partial \nu_3}\dfrac{\nu_{02}}{|\vec{\nu}_{0\perp}|} + \dfrac{\partial^2 V}{\partial \nu_2 \partial \nu_3}\dfrac{\nu_{01}}{|\vec{\nu}_{0\perp}|}; \\ \dfrac{\partial^2 V}{\partial N_1^2} = \dfrac{1}{|\vec{\nu}_{0\perp}|^2}\left(\dfrac{\partial^2 V}{\partial \nu_1^2}\nu_{01}^2 + 2\dfrac{\partial^2 V}{\partial \nu_1 \partial \nu_2}\nu_{01}\nu_{02} + \dfrac{\partial^2 V}{\partial \nu_2^2}\nu_{02}^2\right); \\ \dfrac{\partial^2 V}{\partial N_1 \partial N_2} = \dfrac{1}{|\vec{\nu}_{0\perp}|^2}\left(-\dfrac{\partial^2 V}{\partial \nu_1^2}\nu_{01}\nu_{02} + \dfrac{\partial^2 V}{\partial \nu_2^2}\nu_{01}\nu_{02} + \dfrac{\partial^2 V}{\partial \nu_1 \partial \nu_2}(\nu_{01}^2 - \nu_{02}^2)\right); \\ \dfrac{\partial^2 V}{\partial N_2^2} = \dfrac{1}{|\vec{\nu}_{0\perp}|^2}\left(\dfrac{\partial^2 V}{\partial \nu_1^2}\nu_{02}^2 - 2\dfrac{\partial^2 V}{\partial \nu_1 \partial \nu_2}\nu_{01}\nu_{02} + \dfrac{\partial^2 V}{\partial \nu_2^2}\nu_{01}^2\right). \end{cases}$$

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Zub S.I., Zub S.S., Lyashko V.S., Lyashko N.I., Lyashko S.I. Mathematical model of interaction of a symmetric top with an axially symmetric external field. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2017. **53**, Iss. 3. P. 333—345.

Поступило в редакцию 29.05.2018

REFERENCES

1. Zub, S. I., Zub, S. S., Lyashko, V. S., Lyashko, N. I. & Lyashko, S. I. (2017). Mathematical model of interaction of a symmetric top with an axially symmetric external field. Cybernetics and Systems Analysis, 53, Iss. 3, pp. 333-345.

Received 29.05.2018

С.С. Зуб

Київський національний університет ім. Тараса Шевченка
E-mail*:* stah@univ.kiev.ua

МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ДИНАМІКИ СИМЕТРИЧНОЇ ДЗИҐИ
В ЗОВНІШНІХ АКСІАЛЬНО СИМЕТРИЧНИХ ПОЛЯХ

Описано новий підхід щодо дослідження динамічної стійкості магнітних тіл в аксіально симетричному магнітному полі. Розглянуто гамільтоніан, що описує широкий клас моделей із симетричною дзиґою, яка взаємодіє із зовнішніми аксіально симетричними полями. Знайдено необхідні та достатні умови динамічної рівноваги для нового класу моделей із симетричною дзиґою. Отримано рівняння руху у формі, зручній для чисельного моделювання.

Ключові слова: *динамічні системи, математичні моделі, симетрична дзиґа, стійкість, рівняння руху.*

S.S. Zub

Taras Shevchenko National University of Kiev
E-mail*:* stah@univ.kiev.ua

MATHEMATICAL MODELS OF A SYMMETRIC TOP DYNAMICS
IN THE EXTERNAL FIELDS WITH AXIAL SYMMETRY

The article describes a new approach to the investigation of the dynamic stability of magnetic bodies in an axially symmetric magnetic field. We consider a Hamiltonian for a broad class of models with a symmetric top that interacts with external axially symmetric fields. Necessary and sufficient conditions of the dynamic equilibrium for a new class of models with a symmetric top are found. Motion equations in the form that is convenient for the numerical simulation are obtained.

Keywords: *dynamical systems, mathematical models, symmetric top, stability, motion equations.*