ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ АКАДЕМІЇ НАУК УКРАЇНИ

doi: https://doi.org/10.15407/dopovidi2018.09.003
УДК 531.36

А.А. Мартынюк, академик НАН Украины

Институт механики им. С.П.Тимошенко НАН Украины, Киев
E-mail: center@inmech.kiev.ua

О принципе сравнения и оценках функций Ляпунова для нелинейных систем

Приводятся некоторые новые оценки функции Ляпунова для нелинейной системы и устанавливаются условия устойчивости по Ляпунову и на конечном интервале. Приведенные условия основаны на оценках нормы решений нелинейной системы уравнений возмущенного движения.

Ключевые слова: *нелинейная система общего вида, функция Ляпунова, оценка нормы решений, устойчивость движения.*

Фактическое применение прямого метода Ляпунова предусматривает два этапа: первый — построение подходящей функции Ляпунова и второй — оценка полной производной функции в силу уравнений возмущенного движения. В результате на основе общих теорем Ляпунова и/или их обобщений получается результат качественного анализа свойств движения.

Недавняя статья К. Кордуняну [1], посвященная уточнению вклада Р. Конти [2, 3] в создание принципа сравнения в качественной теории уравнений, явилась стимулом к написанию этой работы. Здесь обсуждаются неравенства для функций Ляпунова, предшествовавшие результатам Р. Конти, и приведены новые оценки функций Ляпунова вдоль решений нелинейной системы общего вида. Эти оценки могут оказаться более конструктивным инструментом анализа динамики нелинейных систем по сравнению с общими утверждениями принципа сравнения.

1. Предварительный анализ. Рассматривается нелинейная система уравнений возмущенного движения

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \tag{1}$$

при начальных условиях

$$x(t_0) = x_0, \tag{2}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$; $f \in \mathbb{C}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $f(t,0)=0$ при всех $t \geqslant t_0$, $\mathbb{R}_+ = [0,\infty)$. Предполагается, что если $(t_0, x_0) \in (\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$, то решение $x(t, t_0, x_0)$ задачи (1), (2) существует при всех $t \geqslant t_0$.

Определение 1. Функция $V \in C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}_+)$, $V(t,0)=0$ при всех $t \geqslant t_0$ называется функцией Ляпунова, если она однозначная, определенно положительная и убывающая при всех $t \geqslant t_0$, в некоторой окрестности начала координат фазового пространства и вместе с полной производной V' в силу системы (1) разрешает вопрос об устойчивости (неустойчивости) состояния $x=0$ системы (1).

Напомним, что V-функции и их полные производные в силу исследуемой системы уравнений возмущенного движения были введены в работе Ляпунова [4], а именно:

при доказательстве теоремы об устойчивости (см. [4] с. 62) функция V знакоопределенная, V' в силу уравнений (1) знакопостоянная противоположного знака с V, т. е. предполагалось, что $V \geqslant W$, где W — некоторая независящая от t положительная функция, и

$$V' \leqslant 0, \tag{3}$$

где $V' = V_t(t,x) + (f, \operatorname{grad} V(t,x))$;

при доказательстве теоремы о неустойчивости (см. [4] с. 68) рассматривается соотношение

$$V' = \lambda V + W, \tag{4}$$

где $\lambda > 0$, а W — или тождественно равна нулю или некоторая знакопостоянная функция;

при рассмотрении критических случаев для автономных и периодических систем дифференциальных уравнений, когда вид функций и их производные V' значительно усложняются.

В работе [5] для функции V рассматриваются оценки полной производной в виде

$$V' \leqslant f(V), \tag{5}$$

где $f(V) > 0$ при $0 < V \leqslant H, f(0) = 0$, а также

$$V' \leqslant \varphi(t) f(V), \tag{6}$$

где $\varphi(t)$ такова, что $\int\limits_{t_0}^{t} \varphi(s) ds \leqslant M, M > 0$ — const, и

$$V' \leqslant g_1(t) V + g_2(t) V^{1+k}, k > 0, \tag{7}$$

где функции $g_1(t), g_2(t)$ непрерывные и положительные при всех $t \geqslant t_0$.

Фактически оценки (1) — (7) явились предпосылкой появления уравнений сравнения вида

$$\frac{du}{dt} = 0, \quad u(t_0) = u_0 \geqslant 0; \tag{8}$$

$$\frac{du}{dt} = \lambda u + w, \quad u(t_0) = u_0 \geqslant 0, \tag{9}$$

где $w \geqslant 0$;

$$\frac{du}{dt} = g(u), \quad u(t_0) = u_0 \geqslant 0\ ; \tag{10}$$

$$\frac{du}{dt} = \phi(t) g(u), \quad u(t_0) = u_0 \geqslant 0\ ; \tag{11}$$

$$\frac{du}{dt} = g_1(t) u + g_2(t) u^{1+k}, \quad u(t_0) = u_0 \geqslant 0\,. \tag{12}$$

Предложение Конти [2, 3] рассматривать оценку для V' в виде

$$V' \leqslant \omega(t, V), \tag{13}$$

где ω – вещественная функция, определенная на $\mathbb{R}_+ \times D$, $D = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < r\}$, было заключительным шагом к получению оценки

$$V(t, x(t)) \leqslant r(t, t_0, r_0)\,, \tag{14}$$

где $r(t, \cdot)$ — максимальное решение уравнения сравнения

$$\frac{dr}{dt} = \omega(t, r(t)), \quad r(t_0) = r_0 \geqslant 0\,, \tag{15}$$

при всех $t \in [t_0, T)$, где $T > t_0$ — правый конец существования решения исходной системы (1) и уравнения сравнения (15).

Определение 2. Кортеж, состоящий из системы (1), функции $V(t, x)$, ее полной производной $V'(t, x)$, мажорирующей функции $\omega(t, V)$ и уравнения сравнения (15) составляет основу принципа сравнения в качественной теории уравнений, если он позволяет получить оценку вида (14) для всех $t \in [t_0, T)$ при условии $V(t_0, x_0) \leqslant r_0$.

В обзорной статье [6] представлены основные результаты, полученные при развитии принципа сравнения на основе скалярной, векторной и матричнозначной функций Ляпунова и указаны некоторые применения этого подхода в задачах механики.

Общность оценки функции $V(t, x(t))$ в виде (14), при отсутствии решения в общем случае уравнения сравнения (15), стимулирует поиск новых оценок функции $V(t, x)$ путем использования интегральных неравенств.

Приведем один из возможных подходов в этом направлении.

2. Оценка функции Ляпунова на основе неравенства (6). Наряду с оценкой (6) будем рассматривать уравнения сравнения

$$\frac{dr}{dt} = \varphi(t) g(r), \quad r(t_0) = r_0 \geqslant 0 \tag{16}$$

и

$$\frac{dq}{dt} = -\varphi(t) g(q), \quad q(t_0) = r_0 \geqslant 0\,. \tag{17}$$

Следуя [7], введем обозначение $J(r) = \int\limits_0^r du/g(u)$. Ф. Брауэр показал [8], что решением уравнения сравнения (16) является функция

$$r(t)=J^{-1}\left(J(r_0)+\int\limits_{t_0}^{t}\varphi(s)\,ds\right). \tag{18}$$

Это решение существует для всех t, для которых $(J(r_0)+\int\limits_{t_0}^{t}\varphi(s)\,ds)<R$, где $R=\int\limits_{0}^{\infty}du/g(u)$. А именно: если $r(t_0)=r_0$, то $t\in[0,T)$, где T определяется из соотношения $\int\limits_{t_0}^{T}\varphi(s)\,ds=\int\limits_{r_0}^{\infty}du/g(u)$. Если $\int\limits_{r_0}^{\infty}du/g(u)=\infty$, то $T=\infty$. Если $\int\limits_{t_0}^{\infty}\varphi(s)\,ds<\int\limits_{r_0}^{\infty}du/g(u)\leqslant\infty$, то $J(r_0)+\int\limits_{t_0}^{t}\varphi(s)\,ds<R$ и, следовательно, $r(t)<\infty$, т. е. решение $r(t)$ ограничено при всех $0\leqslant t<\infty$.

Аналогично для уравнения (17) получено решение уравнения сравнения в виде

$$q(t)=J^{-1}\left(J(r_0)-\int\limits_{t_0}^{t}\varphi(s)\,ds\right), \tag{19}$$

которое определено при всех $t>t_0$, для которых $J(r_0)-\int\limits_{t_0}^{t}\varphi(s)\,ds>0$.

Следовательно, решение $q(t)$ существует для всех $t\in[t_0,\tau)$, где τ определяется из соотношения $\int\limits_{t_0}^{\tau}\varphi(s)\,ds=\int\limits_{0}^{r_0}du/g(u)$. Если $\int\limits_{t_0}^{t}\varphi(s)\,ds\leqslant\int\limits_{0}^{r_0}du/g(u)$, то $q(t)$ существует при всех $t_0\leqslant t<\infty$, и если $\int\limits_{t_0}^{\infty}\varphi(s)\,ds<\int\limits_{0}^{r_0}du/g(u)$, то $q(t)>0$ при всех $t_0\leqslant t<\infty$.

Отсюда получаем такие утверждения.

Теорема 1 (ср. [8, 9]). *Если условие* (6) *выполняется при* $0<V\leqslant H$, $f(0)=0$ и $f(V)>0$, *то для функции* $V(t,x(t))$ *верна оценка*

$$V(t,x(t))\leqslant J^{-1}\left(J(r_0)+\int\limits_{t_0}^{t}\varphi(s)\,ds\right) \tag{20}$$

при $V(t_0,x_0)\leqslant r_0$ *для всех* $t\in[t_0,T)$, *где* T *определяется из соотношения*

$$\int\limits_{t_0}^{T}\varphi(s)\,ds=\int\limits_{0}^{\infty}du/g(u). \tag{21}$$

Теорема 2 (ср. [11, 12]). *Если условие* (6) *выполняется при* $0<V\leqslant H$, $f(0)=0$ *и* $f(V)>0$, *то для функции* $V(t,x(t))$ *верна оценка*

$$V(t,x(t))\geqslant J^{-1}\left(J(r_0)-\int\limits_{t_0}^{t}\varphi(s)\,ds\right)$$

при $V(t_0, x_0) \geqslant r_0$ *и при всех* $t \geqslant t_0$, *для которых* $\int_{t_0}^{t} \varphi(s)\,ds \leqslant \int_0^{\infty} du/g(u)$.

Теорема 3 (ср. [10]). *Если условие* $V' \leqslant \varphi(t) f(V)$ *выполняется, то* $V(t, x(t))$ *с начальным условием* $V(t_0, x_0) \leqslant r_0$ *существует на интервале* $[0, T)$, *где* $\int_0^T \varphi(s)\,ds = \int_{r_0}^{\infty} du/f(u)$. *Если* $\int_0^{\infty} \varphi(s)\,ds \leqslant \int_{r_0}^{\infty} du/f(u)$, *то* $V(t, x(t))$ *определенная при всех* $t: 0 \leqslant t < \infty$, *и если* $\int_0^{\infty} \varphi(s)\,ds < \int_{r_0}^{\infty} du/f(u)$, *то* $V(t, x(t))$ *ограничена на интервале* $[0, \infty)$.

Теорема 4 (ср. [11]). *Если условие* $V' \leqslant \varphi(t) f(V)$ *выполняется и* $\int_{r_0}^{\infty} du/g(u) = \infty$, *то функция* $V(t, x(t))$ *определена при всех* $0 \leqslant t < \infty$. *Если к тому же* $\int_{t_0}^{t} \varphi(s)\,ds < \infty$, *то функция* $V(t, x(t))$ *на решениях системы* (1) *ограничена на интервале* $[t_0, \infty)$.

3. Оценка функции Ляпунова на основе неравенства (7). Пусть для системы (1) построена функция $V(t, x)$, для которой

$$V'(t, x) \leqslant g_1(t) V(t, x) + g_2(t) V^{\alpha}(t, x) \tag{22}$$

при всех $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$ и $\alpha > 1$. Для этой оценки имеет место следующее утверждение.

Теорема 5. *Предположим, что для системы* (1) *построена функция Ляпунова* $V(t, x)$, *полная производная которой в силу системы* (1) *оценивается неравенством* (22) *и, кроме того,*

$$M(t, t_0) = 1(\alpha - 1) V^{\alpha - 1}(t_0, x_0) \int_{t_0}^{t} g_2(s) \exp\left[(\alpha - 1) \int_{t_0}^{t} g(\tau)\, d\tau \right] ds > 0 \tag{23}$$

при всех $t \in [t_0, T)$. *Тогда для функции* $V(t, x(t))$ *верна оценка*

$$V(t, x(t)) \leqslant V(t_0, x_0) \exp\left(\int_{t_0}^{t} g_1(s)\, ds \right) (M(t, t_0))^{-\frac{1}{\alpha - 1}} \tag{24}$$

для всех $t \in [t_0, T)$.

Доказательство этой теоремы приведено в работе [7]. При этом применяется техника оценок, аналогичная развитой при оценке норм решений нелинейных систем (см. [13] и библиографию там).

Теорема 5 имеет ряд следствий.

Следствие 1. *Пусть в неравенстве* (22) $g_2(t) \equiv 0$ *при всех* $t \geqslant t_0$. *Тогда из оценки* (24) *следует, что*

$$V(t, x(t)) \leqslant V(t_0, x_0) \exp\left[\int_{t_0}^{t} g_1(s)\, ds \right]$$

при всех $t \geqslant t_0$.

Следствие 2. *Пусть в неравенстве* (22) $g_1(t) \equiv 0$ *при всех* $t \geqslant t_0$ и

$$M_1(t, t_0) = 1 - (\alpha - 1)\int_{t_0}^{t} g_2(s)\,ds > 0$$

при всех $t \in [t_0, T)$. *Тогда*

$$V(t, x(t)) \leqslant V(t_0, x_0)(M_1(t, t_0))^{\frac{1}{\alpha-1}}$$

при всех $t \in [t_0, T)$.

4. Условия устойчивости по Ляпунову. Оценка функции Ляпунова (24) при некоторых дополнительных условиях позволяет указать достаточные условия различных типов устойчивости системы (1). Обозначим

$$W(t, t_0) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} g_1(s)\,ds\right)(M(t, t_0))^{-\frac{1}{\alpha-1}}$$

при всех $t \geqslant t_0$. Принимая во внимание определения устойчивости по Ляпунову, приведенные в [14], сформулируем достаточные условия устойчивости состояния $x = 0$ системы (1) в виде следующей теоремы.

Теорема 6. *Предположим, что для системы* (1) *выполняются условия теоремы* 5 *и для функции* $V(t, x)$ *имеет место неравенство*

$$c_1\|x\|^2 \leqslant V(t, x) \leqslant c_2\|x\|^2$$

при всех $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$, где $0 < c_1 < c_2$. *Тогда имеют место следующие утверждения*:

(S_1). *Если для любых* $\varepsilon > 0$ и $t_0 \in \mathbb{R}_+$ *существует положительная непрерывная по* t_0 *функция* $\delta = \delta(t_0, \varepsilon)$ *такая, что при* $\|x_0\| < \delta(t_0, \varepsilon)$

$$W(t, t_0) \leqslant \frac{\varepsilon}{\delta(t_0, \varepsilon)}\left(\frac{c_1}{c_2}\right)^{1/2}$$

при всех $t \geqslant t_0$, то $\|x(t)\| < \varepsilon$ *при всех* $t \geqslant t_0$, *т. е. состояние* $x = 0$ *системы* (1) *эквиустойчиво.*

(S_2). *Если в утверждении* (S_1) *функция* $\delta = \delta(\varepsilon)$ *не зависит от* t_0, *то состояние* $x = 0$ *системы* (1) *равномерно устойчиво, т. е.* $\|x(t)\| < \varepsilon$ *при всех* $t \geqslant t_0$, *равномерно по* $t_0 \in \mathbb{R}_+$.

(S_3). *Если для любых* $\varepsilon > 0$ и $t_0 \in \mathbb{R}_+$ *существуют положительные числа* $\delta_0 = \delta(t_0)$ *и* $T = T(t_0, \varepsilon)$ *такие, что при* $\|x_0\| < \delta_0(t_0)$

$$W(t, t_0 + T) \leqslant \frac{\varepsilon}{\delta_0(t_0)}\left(\frac{c_1}{c_2}\right)^{1/2}$$

при всех $t \geqslant t_0 + T$, *то состояние* $x = 0$ *системы* (1) *квазиэквиасимптотически устойчиво, т. е.* $\|x(t)\| < \varepsilon$ *при всех* $t \geqslant t_0 + T$.

(S_4). *Если в утверждении* (S_3) *числа* δ_0 *и* T *не зависят от* $t_0 \in \mathbb{R}_+$, *то состояние* $x=0$ *системы* (1) *квазиравномерно асимптотически устойчиво, т. е.* $\|x(t)\| < \varepsilon$ *при всех* $t \geqslant t_0 + T$, *равномерно по* $t_0 \in \mathbb{R}_+$.

(S_5). *Если условия утверждений* (S_1) и (S_3) *выполняются одновременно, то состояние* $x=0$ *системы* (1) *эквиасимптотически устойчиво.*

(S_6). *Если условия утверждений* (S_2) и (S_4) *выполняются одновременно, то состояние* $x=0$ *системы* (1) *равномерно асимптотически устойчиво, т. е.* $\|x(t)\| < \varepsilon$ *при всех* $t \geqslant t_0$ *и* $\lim \|x(t)\| = 0$, *при* $t \to \infty$.

(S_7). *Если для любых* $\varepsilon > 0, \beta > 0, t_0 \in \mathbb{R}_+$ *существует положительное число* $T^* = T^*(t_0, \varepsilon, \beta)$ *такое, что при* $\|x_0\| < \beta$ *выполняется неравенство*

$$W(t, t_0 + T^*) \leqslant \frac{\varepsilon}{\beta}\left(\frac{c_1}{c_2}\right)^{1/2}$$

при всех $t \geqslant t_0 + T^*$, *то состояние* $x=0$ *системы* (1) *квазиэквиасимптотически устойчиво в целом, т. е.* $\|x(t)\| < \varepsilon$ *при всех* $t \geqslant t_0 + T^*$.

(S_8). *Если условия утверждения* (S_7) *выполняются с числом* T^*, *не зависящим от* t_0, *то состояние* $x=0$ *системы* (1) *квазиравномерно асимптотически устойчиво* (*в целом*).

(S_9). *Если условия утверждений* (S_1) и (S_7) *выполняются при любом* β, $0 \leqslant \beta < +\infty$, *то состояние* $x=0$ *системы* (1) *полностью устойчиво.*

(S_{10}). *Если выполняются условия утверждений* (S_2) *и при малых* β, $0 \leqslant \beta < +\infty$, *выполняются условия утверждения* (S_8), *то состояние* $x=0$ *системы* (1) *полностью равномерно по* t_0 *устойчиво.*

Доказательства утверждений $(S_1) - (S_{10})$ следуют непосредственно из оценки (5) и соответствующих определений устойчивости.

5. Условия устойчивости на конечном интервале. Напомним определение устойчивости на конечном интервале системы (1), принимая во внимание результаты монографии [15].

Определение 3. Состояние $x=0$ системы (1) называется устойчивым на конечном интервале при заданном значении t_0 по отношению к положительно определенной функции $V(t,x)$, если из условия $V(t_0, x_0) \leqslant c_0$ следует выполнение неравенства $V(t, x(t)) < c(t)$ для значений $t \in [t_0, t_0 + T]$ при любых $0 < c_0 < c(t)$, где $c(t)$ — непрерывная ограниченная функция при всех $t \in [t_0, t_0 + T]$.

Замечание 1. В отличие от определения В.И. Зубова [15] в определении 3 область $V(t,x) < c(t)$ является изменяющейся во времени, что адекватно динамическому анализу неавтономной системы (1).

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 7. *Пусть для системы* (1) *построена функция* $V(t,x)$, *полная производная которой удовлетворяет неравенству* (22) *при* $0 \leqslant V(t,x) \leqslant H$, $H = \mathrm{const} > 0$ *и выполняются все условия теоремы* 5. *Тогда любое решение системы* (1) *с начальными условиями из области* $V(t_0, x_0) \leqslant c_0$ *не выйдет из области* $V(t,x) < c(t)$ *на конечном интервале, если*

$$W(t, t_0) < \frac{c(t)}{c_0}$$

при любом $t \in [t_0, t_0 + T]$.

Доказательство теоремы 7 следует непосредственно из оценки (24).

6. Заключительные замечания. К настоящему времени принцип сравнения разработан для многих классов уравнений в конечномерных и бесконечномерных пространствах. Полученные результаты подытожены во многих работах (см., например, [6] и библиографию там). В то же время отсутствие общего метода анализа динамических свойств решений уравнений и/или систем сравнения стимулирует получение новых оценок изменения функций Ляпунова для определенных классов систем уравнений. Приведенная оценка и ее следствия являются примером такого поиска и имеют некоторый потенциал для приложений.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Corduneanu C. The contribution of R. Conti to the comparison method in differential equations. *Libertas Math*. 2009. **29**. P. 113—115.
2. Conti R. Limitazione in ampiezza delle soluzioni di un sistema di equazioni diferenziali ordinarie e applicazini. *Boll. Unione Mat. Ital. Ser. 3*. 1956. **11**, № 3. P. 344—349.
3. Conti R. Sulla prolungabilita delle soluzioni di un sistema di equazioni diferenziali ordinarie. *Boll. Unione Mat. Ital. Ser. 3*. 1956. **11**, № 4. P. 510—514.
4. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. Ленинград, Москва: ОНТИ, 1935. 386 с.
5. Мельников Г.И. Некоторые вопросы прямого метода Ляпунова. *Докл. АН СССР*. 1956. **110**, № 3. С. 326—329.
6. Martynyuk A.A. Asymptotic stability criterion for nonlinear monotonic systems and its applications (review). *Int. Appl. Mech*. 2011. **47**, Iss. 5. P. 475—534; Мартынюк А.А. Критерий асимптотической устойчивости нелинейных монотонных систем и его применение. *Современные проблемы механики*. Т. 1. Киев: ЛІТЕРА ЛТД, 2015. С. 276—339.
7. Мартынюк А.А. Конструктивные оценки V-функции Ляпунова для уравнений возмущенного движения. *Прикл. механика*. 2017. **53 (63)**, вып. 5. С. 122—128.
8. Bihari I. A generalization of a lemma of Bellman and its application to uniqueness problems of differential equations. *Acta Math. Hung*. 1956. **7**. P. 81—94.
9. Brauer F. Bounds for solution of ordinary differential equations. *Proc. Amer. Math. Soc*. 1963. **14**, № 1. P. 36—43.
10. Cooke K.L. A non-local existence theorem for systems of ordinary differential equations. *Rend. Circ. Mat. Palermo*. 1955. **4**. P. 301—308.
11. Wintner A. An Abelian lemma of asymptotic equilibria. *Amer. J. Math*. 1946. **78**. P. 451—454.
12. Langenhop C.E. Bounds on the norm of a solution of a general differential equation. *Proc. Amer. Math. Soc*. 1960. **11**. P. 795—799.
13. Martynyuk A.A. Novel bounds for solutions of nonlinear differential equations. *Appl. Math*. 2015. **6**. P. 182—194.
14. Lakshmikantham V., Leela S., Martynyuk A.A. Practical stability of nonlinear systems. Singapore: World Scientific, 1990. 207 p.
15. Зубов В.И. Математические методы исследования систем автоматического регулирования. Ленинград: Судпромгиз, 1959. 327 с.

Поступило в редакцию 14.09.2017

REFERENCES

1. Corduneanu, C. (2009). The contribution of R. Conti to the comparison method in differential equations. Libertas Math., 29, pp. 113-115.
2. Conti, R. (1956). Limitazione “in ampiezza”delle soluzioni di un sistema di equazioni diferenziali ordinarie e applicazini. Boll. Unione Mat. Ital. Ser. 3, 11, No. 3, pp. 344-349.
3. Conti, R. (1956). Sulla prolungabilita delle soluzioni di un sistema di equazioni diferenziali ordinarie. Boll. Unione Mat. Ital. Ser. 3, 11, No. 4, pp. 510-514.

4. Lyapunov, A. M. (1935). The general problem of the stability of motion. Leningrad, Moscow: ONTI (in Russian).
5. Melnikov, G. I. (1956). Some questions of the direct Lyapunov method. Dokl. AN. SSSR, 110, No. 3, pp. 326-329 (in Russian).
6. Martynyuk, A. A. (2011). Asymptotic stability criterion for nonlinear monotonic systems and its applications (review). Int. Appl. Mech., 47, Iss. 5, pp. 475-534; Martynyuk, A.A. (2015). A criterion for the asymptotic stability of non-linear monotonic si- and its application. In Modern problems of mechanics, Vol. 1 (pp. 276-339). Kiev: LITERA LTD (in Russian).
7. Martynyuk, A. A. (2017). Constructive estimates of Lyapunov V-functions for the equations of perturbed motion. Prikl. Mekhanika, 53 (63), Iss. 5, pp. 122-128 (in Russian).
8. Bihari, I. (1956). A generalization of a lemma of Bellman and its application to uniqueness problems of differential equations. Acta Math. Hung., 7, pp. 81-94.
9. Brauer, F. (1963). Bounds for solution of ordinary differential equations. Proc. Amer. Math. Soc. 14, No. 1, pp. 36-43.
10. Cooke, K. L. (1955). A non-local existence theorem for systems of ordinary differential equations. Rend. Circ. Mat. Palermo, 4, pp. 301-308.
11. Wintner, A. (1946). An Abelian lemma of asymptotic equilibria. Amer. J. Math., 78, pp. 451-454.
12. Langenhop, C. E. (1960). Bounds on the norm of a solution of a general differential equation. Proc. Amer. Math. Soc., 11, pp. 795-799.
13. Martynyuk, A. A. (2015). Novel bounds for solutions of nonlinear differential equations. Appl. Math., 6, pp. 182-194.
14. Lakshmikantham, V., Leela, S. & Martynyuk, A. A. (1990). Practical stability of nonlinear systems. Singapore: World Scientific.
15. Zubov, V. I. (1959). Mathematical methods for the automatic regulation systems analysis. Leningrad: Sudpromgiz (in Russian).

Received 14.09.2017

А.А. Мартинюк

Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, Київ
E-mail: center@inmech.kiev.ua

ПРО ПРИНЦИП ПОРІВНЯННЯ І ОЦІНКИ
ФУНКЦІЙ ЛЯПУНОВА ДЛЯ НЕЛІНІЙНИХ СИСТЕМ

Наводяться деякі нові оцінки функції Ляпунова для нелінійної системи і встановлюються умови стійкості за Ляпуновим і на кінцевому інтервалі. Наведені умови базуються на оцінках норми розв'язків нелінійної системи рівнянь збуреного руху.

Ключові слова: *нелінійна система загального вигляду, функція Ляпунова, оцінка норми розв'зків, стійкість руху.*

A.A. Martynyuk

S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of the NAS of Ukraine, Kiev
E-mail: center@inmech.kiev.ua

ON THE PRINCIPLE OF COMPARISON AND ESTIMATES
OF THE LYAPUNOV FUNCTIONS FOR NONLINEAR SYSTEMS

Some new estimates of the Lyapunov function for a nonlinear system and conditions of Lyapunov stability and stability on a finite interval are established. The above conditions are based on estimates of the norms of solutions of a nonlinear system of equations of perturbed motion.

Keywords: *nonlinear system of a general form, Lyapunov function, estimate of the norm of solutions, stability of motion.*