ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

doi: https://doi.org/10.15407/dopovidi2018.08.003
УДК 517.956

В.В. Городецький, Г.П. Вережак

Чернівецький національний університет ім. Юрія Федьковича
E-mail: v.gorodetskiy@chnu.edu.ua, g.verezhak@gmail.com

Нелокальна за часом задача для еволюційних сингулярних рівнянь нескінченного порядку

Представлено академіком НАН України М.О. Перестюком

Встановлюється коректна розв'язність нелокальної багатоточкової за часом задачі для еволюційних рівнянь з оператором Бесселя нескінченного порядку в узагальнених просторах типу S та просторах типу S′ — просторах узагальнених функцій нескінченного порядку типу ультрарозподілів.

Ключові слова: *нелокальна багатоточкова за часом задача, оператор Бесселя нескінченного порядку, узагальнені простори типу S, узагальнені функції.*

І.М. Гельфанд і Г.Є. Шилов [1, с. 203—211] запропонували метод побудови функціональних просторів нескінченно диференційовних функцій на $\mathbb{R}$, на які накладаються певні умови спадання на нескінченності. Ці умови задаються за допомогою нерівностей $|x^k\varphi^{(n)}(x)|\leqslant c_{kn}$, $\{k,n\}\subset\mathbb{Z}_+$, де $\{c_{kn}\}$ — подвійна послідовність додатних чисел. Якщо ці числа змінюються довільним чином разом з функцією φ, то маємо простір Л. Шварца $S=S(\mathbb{R})$ швидко спадних на $\mathbb{R}$ функцій. У монографії [1, с. 203–280] детально вивчений випадок, коли $c_{kn}=k^{k\alpha}n^{n\beta}$, $\alpha>0,\ \beta>0$ — фіксовані параметри; відповідні простори називаються просторами типу S і позначаються символом S_α^β. Функції з таких просторів на дійсній осі разом з усіма своїми похідними при $|x|\to+\infty$ спадають швидше, ніж $\exp\{-a|x|\}$, $a>0$, $x\in\mathbb{R}$. Такі простори часто використовуються при дослідженні проблеми про класи єдиності та класи коректності задачі Коші для рівнянь з частинними похідними. У працях [2, 3] встановлено, що простори типу S та S' — простори, топологічно спряжені з ними, збігаються з множинами початкових даних задачі Коші для широких класів рівнянь з частинними похідними скінченного та нескінченного порядків, при яких розв'язки є цілими функціями просторових змінних. Наприклад, для рівняння теплопровідності $\partial u/\partial t=\partial^2 u/\partial x^2$ фундаментальний розв'язок задачі Коші — функція $G(t,x)=(2\sqrt{\pi t})^{-1}\exp\{-x^2/(4t)\}$ при кожному $t>0$, як функція x, є елементом простору $S_{1/2}^{1/2}$ [4, с. 46], який належить до просторів типу S.

Якщо $c_{kn}=a_kb_n$, де $\{a_k,k\in\mathbb{Z}_+\},\{b_n,n\in\mathbb{Z}_+\}$ — деякі послідовності додатних чисел, то маємо узагальнені простори типу S, які позначаються символом $S_{a_k}^{b_n}$. Простори $S_{a_k}^{b_n}$ (їх топологічна структура, властивості функцій, основні операції в таких просторах) вивчалися в праці [5]. Відомі простори типу W, введені Б.Л. Гуревичем [6] (див. також [7, с. 7—33]), в яких для характеристики поведінки функцій на нескінченності замість степеневих функцій використовуються довільні опуклі функції, також вкладаються в простори $S_{a_k}^{b_n}$ при конкретному виборі послідовностей $\{a_k\}$ та $\{b_n\}$ (див. [8]). Із результатів, наведених в [9, 10], випливає, що узагальнені простори типу S є природним середовищем для дослідження нелокальних багатоточкових за часом задач для еволюційних псевдодиференціальних рівнянь (зокрема, для рівнянь з операторами диференціювання нескінченного порядку), для еволюційних рівнянь з операторами узагальненого диференціювання Гельфонда—Леонтьєва скінченного та нескінченного порядків.

У цій роботі встановлюється коректна розв'язність нелокальої багатоточкової за часом задачі для еволюційного рівняння параболічного типу з оператором Бесселя нескінченного порядку в узагальнених просторах типу S та S', досліджені властивості фундаментального розв'язку такої задачі (оцінки похідних фундаментального розв'язку за просторовою змінною, диференційовність фундаментального розв'язку як абстрактної функції часового параметра із значеннями в узагальнених просторах типу S та ін.)

1. Простори основних та узагальнених функцій. Тут зупинимося на просторах $S_{a_k}^{b_n}$, які будуються за послідовностями вигляду $\{b_n = n!\rho_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$, $\{a_k = k! d_k, k \in \mathbb{Z}_+\}$, де $\{\rho_n\}$, $\rho_0 = 1$, — послідовність додатних чисел, яка має такі властивості:

а) вона монотонно спадна;

б) $\exists c_b > 0 \quad \exists \gamma_1 \in (0,1) \quad \forall n \in \mathbb{N}: \ \rho_{n-1}/\rho_n \leqslant c_b \cdot n^{\gamma_1}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\rho_n} = 0$;

г) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists c_\varepsilon > 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+: \quad \rho_n \geqslant c_\varepsilon \cdot \varepsilon^n / n^n$.

Послідовності $\{d_k, k \in \mathbb{Z}_+\}$, $d_0 = 1$, також притаманні властивості *а—г*, при цьому умова *б* має вигляд: $\exists c_a > 0 \quad \exists \gamma_2 \in (0,1) \quad \forall n \in \mathbb{N}: \ d_{k-1} / d_k \leqslant c_a \cdot k^{\gamma_2}$. Прикладом послідовності $\{\rho_n\}$ з властивостями *а—г* може служити послідовність $\rho_n = (n\beta)^{-n\beta} e^{n\beta}$, де $\beta \in (0,1)$ — фіксований параметр [11].

Вважаємо також, що параметри γ_1, γ_2 в умові *б* для послідовностей $\{\rho_n\}$ та $\{d_k\}$ пов'язані умовою *д*: $\gamma_1 + \gamma_2 = \theta \leqslant 1$.

Символом $S_{a_k}^{b_n}$ позначимо сукупність функцій $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$, які задовольняють умову

$$\exists c, A, B > 0 \quad \forall \{k, n\} \subset \mathbb{Z}_+ \quad \forall x \in \mathbb{R}: |x^k \varphi^{(n)}(x)| \leqslant c A^k B^n a_k b_n.$$

$S_{a_k}^{b_n}$ збігається з об'єднанням зліченно-нормованих просторів $S_{a_k, A}^{b_n, B}$ за всіма індексами $\{A, B\} \subset \mathbb{N}$, де $S_{a_k, A}^{b_n, B}$ — сукупність тих функцій $\varphi \in S_{a_k}^{b_n}$, які для довільних $\delta, \rho > 0$ задовольняють нерівності

$$|x^k \varphi^{(n)}(x)| \leqslant c_{\delta\rho} (A+\delta)^k (B+\rho)^n a_k b_n, \quad \{k, n\} \subset \mathbb{Z}_+, \quad x \in \mathbb{R};$$

система норм у $S_{a_k, A}^{b_n, B}$ визначається за допомогою формул

$$\|\varphi\|_{\delta\rho} = \sup_{x, k, n} \frac{|x^k \varphi^{(n)}(x)|}{(A+\delta)^k (B+\rho)^n a_k b_n}, \quad \{\delta, \rho\} \subset \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right\}.$$

В [5] встановлено, що функція $\varphi \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ є елементом простору $S_{a_k}^{b_n}$, де $a_k = k!d_k$, $b_n = n!\rho_n$, тоді й лише тоді, коли вона аналітично продовжується в комплексну площину до цілої функції $\varphi(z)$, $z \in \mathbb{C}$, яка задовольняє умову

$$\exists a, b, c > 0 \quad \forall z = x + iy \in \mathbb{C} : |\varphi(z)| \leqslant c\gamma(ax)\rho(by),$$

де

$$\gamma(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1, \\ \inf\limits_k (a_k / |x|^k), & |x| \geqslant 1, \end{cases} \quad \rho(y) = \begin{cases} 1, & |y| < 1, \\ \sup\limits_n (|y|^n / b_n), & |y| \geqslant 1. \end{cases}$$

Зауважимо [5], що ρ — неперервно диференційовна, парна на $\mathbb{R}$ функція, яка монотонно зростає на проміжку $[1, +\infty)$, $\rho(y) \geqslant 1$, $y \in \mathbb{R}$.

Функція γ є неперервно диференційовною, парною на $\mathbb{R}$ функцією, яка монотонно спадає на $[1, +\infty)$, $0 < \gamma(x) \leqslant 1$, $x \in \mathbb{R}$.

У введених просторах $S_{a_k}^{b_n}$, $a_k = k!d_k$, $b_n = n!\rho_n$, визначені й неперервні оператори, важливі для аналізу; насамперед це оператори множення на x, на всі поліноми, оператори диференціювання, зсуву та розтягу [5].

Символом $\overset{\circ}{S}{}_{a_k}^{b_n}$ позначимо сукупність усіх парних функцій з простору $S_{a_k}^{b_n}$. Цей простір з відповідною топологією називатимемо основним простором або узагальненим простором типу $\overset{\circ}{S}$, а його елементи — основними функціями.

Мультиплікатором у просторі $\overset{\circ}{S}{}_{a_k}^{b_n}$ є кожна парна функція $g \in C^{\infty}(\mathbb{R})$, яка допускає аналітичне продовження у всю комплексну площину і задовольняє умову

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists c_\varepsilon > 0 : |g(z)| \leqslant c_\varepsilon (\gamma(\varepsilon x))^{-1} \rho(\varepsilon y), \quad z = x + iy \in \mathbb{C}.$$

Прикладом мультиплікатора в просторі $\overset{\circ}{S}{}_{a_k}^{b_n}$ може служити нормована функція Бесселя j_ν, $\nu > -1/2$, яка є розв'язком рівняння $B_\nu u + \lambda u = 0$, де B_ν — оператор Бесселя; $B_\nu = d^2/dx^2 + (2\nu + 1)x^{-1} d/dx$, $\nu > -1/2$ — фіксований параметр за умови, що $u(0) = 1$, $u'(0) = 0$ [11].

Із результатів, наведених у [12], випливає, що в просторах $\overset{\circ}{S}{}_{a_k}^{b_n}$ визначене перетворення Бесселя

$$F_{B_\nu}[\varphi](\sigma) = \int_0^{+\infty} \varphi(x) j_\nu(\sigma x) x^{2\nu+1} dx, \ \ \sigma \in \mathbb{R}, \ \ \varphi \in \overset{\circ}{S}{}_{a_k}^{b_n},$$

при виконанні умов *а*—*д* для послідовностей $\{\rho_n\}$ та $\{d_k\}$, має місце формула $F_{B_\nu}\left[\overset{\circ}{S}{}_{a_k}^{b_n}\right] = \overset{\circ}{S}{}_{b_k}^{a_n}$, при цьому оператор F_{B_ν} є неперервним. Частковим випадком просторів $\overset{\circ}{S}{}_{a_k}^{b_n}$ є простори $\overset{\circ}{S}{}_\alpha^\beta$, які складаються з парних функцій з просторів S_α^β, відповідно, правильною є формула $F_{B_\nu}\left[\overset{\circ}{S}{}_\alpha^\beta\right] = \overset{\circ}{S}{}_\beta^\alpha$.

Символом T_x^{ξ} позначимо оператор узагальненого зсуву, який відповідає оператору Бесселя [13]:

$$T_x^{\xi}\varphi(x) = b_\nu \int_0^{\pi} \varphi(\sqrt{x^2+\xi^2-2x\xi\cos\omega})\sin^{2\nu}\omega d\omega, \ \ \varphi \in \overset{\circ}{S}{}_{a_k}^{b_n},$$

$$b_\nu = \Gamma(\nu+1)/(\Gamma(1/2)\Gamma(\nu+1/2)), \ \ \nu > -1/2.$$

Відомо (див. [11]), що операція узагальненого зсуву визначена і диференційовна в просторі $\overset{\circ}{S}{}_{a_k}^{b_n}$.

Розглянемо псевдодиференціальний оператор $A_\varphi = F_{B_\nu}^{-1}[\varphi F_{B_\nu}]$, де функція-символ φ є мультиплікатором у просторі $\overset{\circ}{S}{}_{b_k}^{a_n}$. За цієї умови оператор A_φ є лінійним і неперервним у просторі $\overset{\circ}{S}{}_{a_k}^{b_n}$. У праці [11] з'ясовано, що оператор A_φ можна розуміти як оператор Бесселя "нескінченного порядку" у просторі $\overset{\circ}{S}{}_{a_k}^{b_n}$ вигляду

$$(A_\varphi\psi)(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k}(-1)^k B_\nu^k \psi(x), \varphi(\sigma) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k}\sigma^{2k}, \ \ \forall\psi \in \overset{\circ}{S}{}_{a_k}^{b_n}.$$

Символом $\left(\overset{\circ}{S}{}_{a_k}^{b_n}\right)'$ позначатимемо простір усіх лінійних неперервних функціоналів над відповідним простором основних функцій зі слабкою збіжністю. Елементи простору $\left(\overset{\circ}{S}{}_{a_k}^{b_n}\right)'$ називатимемо узагальненими функціями.

Перетворення Бесселя узагальненої функції $f \in \left(\overset{\circ}{S}{}_{a_k}^{b_n}\right)'$ визначимо за допомогою співвідношення

$$\langle F_{B_\nu}[f], \psi\rangle = \langle f, F_{B_\nu}[\psi]\rangle, \ \ \forall\psi \in \overset{\circ}{S}{}_{b_k}^{a_n}. \tag{1}$$

Із (1), властивостей лінійності і неперервності функціонала f та властивостей перетворення Бесселя основних функцій випливає лінійність і неперервність функціонала $F_{B_\nu}[f]$ над простором основних функцій $\overset{\circ}{S}{}_{b_k}^{a_n}$, тобто $F_{B_\nu}[f] \in \left(\overset{\circ}{S}{}_{b_k}^{a_n}\right)'$. Оскільки в просторі $\overset{\circ}{S}{}_{a_k}^{b_n}$ визначена операція узагальненого зсуву, то згортку узагальненої функції $f \in \left(\overset{\circ}{S}{}_{a_k}^{b_n}\right)'$ з основною функцією $\psi \in \overset{\circ}{S}{}_{a_k}^{b_n}$ задамо формулою

$$(f*\psi)(x) = \langle f_\xi, T_x^{\xi}\psi(x)\rangle = \langle f_\xi, T_\xi^{x}\psi(\xi)\rangle.$$

 ISSN 1025-6415. Dopov. Nac. akad. nauk Ukr. 2018. № 8

Нехай $f \in \left(\overset{\circ}{S}{}_{a_k}^{b_n}\right)'$. Якщо $f * \psi \in \overset{\circ}{S}{}_{a_k}^{b_n}$, $\forall \psi \in \overset{\circ}{S}{}_{a_k}^{b_n}$ і із співвідношення $\psi_\nu \to 0$ при $\nu \to \infty$ за топологією простору $\overset{\circ}{S}{}_{a_k}^{b_n}$ випливає, що $f * \psi_\nu \to 0$ при $\nu \to \infty$ за топологією простору $\overset{\circ}{S}{}_{a_k}^{b_n}$, то функціонал f називається згортувачем у просторі $\overset{\circ}{S}{}_{a_k}^{b_n}$. В [11] встановлено, що якщо узагальнена функція $f \in \left(\overset{\circ}{S}{}_{a_k}^{b_n}\right)'$ — згортувач у просторі $\overset{\circ}{S}{}_{a_k}^{b_n}$, то для довільної функції $\psi \in \overset{\circ}{S}{}_{a_k}^{b_n}$ правильною є формула

$$F_{B_\nu}[f * \psi] = F_{B_\nu}[f] \cdot F_{B_\nu}[\psi].$$

2. Нелокальна багатоточкова за часом задача. Розглянемо еволюційне рівняння

$$\frac{\partial u}{dt} = A_\varphi u, \quad (t, x) \in (0, T] \times \mathbb{R} \equiv \Pi_T, \tag{2}$$

де A_φ — псевдодиференціальний оператор (оператор Бесселя нескінченного порядку), який діє в просторі $\overset{\circ}{S}{}_{b_k}^{b_n}$ (див. п. 1). При цьому вважаємо, що функція φ — символ оператора A_φ, належить до класу $\overset{\circ}{P}{}_{b_k}^{b_n}$, який складається з функцій, які задовольняють умови: 1) φ — мультиплікатор у просторі $\overset{\circ}{S}{}_{b_k}^{b_n}$, 2) $e^\varphi \in \overset{\circ}{S}{}_{b_k}^{b_n}$ (ці умови є певними аналогами умови "параболічності" для еволюційних рівнянь з частинними похідними). Для (2) задамо нелокальну багатоточкову за часом умову

$$\mu u(t,\cdot)|_{t=0} - \mu_1 u(t,\cdot)|_{t=t_1} - \ldots - \mu_m u(t,\cdot)|_{t=t_m} = \psi, \tag{3}$$

де $m \in \mathbb{N}$, $\{\mu, \mu_1, \ldots, \mu_m\} \subset (0, +\infty)$, $\{t_1, \ldots, t_m\} \subset (0, T]$, $0 < t_1 < \ldots < t_m \leqslant T$ — фіксовані числа, причому $\mu > \sum_{k=1}^{m} \mu_k$, $\psi \in \overset{\circ}{S}{}_{b_k}^{b_n}$. Класичний розв'язок $u \in C^1\left((0, +\infty), \overset{\circ}{S}{}_{b_k}^{b_n}\right)$ задачі (2), (3), який шукаємо за допомогою перетворення Бесселя, має вигляд

$$u(t, x) = \int_0^\infty T_x^\xi G(t, x) \psi(\xi) \xi^{2\nu+1} d\xi = G(t, x) * \psi(x), \quad (t, x) \in \Pi_T,$$

$$G = F_{B_\nu}^{-1}[Q], \quad Q(t, \sigma) = \exp\{t\varphi(\sigma)\} \left(\mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \exp\{t_k \varphi(\sigma)\}\right)^{-1}.$$

Основні властивості функції G сформулюємо в нижченаведеному твердженні.

Лема 1. *а)* $G(t, \cdot) \in \overset{\circ}{S}{}_{b_k}^{b_n}$ *при кожному* $t \in (0, T]$. *Функція* $B_\nu^k G(t, x)$ *задовольняє нерівність*

$$\left| B_\nu^k G(t, x) \right| \leqslant L_0 t^{-2(\nu+1)} A_0^{2k} b_{2k} \exp\{-\ln \tilde{\gamma}(d_0 x)\}, \ k \in \mathbb{Z}_+, \ (t, x) \in \Pi_T,$$

де $\tilde{\gamma} = 1/\gamma$, сталі $L_0, A_0, d_0 > 0$ не залежать від t;

б) $G(t,\cdot), t\in(0,T]$, *як абстрактна функція параметра* t *із значеннями в просторі* $\overset{\circ}{S}{}_{b_k}^{b_n}$, *диференційовна за* t *;*

в) правильною є формула

$$\frac{\partial}{\partial t}\big(f*G(t,\cdot)\big)=f*\frac{\partial G(t,\cdot)}{\partial t},\quad \forall f\in\left(\overset{\circ}{S}{}_{b_k}^{b_n}\right),\quad t\in(0,T].$$

Доведення тверджень леми 1 використовує властивості функції

$$Q(t,\sigma)=Q_1(t,\sigma)Q_2(\sigma),$$

$$Q_1(t,\sigma)=\exp\{t\varphi(\sigma)\},\quad Q_2(\sigma)=\left(\mu-\sum_{k=1}^{m}\mu_k\exp\{t_k\varphi(\sigma)\}\right)^{-1}.$$

Зокрема, $Q_1(t,\cdot)\in \overset{\circ}{S}{}_{b_k}^{b_n}$ при кожному $t\in(0,T]$, функція $Q_2(\sigma)$ є мультиплікатором у просторі $\overset{\circ}{S}{}_{b_k}^{b_n}$, при цьому правильним є таке зображення функції Q_2:

$$Q_2(\sigma)=\sum_{r=0}^{\infty}\mu^{-(r+1)}\sum_{r_1+\ldots+r_m=r}^{\infty}\frac{r!}{r_1!\ldots r_m!}\mu_1^{r_1}\ldots\mu_m^{r_m}Q_1(\lambda,\sigma),$$

де $\lambda:=t_1r_1+\ldots+t_mr_m$, $Q_1(\lambda,\sigma)=\exp\{\lambda\varphi(\sigma)\}$.

Символом $\left(\overset{\circ}{S}{}_{b_k}^{b_n},*\right)'$ позначимо клас узагальнених функцій з $\left(\overset{\circ}{S}{}_{b_k}^{b_n}\right)'$, які є згортувачами в просторі $\overset{\circ}{S}{}_{b_k}^{b_n}$.

Лема 2. *Нехай*

$$\omega(t,x)=f*G(t,x),\quad f\in\left(\overset{\circ}{S}{}_{b_k}^{b_n},*\right)',\quad (t,x)\in\Pi_T.$$

Тоді в просторі $\left(\overset{\circ}{S}{}_{b_k}^{b_n}\right)'$ *справджується граничне співвідношення*

$$\mu\lim_{t\to+0}\omega(t,\cdot)-\sum_{k=1}^{m}\mu_k\lim_{t\to t_k}\omega(t,\cdot)=f.$$

З леми 2 випливає, що для рівняння (2) m-точкову за часом задачу можна ставити так: знайти розв'язок $u\in C^1\left((0,T],\overset{\circ}{S}{}_{b_k}^{b_n}\right)$ рівняння (2), який задовольняє умову

$$\mu\lim_{t\to+0}u(t,\cdot)-\sum_{k=1}^{m}\mu_k\lim_{t\to t_k}u(t,\cdot)=f,\quad f\in\left(\overset{\circ}{S}{}_{b_k}^{b_n},*\right)',\tag{4}$$

де граничне співвідношення розглядається в просторі $\left(\overset{\circ}{S}{}^{b_n}_{b_k}\right)'$ (обмеження на параметри $\mu, \mu_1, \ldots, \mu_m, t_1, \ldots, t_m$) такі ж, як у випадку задачі (2), (3). Правильним є таке основне твердження.

Теорема. *Задача (2), (4) коректно розв'язна. Розв'язок дається формулою* $u(t,x) = f * G(t,x)$, $(t,x) \in \Pi_T$, $u(t,\cdot) \in \overset{\circ}{S}{}^{b_n}_{b_k}$ *при кожному* $t \in (0,T]$.

Як приклад розглянемо рівняння (2) з оператором A_φ, побудованим за функцією-символом $\varphi(\sigma) = -\sigma^2$, $\sigma \in \mathbb{R}$. У цьому випадку, як відомо, $A_\varphi = F_{B_\nu}^{-1}[-\sigma^2 F_{B_\nu}] = B_\nu$, а рівняння (2) — рівняння з оператором Бесселя

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{2\nu+1}{x}\frac{\partial u}{\partial x}, \ \ \nu > -\frac{1}{2}, \ \ (t,x) \in \Pi_T.$$

Функція $\varphi(\sigma) = -\sigma^2$, $\sigma \in \mathbb{R}$, є елементом класу $\overset{\circ}{P}{}^{1/2}_{1/2}$. Справді, $e^{-\sigma^2} \in \overset{\circ}{S}{}^{1/2}_{1/2}$, оскільки

$$|e^{-z^2}| = |e^{-(\sigma+iy)^2}| = e^{-\sigma^2+y^2}, \ \ z = \sigma + iy \in \mathbb{C}.$$

Звідси та з характеристики просторів S_α^β (див. [1, с. 210]) випливає, що $e^{-\sigma^2} \in S_\alpha^\beta$, $\alpha = \dfrac{1}{2}$, $\dfrac{1}{1-\beta} = 2$, тобто $\beta = \dfrac{1}{2}$. Крім того, функція $-\sigma^2$, $\sigma \in \mathbb{R}$ — мультиплікатор у просторі $\overset{\circ}{S}{}^{1/2}_{1/2}$. Внаслідок наведеної теореми нелокальна m-точкова за часом задача для рівняння (2) коректно розв'язна, якщо $f \in \left(\overset{\circ}{S}{}^{1/2}_{1/2,*}\right)'$, при цьому

$$u(t,x) = f * G(t,x),$$

де

$$G(t,x) = c_\nu \int_0^\infty Q_1(t,\sigma) Q_2(\sigma) j_\nu(\sigma x) \sigma^{2\nu+1} d\sigma =$$

$$= c_\nu \sum_{r=0}^\infty \mu^{-(r+1)} \sum_{r_1+\ldots+r_m=r} \frac{r!\mu_1^{r_1}\ldots\mu_m^{r_m}}{r_1!\ldots r_m!} \int_0^\infty e^{-(t+t_1r_1+\ldots+t_mr_m)\sigma^2} j_\nu(\sigma x)\sigma^{2\nu+1} d\sigma =$$

$$= 2^{-\nu}\Gamma^{-1}(\nu+1) \sum_{r=0}^\infty \mu^{-(r+1)} \sum_{r_1+\ldots+r_m=r} \frac{r!\mu_1^{r_1}\ldots\mu_m^{r_m}}{r_1!\ldots r_m!} (2\tilde{\lambda}(t,r))^{-(\nu+1)} \exp\{-x^2/(4\tilde{\lambda}(t,r))\},$$

$\tilde{\lambda} = t + t_1 r_1 + \ldots + t_m r_m$. Тут ми скористалися відомим інтегралом Вебера для бесселевих функцій. Зокрема, якщо $f = \delta \in \left(\overset{\circ}{S}{}^{1/2}_{1/2,*}\right)'$, $m = 1$, $t_1 = T$ (випадок двоточкової задачі), то $\delta(x) * G(t,x) = G(t,x)$,

$$u(t,x) = G(t,x) = 2^{-(2\nu+1)}\mu^{-1}\Gamma^{-1}(\nu+1) \sum_{r=0}^\infty \left(\frac{\mu_1}{\mu}\right)^r \frac{1}{(t+rT)^{\nu+1}} \exp\left\{\frac{-x^2}{4(t+rT)}\right\}$$

(δ — дельта-функція Дірака).

ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. Пространства основных и обобщенных функций. Москва: Физматгиз, 1958. 307 с.
2. Горбачук В.И., Горбачук М.Л. Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений. Киев: Наук. думка, 1984. 284 с.
3. Городецький В.В. Граничні властивості гладких у шарі розв'язків рівнянь параболічного типу. Чернівці: Рута, 1998. 225 с.
4. Городецький В.В. Множини початкових значень гладких розв'язків диференціально-операторних рівнянь параболічного типу. Чернівці: Рута, 1998. 219 с.
5. Городецкий В.В., Мартынюк О.В. Операторы обобщенного дифференцирования Гельфонда–Леонтьева в пространствах типа *S*. *Сиб. мат. журн.* 2013. **54**, № 3. С. 569—584.
6. Гуревич Б.Л. Некоторые пространства основных и обобщенных функций и проблема Коши для конечно-разностных схем. *Докл. АН СССР.* 1954. **99**, № 6. С. 893—896.
7. Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. Москва: Физматгиз, 1958. 274 с.
8. Готинчан Т.І., Атаманюк Р.М. Різні форми означення просторів типу *W*. *Наук. вісн. Чернів. ун-ту: Зб. наук. пр. Вип. 111. Математика.* Чернівці: Рута, 2001. С. 21—26.
9. Городецький В.В., Мартинюк О.В. Задача Коші та двоточкова задача для еволюційних рівнянь із операторами узагальненого диференціювання. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2013. № 3. С. 7—13.
10. Городецький В.В., Петришин Р.І., Тодоріко Т.С. Нелокальна багатоточкова за часом задача для одного класу рівнянь з частинними похідними нескінченного порядку. *Нелінійні коливання.* 2015. **18**, № 3. С. 176—191.
11. Городецький В.В., Вережак Г.П. Узагальнені простори типу $\overset{\circ}{S}$. *Буковин. матем. журн.* 2017. **5**, № 1—2. С. 49—61.
12. Городецький В.В., Готинчан Т.І. Перетворення Бесселя у просторах типу $\overset{\circ}{S}$. *Буковин. матем. журн.* 2017. **5**, № 3—4. С. 50—55.
13. Левитан Б.И. Разложение по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье. *Успехи мат. наук.* 1951. **6**, Вып. 2. С. 102—143.

Надійшло до редакції 22.03.2018

REFERENCES

1. Gel'fand, I. M. & Shylov, G. E. (1958). The spaces of basic and generalized functions. Moscow: Fizmatgiz (in Russian).
2. Gorbacuk, V. I. & Gorbacuk, M. L. (1984). Boundary value problems for operator differential equations. Kiev: Naukova dumka (in Russian).
3. Gorodetsky, V. V. (1998). Boundary properties in the layer of smooth solutions of equations of parabolic type. Chernivtsi: Ruta (in Ukrainian).
4. Gorodetsky, V. V. (1998). The set of initial values of smooth solutions of differential-operator equations of a parabolic type. Chernivtsi: Ruta (in Ukrainian).
5. Gorodestky, V. V. & Martynyuk, O. V. (2013). Gel'fond–Leont'ev generalized differentiation operators in spaces of type *S*. Sibirsk. Mat. Zh., 54, No. 3, pp. 569-584 (in Russian).
6. Gurevich, B. L. (1954). Some spaces of principal and generalized functions and the Cauchy problem for finite-difference schemes. Dokl. AN SSSR., 99, No. 6, pp. 893-896 (in Russian).
7. Gel'fand, I. M. & Shylov, G. E. (1958). Some questions in the theory of differential equations. Moscow: Fizmatizd (in Russian).
8. Gotinchan, T. I. & Atamanyuk, R.M. (2001). Different forms of definitions of spaces of the type *W*. Nauk. visnyk Cherniv. un-tu: Zbirnyk nauk. prats. Vyp. 111. Matematyka (pp. 21-26). Chernivtsi: Ruta (in Ukrainian).
9. Gorodestky, V. V. & Martynyuk, O. V. (2013). The Cauchy problem and the two-point problem for the evolution equations with operators of generalized differentiation. Dopov. Nac. akad. nauk Ukr., No. 3, pp. 7-13 (in Ukrainian).

10. Horodets'kyi, V. V., Petryshyn, R. I. & Todoriko, T. S. (2015). Nonlocal problem multipoint in time for a class of partial differential equations of infinite order. Neliniini kolyvannia, 18, No. 3, pp. 176-191 (in Ukrainian).
11. Gorodetskyi, V. V. & Verezhak, G. P. (2017). Generalized of $\overset{\circ}{S}$ type spaces. Bukovyn. matem. zhurn., 5, No. 1-2, pp. 49-61 (in Ukrainian).
12. Gorodetskyi, V. V. & Gotinchan, T. I. (2017). Transformation of Bessel in spaces of type $\overset{\circ}{S}$. Bukovyn. matem. zhurn., 5, No. 3-4, pp. 50-55 (in Ukrainian).
13. Levitan, B. I. (1951). Expansion in Fourier series and integrals with Bessel functions. Uspekhi Mat. Nauk., 6, Iss. 2, pp. 102-143 (in Russian).

Received 22.03.2018

В.В. Городецкий, Г.П. Вережак

Черновицкий национальный университет им. Юрия Федьковича
E-mail: v.gorodetskiy@chnu.edu.ua, g.verezhak@gmail.com

НЕЛОКАЛЬНАЯ ПО ВРЕМЕНИ ЗАДАЧА ДЛЯ ЭВОЛЮЦИОННЫХ
СИНГУЛЯРНЫХ УРАВНЕНИЙ БЕСКОНЕЧНОГО ПОРЯДКА

Устанавливается корректная разрешимость нелокальной многоточечной по времени задачи для эволюционных уравнений с оператором Бесселя бесконечного порядка в обобщенных пространствах типа S и пространствах типа S' — пространствах обобщенных функций бесконечного порядка типа ультрараспределений.

Ключевые слова: *нелокальная многоточечная по времени задача, оператор Бесселя бесконечного порядка, обобщенные пространства типа* S, *обобщенные функции.*

V.V. Gorodetskii, G.P. Verezhak

Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University
E-mail: v.gorodetskiy@chnu.edu.ua, g.verezhak@gmail.com

THE NONLOCAL BY TIME PROBLEM
FOR EVOLUTIONARY SINGULAR EQUATIONS OF INFINITE ORDER

The correct solvability of a nonlocal by time multipoint problem for evolutionary equations with the Bessel operator of infinite order in generalized spaces of the type S and spaces of the type S' that are spaces of generalized functions of infinite order of the type of ultra distributions is proved.

Keywords: *a nonlocal multipoint by time problem, Bessel operator of infinite order, generalized spaces of the type S, generalized functions.*