

doi: <https://doi.org/10.15407/dopovidi2018.07.059>

УДК 530.12

А.В. Бабич, В.Ф. Клепиков

Институт электрофизики и радиационных технологий НАН Украины, Харьков

E-mail: babichart@gmail.com

Двумерная теория поля и критические явления

Представлено членом-корреспондентом НАН Украины В.Ф. Клепиковым

Рассмотрена теория поля, применяемая для описания гравитации в двумерном пространстве. Показано, что при определенных условиях такая теория допускает скрытую симметрию, позволяющую сильно упростить и проинтегрировать соответствующие уравнения.

Ключевые слова: теория поля, гравитация, критические явления.

Одним из важных направлений современной теоретической физики является разработка двумерной теории поля. Это тесно связано с одной из важнейших нерешенных проблем современной физики — построением квантовой теории гравитации. Несмотря на усилия ведущих мировых физиков, окончательного решения данной проблемы так и не найдено. Однако в процессе решения этой проблемы наука обогатилась большим числом новых теорий (теория суперструн, М-теория и др.) Как известно, в пространстве двух измерений классическая эйнштейновская теория гравитации становится тривиальной. Это является следствием того, что, согласно теореме Гаусса—Боне в двумерном пространстве скалярная кривизна и, следовательно, действие Эйнштейна—Гильберта являются топологическими инвариантами. Существует ряд альтернативных теорий для описания двумерной гравитации. Одна из таких моделей — теория Лиувилля [1]. Важным свойством теории Лиувилля является ее конформная инвариантность. Конформно инвариантные модели играют крайне важную роль в современной теории поля и в последние десятилетия привлекают внимание многих исследователей. Особо важную роль конформно инвариантные модели играют в физике двумерных систем. Связано это с тем, что в двумерном пространстве конформная группа бесконечномерна. Соответствующая бесконечномерная алгебра — это алгебра Вирасоро. Следствием бесконечномерности двумерной конформной группы является точная решаемость многих двумерных моделей, описывающих различные критические явления (наиболее известные примеры: точное решение двумерных моделей Изинга, точно решаемые модели в двумерной квантовой теории поля [2], точные решения в двумерной гидродинамике [3, 4] и т.д.). Действие в теории Лиувилля имеет следующий вид:

$$S = \frac{1}{4\pi} \int d^2x \sqrt{g} (g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + (b + b^{-1}) R \phi + 4\pi e^{2b\phi}). \quad (1)$$

© А.В. Бабич, В.Ф. Клепиков, 2018

Центральный заряд алгебры Вирасоро, соответствующий этой модели, связан с b следующим выражением:

$$c = 1 + 6(b + 1/b)^2. \quad (2)$$

Уравнения движения для действия (1) выглядят следующим образом:

$$\Delta\phi(x) = \frac{1}{2}(b + b^{-1})R(x) + 4\pi b e^{2b\phi(x)}, \quad (3)$$

где $\Delta = g^{-1/2}\partial_\mu(g^{1/2}g^{\mu\nu}\partial_\nu)$.

В центрально симметричном случае уравнение (3) можно переписать в виде:

$$\frac{d^2\phi}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\phi}{dr} - \frac{1}{2}(b + b^{-1})R(x) - 4\pi b e^{2b\phi(x)} = 0. \quad (4)$$

Таким образом вариационное уравнение для (1) в общем случае принимает вид:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + f(x)\frac{dy}{dx} + Ke^{y(x)} + F(x) = 0. \quad (5)$$

В следующих разделах будет рассмотрена групповая и лагранжева структура уравнений типа (5), построены некоторые типы точных решений.

Групповая структура и скрытая симметрия уравнений теории Лиувилля. Уравнения типа (5) возникают в различных областях физики. В частности, в теории сверхизлучения (обсуждение связи теории сверхизлучения с уравнениями (5), а также ссылки на оригинальные работы на эту тему можно найти в [5]). В статье [5] также приведены подробности нахождения групповой структуры уравнения (5). В данной статье для нас важным является следующий факт. В случае выполнения условия

$$F = 2\left(f^2 + \frac{df}{dx}\right) \quad (6)$$

уравнение (5) допускает группу с генератором:

$$\hat{X} = A(x)\frac{\partial}{\partial x} + B(x)\frac{\partial}{\partial y}, \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} A(x) &= C_1 e^{\int f(x)dx} + C_2 e^{\int f(x)dx} \int e^{-\int f(x)dx} dx, \\ B(x) &= -2C_1 f(x) e^{\int f(x)dx} - 2C_2 (1 + f(x)) e^{\int f(x)dx} \int e^{-\int f(x)dx} dx, \end{aligned} \quad (8)$$

где C_1 и C_2 — константы интегрирования.

Интересно отметить, что условие (6) по внешнему виду совпадает с одним из простейших суперсимметричных потенциалов — потенциалом Виттена [6].

Генераторы соответствующих подгрупп могут быть записаны следующим образом:

$$\begin{aligned} \hat{X}_1 &= e^{\int f(x)dx} \frac{\partial}{\partial x} - 2f(x) e^{\int f(x)dx} \frac{\partial}{\partial y}, \\ \hat{X}_2 &= e^{\int f(x)dx} \int e^{-\int f(x)dx} dx \frac{\partial}{\partial x} - 2(1 + f(x)) \cdot e^{\int f(x)dx} \int e^{-\int f(x)dx} dx \frac{\partial}{\partial y}. \end{aligned} \quad (9)$$

Используем подгруппу с генератором \hat{X}_1 для упрощения уравнения (5). Для этого перейдем к новым переменным z и t , где z -инвариант группы, т.е. $\hat{X}_1(z) = 0$, а t определяется из условия $\hat{X}_1(t) = 1$, также считаем переменную t функцией только от x . В явном виде эти условия выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} e^{\int f(x)dx} \frac{\partial z}{\partial x} + 2f(x)e^{\int f(x)dx} \frac{\partial z}{\partial y} &= 0, \\ e^{\int f(x)dx} \frac{\partial t}{\partial x} &= 1. \end{aligned} \quad (10)$$

Решая (10), находим искомую замену переменных:

$$z(t) = y + 2 \int f(x)dx, \quad t = \int e^{-\int f(x)dx} dx. \quad (11)$$

Подставляя выражения (11) в уравнение (5) и упрощая полученные выражения, получаем уравнение в переменных t и z :

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + Ke^z = 0. \quad (12)$$

Для этого уравнения легко найти производящий функционал, то есть такой функционал для которого оно является вариационным уравнением Эйлера—Лагранжа:

$$L = \int \left(\frac{1}{2} \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 - Ke^z \right) dt \quad (13)$$

Генератор \hat{X}_2 в переменных z и t выглядит следующим образом:

$$\hat{X}_2 = t \frac{\partial}{\partial t} - 2 \frac{\partial}{\partial z}. \quad (14)$$

Преобразования, соответствующие \hat{X}_2 , в явном виде выглядят как:

$$t \rightarrow te^a, \quad z = z - 2a. \quad (15)$$

Таким образом, благодаря скрытой симметрии (7), допускаемой уравнением (5) при выполнении условия (6), оказывается возможным значительно упростить рассматриваемое уравнение. При этом довольно сложные преобразования, которые в исходных переменных соответствуют генератору (11), в новых переменных соответствуют одновременному сдвигу функции и масштабному преобразованию аргумента (18). Преобразования же, соответствующие \hat{X}_1 , в новых переменных переходят в трансляции по аргументу. Кроме того, как легко увидеть из выражения (13), они являются вариационными. Как известно, наличие в уравнении вариационной симметрии позволяет понизить его порядок сразу на 2. В нашем случае речь идет о полной интегрируемости уравнения (12). Решение уравнения (12) выглядит следующим образом:

$$z(t) = -\ln \left(2KC_1 ch^2 \left(\frac{t+C_2}{2C_1} \right) \right). \quad (16)$$

С помощью обратной замены переменных можно из выражения (13) найти производящий функционал для уравнения (5):

$$F = \int \left[\frac{1}{2} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + 2 \frac{dy}{dx} f(x) - K e^x \right] e^{\int f(x) dx} . \quad (17)$$

В принципе, используя замену переменных (14), можно было бы напрямую с помощью решения (16) находить классы точных решений уравнения (5). Однако эти решения слишком громоздки и малоинформативны. Поэтому имеет смысл выбирать конкретные выражения для $f(x)$, соответствующие различным выражениям для метрики пространства–времени и для них строить точные решения.

Таким образом, в пространстве произвольной размерности для описания критических явлений используют модели с лагранжианом типа:

$$F = \frac{1}{V} \int [(\nabla\phi)^2 + \dots + \beta\phi^{N+1}] d^d x , \quad (18)$$

где ϕ — поле параметра порядка; d — размерность пространства. Как известно [7], для моделей типа (18) существуют две критические размерности: верхняя и нижняя. Нижняя размерность определяет саму возможность возникновения упорядоченных состояний. В пространстве же верхней размерности система обладает рядом важных свойств. А именно: модель является перенормируемой, система допускает вариационную масштабную симметрию, а соответствующие уравнения являются конформно инвариантными. Все эти свойства значительно облегчают анализ таких систем. Верхняя критическая размерность связана с параметрами модели таким соотношением:

$$N = \frac{d+2}{d-2} . \quad (19)$$

Видно, что при $d = 2$ N обращается в бесконечность. Аналогом модели (18) для двумерного пространства служит модель с лагранжианом:

$$F = \frac{1}{S} \int [(\nabla\phi)^2 + \dots + \beta e^\phi] d^2 x . \quad (20)$$

Именно такого типа модель была рассмотрена в данной статье. Группа симметрии (7) может рассматриваться как двумерный аналог соответствующих многомерных симметрий. Как было показано, она также позволяет значительно упростить модель и проинтегрировать соответствующие дифференциальные уравнения.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Nakayama, Yu. Liouville Field Theory — A decade after the revolution. *Int. J. Modern Phys.* 2004. А. **19**. Iss. 17–18. P. 2771–2930. doi: <https://doi.org/10.1142/S0217751X04019500>
2. Замолодчиков А.Б., Замолодчиков Ал.Б. Конформная теория поля и критические явления в двумерных системах. Москва: МЦНМО. 2009. 168 с.
3. Бабич А.В., Клепиков В.Ф., Щелоковский П.А. Скрытая симметрия уравнений газовой динамики и «мелкой воды». *Вестн. ХНУ. Сер. Ядра, частицы, поля.* 2001. В.4(16), № 541. С. 68–72.
4. Бабич А.В. Скрытая симметрия уравнений магнитной гидродинамики и инвариантные решения. *Допов. Нац. акад. наук України.* 2014. № 2. С. 78–83.
5. Бабич А.В., Березовский С.В., Клепиков В.Ф. Динамический дальний порядок и коллективное спонтанное излучение. *Вопросы атомной науки и техники.* 2005. № 5. С. 63–65.

6. Witten E. Dynamical Breaking of Supersymmetry. *Nucl. Phys. B*188. 1981. P. 513–554. doi: [https://doi.org/10.1016/0550-3213\(81\)90006-7](https://doi.org/10.1016/0550-3213(81)90006-7)
7. Babich A.V., Kitcenko L.N., Klepikov V.F. Critical dimensions of systems with joint multicritical and Lifshitz-point-like behavior. *Modern Phys. Lett. B*. 2011. **25**. № 22. P. 1839–1845.

Поступило в редакцию 22.02.2018

REFERENCES

1. Nakayama, Yu. (2004). Liouville Field Theory – A decade after the revolution. *Int. J. Modern Phys. A*. 19, Iss. 17–18, pp. 2771-2930. doi: <https://doi.org/10.1142/S0217751X04019500>
2. Zamolodchikov, A. B. & Zamolodchikov, Al. B. (2009). *Conformal Field Theory and Critical Phenomena in Two Dimensional Systems*. Moskow: MCCME (in Russian).
3. Babich, A. V., Klepikov, V. F. & Shelokovsky, P. A. (2001). The hidden symmetry of the equations of gas dynamics and "shallow water". Reportd of KhNU, No. 541, pp. 68-72 (in Russian).
4. Babich, A. V. (2014). The hidden symmetry of the equations of magnetohydrodynamics and invariant solutions. *Dopov. Nac. acad. nauk Ukr.*, No. 2, pp. 78-83 (in Russian).
5. Babich, A. V., Berezovsky, S. V. & Klepikov, V. F. (2005). Dynamic long-range order and collective spontaneous radiation. *Problems of Atomic Science and Technology*, No. 5, pp. 63-65 (in Russian).
6. Witten, E. (1981). Dynamical Breaking of Supersymmetry. *Nucl. Phys. B*188, pp. 513-554. doi: [https://doi.org/10.1016/0550-3213\(81\)90006-7](https://doi.org/10.1016/0550-3213(81)90006-7)
7. Babich, A. V., Kitcenko, L. N. & Klepikov, V. F. (2011). Critical dimensions of systems with joint multicritical and Lifshitz-point-like behavior. *Modern Phys. Lett. B*, 25, No. 22, pp. 1839-1845.

Received 22.02.2018

A.V. Babich, V.F. Klepikov

Інститут електрофізики і радіаційних технологій НАН України, Харків
E-mail: babichart@gmail.com

ДВОВИМІРНА ТЕОРІЯ ПОЛЯ І КРИТИЧНІ ЯВИЩА

Розглянуто теорію поля, яку використовують для опису гравітації у двовимірному просторі. Показано, що за деяких умов така теорія допускає приховану симетрію. Наявність такої симетрії дозволяє значно спростити відповідні рівняння та в деяких випадках побудувати точні розв'язки.

Ключові слова: теорія поля, гравітація, критичні явища.

A.V. Babich, V.F. Klepikov

Institute of Electrophysics and Radiation Technologies of the NAS of Ukraine, Kharkiv
E-mail: babichart@gmail.com

TWO-DIMENSIONAL FIELD THEORY AND CRITICAL PHENOMENA

A theory that allows one to describe the two-dimensional gravity is considered. Conditions, under which the theory has a hidden group of symmetry, are found. This group of symmetry allow one to simplify the corresponding equations and, under some conditions, to find the exact solutions.

Keywords: field theory, gravity, critical phenomena.