ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

МАТЕМАТИКА

doi: https://doi.org/10.15407/dopovidi2018.07.003
УДК 517.98

Д.І. Стрельніков

Донецький національний університет ім. Василя Стуса, Вінниця
E-mail: d.strelnikov@donnu.edu.ua

Граничні трійки для інтегральних систем

Представлено членом-кореспондентом НАН України А.Н. Кочубеєм

Для інтегральної системи, що містить як частинні випадки рівняння Штурма—Ліувілля, струну Стілтьєса та струну Крейна—Феллера, досліджено максимальне та мінімальне лінійне відношення в асоційованому гільбертовому просторі. Для максимального лінійного відношення побудовано граничні трійки та відповідні функції Вейля як у випадку граничного круга, так і у випадку граничної точки.

Ключові слова: *інтегральна система, гранична трійка, симетричне лінійне відношення, індекси дефекту, функція Вейля.*

Поняття граничної трійки (простору граничних значень) і відповідної функції Вейля симетричного оператора, введені в роботах [1] і [2] відповідно, виявилися корисними в дослідженні спектральних проблем у теорії розширень симетричних операторів (див. [3, 4] і посилання в них). Застосування теорії граничних трійок до симетричних систем диференціальних рівнянь досліджувались в [5—9].

У цій роботі розглядаються інтегральні системи на півосі, що містять у собі системи Штурма—Ліувілля, струну Стілтьєса та струну Крейна—Феллера як частинні випадки. Такі системи досліджувались в роботах [10—13]. Для цих інтегральних систем вводяться поняття мінімального $A_{\min}$ і максимального $A_{\max}$ лінійних відношень і знаходиться вигляд граничних трійок для відношення $A_{\max}$ як у випадку граничної точки, так і у випадку граничного круга. Ми використовуємо термінологію теорії лінійних відношень з [14].

1. Постановка задачі. Розглянемо на інтервалі $\iota=[0;l)$ $(l\leqslant\infty)$ систему

$$J\vec{f}(x)-J\vec{a}=\int_0^x\begin{pmatrix}\lambda dW-dQ & 0\\ 0 & dP\end{pmatrix}\vec{f}(t),\quad J=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \tag{1}$$

де $\vec{f}$ — функція зі значеннями в $\mathbb{C}^2$, $\lambda\in\mathbb{C}$, а P, Q і W — функції з $BV_{\mathrm{loc}}(\iota)$, нормовані умовою $P(0)=Q(0)=W(0)$, причому W не спадає.

Означення 1. Будемо казати, що функція f є розв'язком системи (1), якщо вона належить до класу $BV_{\mathrm{loc}}(\iota)$, є неперервною зліва і рівність (1) виконується в кожній точці $x\in\iota$.

В роботі [12] доведено, що система (1) має єдиний розв'язок не тільки для довільного сталого вектора $\vec{a}$, а й для будь-якої неперервної зліва функції $\vec{a}(x) \in BV_{loc}(\iota)$.

Позначимо через $\mathcal{L}_{loc}(W)$ і $\mathcal{L}^2_{loc}(W)$ множини функцій, для яких виконано відповідно

$$\int_j |f(t)| dW(t) < \infty \quad \text{і} \quad \int_j |f(t)|^2 dW(t) < \infty \tag{2}$$

на будь-якому замкненому інтервалі $j \subset \iota$. Якщо інтеграли в (2) залишаються скінченними при $j = \iota$, будемо говорити, що f належить до $\mathcal{L}(W)$ та $\mathcal{L}^2(W)$ відповідно. Простір $\mathcal{L}^2(W)$ є квазігільбертовим зі скалярним добутком

$$(f, g)_W := \int_\iota f(t)\overline{g(t)} dW(t).$$

Відповідний факторпростір позначимо $L^2(W)$, а його елементи будемо записувати готичними літерами $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{g}$ і т. д.

Розглянемо на ι допоміжну неоднорідну систему

$$J\begin{pmatrix} f \\ f^{[1]} \end{pmatrix}\Bigg|_0^x = \int_0^x \begin{pmatrix} -dQ & 0 \\ 0 & dP \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f \\ f^{[1]} \end{pmatrix} + \int_0^x \begin{pmatrix} dW & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} g \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Означення 2. Будемо казати, що пара $\{\vec{f}, g\}$ з вектор-функції $\vec{f} = (f \quad f^{[1]})^T$ та скалярної функції g задовольняє систему (3), якщо $g \in \mathcal{L}_{loc}(W)$, $\vec{f} \in BV_{loc}(\iota)$ і рівність (3) виконується в кожній точці $x \in \iota$.

Умова 1. Функції Q і W не мають спільних точок розриву з функцією P.

Теорема 1 (друга формула Гріна). *Нехай виконано умову* 1. *Якщо пари* $\{\vec{f}, g\}$ *та* $\{\vec{u}, v\}$ *задовольняють систему* (3) (*див. означення* 2) *і* $0 \leqslant \alpha \leqslant \beta < l$, *то виконується рівність*

$$\int_\alpha^\beta (g\bar{u} - f\bar{v})dW = [\vec{f}, \bar{\vec{u}}]\Big|_\alpha^\beta,$$

де

$$[\vec{f}, \vec{u}] := (fu^{[1]} - f^{[1]}u).$$

2. Лінійні відношення. Лінійний підпростір θ декартового добутку $L^2(W) \times L^2(W)$ називається *лінійним відношенням* в $L^2(W)$ [14].

Означення 3. Будемо казати, що пара класів $(\mathfrak{f}\ \mathfrak{g})^T \in L^2(W) \times L^2(W)$ належить лінійному відношенню $A_{\max}$, якщо існують функції f, $f^{[1]}$ і g такі, що пара $\{\vec{f}, g\}$ задовольняє систему (3) та виконані включення $f \in \mathfrak{f}$, $g \in \mathfrak{g}$.

Умова 2. Існує відрізок $[\alpha; \beta] \subset \iota$ такий, що для довільних $a, b, a_1, b_1 \in \mathbb{C}$ знайдуться функції $\vec{f}$ і g, що задовольняють систему (3) та граничні умови

$$f(\alpha) = a, \quad f(\beta) = b, \quad f^{[1]}(\alpha) = a_1, \quad f^{[1]}(\beta) = b_1.$$

Зауваження 1. Зокрема, при $dQ \equiv 0$ достатню умову для виконання умови 2 надає [15, пропозиція 3.7]. Взагалі кажучи, для довільних функцій P, Q і W умова 2 не виконується.

Пропозиція 1. *Якщо для системи* (3) *умова* 2 *виконується на деякому відрізку* $[\alpha, \beta]$, *то вона виконується і на відрізку* $[\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}]$ *такому, що* $[\alpha, \beta] \subseteq [\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}] \subset \iota$.

Пропозиція 2. *Нехай виконано умову* 2 *на відрізку* $[0, l_0] \subset \iota = [0, l)$, $(\mathfrak{f} \quad \mathfrak{g})^T \in A_{\max}$, *пари* $\{\vec{f}_1, g_1\}$ *і* $\{\vec{f}_2, g_2\}$ *задовольняють систему* (3), *причому* $f_1, f_2 \in \mathfrak{f}$, $g_1, g_2 \in \mathfrak{g}$. *Тоді*

$$f_1(0) = f_2(0), \quad f_1^{[1]}(0) = f_2^{[1]}(0), \quad f_1(l_0) = f_2(l_0), \quad f_1^{[1]}(l_0) = f_2^{[1]}(l_0).$$

Пропозиція 3. *Якщо* $(\mathfrak{f}\ \mathfrak{g})^T, (\mathfrak{u}\ \mathfrak{v})^T \in A_{\max}$, *то існує скінченна границя*

$$[\vec{f},\bar{\vec{u}}]_l := \lim_{x\to l}[\vec{f},\bar{\vec{u}}]_x .$$

Означення 4 [1]. Нехай A — симетричне лінійне відношення. Сукупність $\{\mathcal{H},\Gamma_0,\Gamma_1\}$, де $\mathcal{H}$ — гільбертів простір, Γ_0 і Γ_1 — лінійні відображення з A^* в $\mathcal{H}$, називається *граничною трійкою* для лінійного відношення A^*, якщо:

(i) виконується узагальнена тотожність Гріна:

$$(g,u)_{\mathfrak{H}}-(f,v)_{\mathfrak{H}}=\left(\Gamma_1\begin{pmatrix} f\\ g\end{pmatrix},\Gamma_0\begin{pmatrix} u\\ v\end{pmatrix}\right)_{\mathcal{H}}-\left(\Gamma_0\begin{pmatrix} f\\ g\end{pmatrix},\Gamma_1\begin{pmatrix} u\\ v\end{pmatrix}\right)_{\mathcal{H}} \quad \text{для всіх} \quad \begin{pmatrix} f\\ g\end{pmatrix},\begin{pmatrix} u\\ v\end{pmatrix}\in A^*;$$

(ii) відображення $\Gamma=\begin{pmatrix}\Gamma_0\\ \Gamma_1\end{pmatrix}: A^*\to\mathcal{H}\times\mathcal{H}$ сюр'єктивно.

Оператор-функція $M(\cdot)$ така, що

$$M(\lambda)\Gamma_0\hat{f}_\lambda=\Gamma_1\hat{f}_\lambda;\quad \hat{f}_\lambda\in\hat{\mathfrak{N}}_\lambda;\quad \lambda\in\rho(A_0)$$

називається *функцією Вейля* лінійного відношення A [2, 4], що відповідає $\{\mathcal{H},\Gamma_0,\Gamma_1\}$.

3. Квазірегулярний випадок.

Означення 5. Точку l називатимемо квазірегулярною для системи (3) на інтервалі $\iota=[0,l)$, якщо всі функції P, Q і W належать до $BV(\iota)$. Якщо додатково $l<\infty$, називатимемо її регулярною.

Нижченаведена теорема є аналогом [7, пропозиція 2.6].

Теорема 2. *Нехай точка l є квазірегулярною для системи* (3) *і* $g\in\mathcal{L}(W)$. *Тоді довільний розв'язок* $\vec{f}$ *системи* (3) *належить до* $\mathcal{L}^2(W)$; *існує скінченна границя*

$$\lim_{x\to l}\vec{f}(x),$$

причому для будь-якого вектора $\vec{b}\in\mathbb{C}^2$ *існує єдиний розв'язок системи* (3) *такий, що*

$$\lim_{x\to l}\vec{f}(x)=\vec{b} \ \text{ на інтервалі } \iota=[0,l).$$

Теорема 3. *Нехай виконано умову 2 і точка l є квазірегулярною для системи* (3), *а відображення* $\Gamma_0,\Gamma_1: A_{\max}\mapsto\mathbb{C}^2$ *визначені рівностями*

$$\Gamma_0\begin{pmatrix}\mathfrak{f}\\ \mathfrak{g}\end{pmatrix}:=\begin{pmatrix} f(0)\\ \lim\limits_{x\to l}f(x)\end{pmatrix},\quad \Gamma_1\begin{pmatrix}\mathfrak{f}\\ \mathfrak{g}\end{pmatrix}:=\begin{pmatrix} f^{[1]}(0)\\ -\lim\limits_{x\to l}f^{[1]}(x)\end{pmatrix}, \tag{4}$$

де пара $\{\vec{f},g\}$ *задовольняє систему* (3), $f\in\mathfrak{f}$, $g\in\mathfrak{g}$. *Тоді означення* (4) *є коректними та сукупність* $\{\mathbb{C}^2,\Gamma_0,\Gamma_1\}$ *утворює граничну трійку для лінійного відношення* $A_{\max}$.

4. Теорія Вейля. Нехай виконано умову 2. Позначимо $\iota_0:=[0,l_0]$, де $\beta\leqslant l_0<\infty$. Нехай $A_{\max}(\iota_0)$ — максимальне лінійне відношення, пов'язане з системою (3) на ι_0, див. [15, Definition 3.5].

Означення 6. Визначимо лінійне відношення $A(\iota_0,h)$, $h\in\mathbb{R}\cup\{\infty\}$, в $L^2(\iota_0,W)$ рівністю

$$A(\iota_0,h):=\left\{\begin{pmatrix}\mathfrak{f}\\ \mathfrak{g}\end{pmatrix}\in A_{\max}(\iota_0): f(0)=f^{[1]}(0)=hf^{[1]}(l_0)+f(l_0)=0\right\},$$

де $f\in\mathfrak{f}$, $g\in\mathfrak{g}$ і пара $\{\vec{f},g\}$ задовольняє систему (3).

Зауваження 2. Коректність означення 6 випливає з пропозиції 2.

Нехай $\vec{c}(x,\lambda)$ і $\vec{s}(x,\lambda)$ — розв'язки системи (1), що задовольняють початкові умови

$$c(0,\lambda)=1, \quad c^{[1]}(0,\lambda)=0, \quad s(0,\lambda)=0, \quad s^{[1]}(0,\lambda)=1. \tag{5}$$

Класи еквівалентності в просторі $L^2(\iota_0, W)$, що породжені цими функціями, позначимо $c(\lambda)$ і $s(\lambda)$ відповідно (див. [15, Section 3.3]).

Теорема 4. *Лінійне відношення* $A(\iota_0, h)$ *є симетричним в* $L^2(\iota_0, W)$. *При цьому:*

(i) спряжене лінійне відношення $A(\iota_0, h)^*$ *визначається рівністю*

(ii) $A(\iota_0, h)^* := \left\{ \begin{pmatrix} \mathfrak{f} \\ \mathfrak{g} \end{pmatrix} \in A_{max}(\iota_0) : hf^{[1]}(l_0) + f(l_0) = 0 \right\},$

де $f \in \mathfrak{f}$, $g \in \mathfrak{g}$ *і пара* $\{\vec{f}, g\}$ *задовольняє систему* (3);

(iii) сукупність $\{\mathbb{C}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$, *де*

$$\Gamma_0 \begin{pmatrix} \mathfrak{f} \\ \mathfrak{g} \end{pmatrix} = f^{[1]}(0), \quad \Gamma_1 \begin{pmatrix} \mathfrak{f} \\ \mathfrak{g} \end{pmatrix} = -f(0),$$

утворює граничну трійку для лінійного відношення $A(\iota_0, h)^*$;

(iv) відповідна функція Вейля лінійного відношення $A(\iota_0, h)^*$ *має вигляд*

$$m(\lambda, l_0, h) = \frac{s^{[1]}(l_0, \lambda)h + s(l_0, h)}{c^{[1]}(l_0, \lambda)h + c(l_0, h)}.$$

Зауваження 3. Функція Вейля $m(\lambda, l_0, h)$ лінійного відношення $A(\iota_0, h)^*$ з теореми 4 збігається з формулою (2.37) [11].

Пропозиція 4. *При фіксованому* $\lambda \in \mathbb{C}_+$ *множина значень* $m(\lambda, l_0, h)$, $h \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, *заповнює коло* $C_{l_0}(\lambda)$, *що лежить в* $\mathbb{C}_+$ *з центром в точці* $\tilde{m}_{l_0}$ *і радіусом* $r_{l_0}(\lambda)$:

$$\tilde{m}_{l_0}(\lambda) = \frac{[\vec{s}, \bar{\vec{c}}]_{l_0}}{[\vec{c}, \bar{\vec{c}}]_{l_0}}, \quad r_{l_0}(\lambda) = \left[2\operatorname{Im}\lambda \int_0^{l_0} |c(x,\lambda)|^2 \, dW \right]^{-1}.$$

Точки m круга $K_{l_0}(\lambda)$, *обмеженого колом* $C_{l_0}(\lambda)$, *характеризуються нерівністю*

$$\int_0^{l_0} |s(x,\lambda) - mc(x,\lambda)|^2 \, dW \leqslant \frac{\operatorname{Im} m}{\operatorname{Im}\lambda}.$$

Означення 7. Визначимо лінійне відношення $A_{\min}$ формулою

$$A_{\min} := \left\{ \begin{pmatrix} \mathfrak{f} \\ \mathfrak{g} \end{pmatrix} \in A_{\max} : f(0) = f^{[1]}(0) = \lim_{x \to l_0} [\vec{f}, \vec{u}]_x = 0 \text{ для всіх } \begin{pmatrix} \mathfrak{u} \\ \mathfrak{v} \end{pmatrix} \in A_{\max} \right\},$$

де $f \in \mathfrak{f}$, $g \in \mathfrak{g}$, $u \in \mathfrak{u}$, $v \in \mathfrak{v}$ і пари $\{\vec{f}, g\}$, $\{\vec{u}, v\}$ задовольняє систему (3).

Пропозиція 5. *При зростанні* $l_0 = [\beta, l)$ *круги* $K_{l_0}(\lambda)$ *вкладені один в одний. При цьому:*

(i) $n_\pm(A_{\min}) = 1 \Leftrightarrow K_{l_0}(\lambda)$ *збігається до граничної точки* $K_l(\lambda)$ *при* $l_0 \to l$;

(ii) $n_\pm(A_{\min}) = 2 \Leftrightarrow K_{l_0}(\lambda)$ *збігається до граничного круга* $C_l(\lambda)$ *при* $l_0 \to l$.

Наслідок 1 (аналог теореми Вейля). *При кожному* $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ *принаймні один розв'язок системи* (1) *належить до* $L^2(W)$ *на* ι.

Нехай точка l є сингулярною для системи (3).

Означення 8 [12]. Кажуть, що для системи (1) мають місце:

(i) випадок граничної точки в l, якщо $n_{\pm}(A_{\min})=1$;

(ii) випадок граничного круга в l, якщо $n_{\pm}(A_{\min})=2$.

У випадку граничної точки розв'язок $d(\cdot,\lambda)$ системи (1), що належить $L^2(W)$ (пронормований умовою $d(0,\lambda)=1$), називають розв'язком Вейля.

5. Випадок граничної точки.

Теорема 5. *Нехай для системи* (3) *має місце випадок граничної точки в l. Тоді:*

(i) для довільних $(\mathfrak{f} \quad \mathfrak{g})^T, (\mathfrak{u} \quad \mathfrak{v})^T \in A_{\max}$ *має місце рівність*

$$\lim_{x\to l}[\vec{f},\bar{\vec{u}}]_x=0,$$

де пари $\{\vec{f},g\}$, $\{\vec{u},v\}$ *задовольняють систему* (3) *і виконані включення* $f\in\mathfrak{f}$, $g\in\mathfrak{g}$, $u\in\mathfrak{u}$, $v\in\mathfrak{v}$;

(ii) лінійне відношення $A_{\min}$ *може бути визначене рівністю*

$$A_{\min}:=\left\{\begin{pmatrix}\mathfrak{f}\\ \mathfrak{g}\end{pmatrix}\in A_{\max}: f(0)=f^{[1]}(0)=0\right\}.$$

Теорема 6. *Нехай виконано умову* 2 *і для системи* (3) *має місце випадок граничної точки, а відображення* $\Gamma_0,\Gamma_1:A_{\max}\mapsto\mathbb{C}$ *визначені рівностями*

$$\Gamma_0\begin{pmatrix}\mathfrak{f}\\ \mathfrak{g}\end{pmatrix}:=f(0),\quad \Gamma_0\begin{pmatrix}\mathfrak{f}\\ \mathfrak{g}\end{pmatrix}:=f^{[1]}(0). \tag{6}$$

де пара $\{\vec{f},g\}$ *задовольняє систему* (3), $f\in\mathfrak{f}$, $g\in\mathfrak{g}$. *Нехай також* $d(\cdot,\lambda)$ *є розв'язком Вейля системи* (1). *Тоді:*

(i) означення (6) *є коректними і сукупність* $\{\mathbb{C},\Gamma_0,\Gamma_1\}$ *з* (6) *утворює граничну трійку для лінійного відношення* $A_{\max}$;

(ii) відповідна функція Вейля має вигляд $M(\lambda)=d^{[1]}(0,\lambda)=m_l(\lambda)$.

6. Випадок граничного круга.

Теорема 7. *Нехай виконано умову* 2 *і для системи* (3) *має місце випадок граничного круга в l, а відображення* Γ_0,Γ_1 *визначені рівностями*

$$\Gamma_0\begin{pmatrix}\mathfrak{f}\\ \mathfrak{g}\end{pmatrix}:=\begin{pmatrix}f(0)\\ [\vec{f},\overrightarrow{s_0}]_l\end{pmatrix},\quad \Gamma_1\begin{pmatrix}\mathfrak{f}\\ \mathfrak{g}\end{pmatrix}:=\begin{pmatrix}f^{[1]}(0)\\ [\vec{f},\overrightarrow{c_0}]_l\end{pmatrix}, \tag{7}$$

де $\vec{f}$ *і g задовольняють систему* (3) *і виконані включення* $f\in\mathfrak{f}$, $g\in\mathfrak{g}$. *Тоді:*

(*i*) *визначення* (7) *є коректними та сукупність* $\{\mathbb{C}^2,\Gamma_0,\Gamma_1\}$ *з* (7) *утворює граничну трійку для лінійного відношення* $A_{\max}$;

(*ii*) *відповідна функція Вейля має вигляд*

$$M(\lambda)=\frac{1}{[\vec{s}(\cdot,\lambda),\overrightarrow{s_0}]_l}\begin{pmatrix}-[\vec{c}(\cdot,\lambda),\overrightarrow{s_0}]_l & 1\\ 1 & [\vec{s}(\cdot,\lambda),\overrightarrow{c_0}]_l\end{pmatrix}.$$

Зауваження 4. Якщо точка l є квазірегулярною для системи (3), то має місце випадок граничного круга в точці l.

ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Кочубей А.Н. О расширениях симметрических операторов и симметрических бинарных отношений. *Матем. заметки*. 1975. **17**, № 1. С. 41—48.
2. Malamud M.M. On the formula of generalized resolvents of a nondensely defined Hermitian operator. *Ukr. Mat. Zh*. 1992. **44**, № 12. P. 1658—1688. doi: https://doi.org/10.1007/BF01061278
3. Горбачук В.И., Горбачук М.Л. Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений. Киев: Наук. думка, 1984. 284 с.
4. Derkach V.A., Malamud M.M. Extension theory of symmetric operators and boundary value problems. *Proceedings of Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine, Vol. 104*. Kyiv: Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine, 2017. P. 573.
5. Lesh M., Malamud M. On the deficiency indices and self-adjointness of symmetric Hamiltonian systems. *J. Differ. Equat*. 2003. **189**, № 2. P. 556—615. doi: https://doi.org/10.1016/S0022-0396(02)00099-2
6. Mogilevskii V. Boundary triplets and Titchmarsh—Weyl functions of differential operators with arbitrary deficiency indices. *Methods Funct. Anal. Topol*. 2009. **15**, № 3. P. 280—300.
7. Behrndt J., Hassi S., de Snoo H., Wietsma R. Square-integrable solutions and Weyl functions for singular canonical systems. *Math. Nachr*. 2011. **284**, № 11—12. P. 1334—1384. doi: https://doi.org/10.1002/mana.201000017
8. Mogilevskii V. Spectral and pseudospectral functions of Hamiltonian systems: development of the results by Arov-Dym and Sakhnovich. *Methods Funct. Anal. Topol*. 2015. **21**, № 4. P. 70—402.
9. Кац И.С. Линейные отношения, порождаемые каноническим дифференциальным уравнением фазовой размерности 2, и разложимость по собственным функциям. *Алгебра и анализ*. 2002. **14**, № 3. С. 86—120.
10. Аткинсон Ф.В. Дискретные и непрерывные граничные задачи. Москва: Мир, 1968. 749 с.
11. Кац И.С., Крейн М.Г. О спектральных функциях струны. *Дискретные и непрерывные граничные задачи. Аткинсон Ф.В.*: Дополнение 2. Москва: Мир, 1968. С. 648—731.
12. Bennewits C. Spectral asymptotics for Sturm–Liouville equations. *Proc. London Math. Soc*. 1989. **s3-59**, Iss. 2. P. 294—338. doi: https://doi.org/10.1112/plms/s3-59.2.294
13. Arov D.Z., Dym H. Bitangential direct and inverse problems for systems of integral and differential equations. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2012. (Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Vol. 145).
14. Arens R. Operational calculus of linear relations. *Pac. J. Maths*. 1961. **11**, № 1. P. 9—23. doi: https:// doi.org/10.2140/pjm.1961.11.9
15. Strelnikov D. Boundary triples for integral systems on finite intervals. *Ukr. Math. Bull*. 2017. **14**, № 3. P. 418—439.

Надійшло до редакції 07.03.2018

REFERENCES

1. Kochubei, A. N. (1975). On extensions of symmetric operators and symmetric binary relations. Math. Notes, 17, No. 1, pp. 25-28.
2. Malamud, M. M. (1992). On the formula of generalized resolvents of a nondensely defined Hermitian operator. Ukr. Math. J., 44, Iss. 12, pp. 1522-1547. doi: https://doi.org/10.1007/BF01061278
3. Gorbachuk, V. I. & Gorbachuk, M. L. (1984). Boundary problems for differential operator equations. Kiev: Naukova Dumka (in Russian).
4. Derkach, V. A. & Malamud, M. M. (2017). Extension theory of symmetric operators and boundary value problems. Proceedings of Institute of Mathematics NAS of Ukraine, Vol. 104 (p. 573). Kyiv: Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine.
5. Lesh, M. & Malamud, M. (2003). On the deficiency indices and self-adjointness of symmetric Hamiltonian systems. J. Diff. Equat., 189, No. 2, pp. 556-615. doi: https://doi.org/10.1016/S0022-0396(02)00099-2
6. Mogilevskii, V. (2009). Boundary triplets and Titchmarsh—Weyl functions of differential operators with arbitrary deficiency indices. Methods Func. Anal. Topol., 15, No. 3, pp. 280-300.
7. Behrndt, J., Hassi, S., de Snoo, H. & Wietsma, R. (2011). Square-integrable solutions and Weyl functions for singular canonical systems. Math. Nachr., 284, No. 11-12, pp. 1334-1384. doi: https://doi.org/10.1002/mana.201000017

8. Mogilevskii, V. (2015). Spectral and pseudospectral functions of Hamiltonian systems: development of the results by Arov-Dym and Sakhnovich. Methods Funct. Anal. Topol., 21, No. 4, pp. 70-402.
9. Kac, I. S. (2002). Linear relations generated by a canonical differential equation of phase dimension 2 and decomposability in eigenfunctions. Algebra i Analiz, 14, No. 3, pp. 86-120 (in Russian).
10. Atkinson, F. V. (1964). Discrete and continuous boundary problems. New York; London: Academic Press.
11. Kac, I. S. & Krein, M. G. (1968). On the spectral functions of the string. Supplement 2 to the Russian translation of F.V. Atkinson. Discrete and continuous boundary problems (pp. 648-737). Moscow: Mir (in Russian).
12. Bennewits, C. (1989). Spectral asymptotics for Sturm-Liouville equations. Proc. London Math. Soc., s3-59, Iss. 2, pp. 294-338. doi: https://doi.org/10.1112/plms/s3-59.2.294
13. Arov, D. Z. & Dym, H. (2012). Bitangential direct and inverse problems for systems of integral and differential equations. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Vol. 145. Cambridge: Cambridge Univ. Press.
14. Arens, R. (1961). Operational calculus of linear relations. Pac. J. Math., 11, No. 1, pp. 9-23. doi: https://doi.org/10.2140/pjm.1961.11.9
15. Strelnikov, D. (2017). Boundary triples for integral systems on finite intervals. Ukr. Math. Bull., 14, No. 3, pp. 418-439.

Received 07.03.2018

Д.И. Стрельников

Донецкий национальный университет им. Васыля Стуса, Винница
E-mail: d.strelnikov@donnu.edu.ua

ГРАНИЧНЫЕ ТРОЙКИ ДЛЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ СИСТЕМ

Для интегральной системы, содержащей в качестве частных случаев уравнение Штурма—Лиувилля, струну Стилтьеса и струну Крейна—Феллера, исследованы максимальное и минимальное линейные отношения в ассоциированном гильбертовом пространстве. Для максимального линейного отношения построены граничные тройки и соответствующие функции Вейля как в случае предельного круга, так и в случае предельной точки.

Ключевые слова: *интегральная система, граничная тройка, симметрическое линейное отношение, индексы дефекта, функция Вейля.*

D.I. Strelnikov

Vasyl' Stus Donetsk National University, Vinnitsya
E-mail: d.strelnikov@donnu.edu.ua

BOUNDARY TRIPLES FOR INTEGRAL SYSTEMS

An integral system that contains the Sturm—Liouville equation, Stieltjes string, and Krein—Feller string as special cases is considered. The maximal and minimal linear relations associated with the system are studied in a connected Hilbert space. Boundary triples and corresponding Weyl functions for the maximal linear relation are constructed in both limit circle and limit point cases.

Keywords: *integral system, boundary triple, symmetric linear relation, deficiency indices, Weyl function.*