doi: https://doi.org/10.15407/dopovidi2018.06.049
УДК 531

Н.В.Никитина
Институт механики им. С.П.Тимошенко НАН Украины, Киев
E-mail: center@inmech.kiev.ua

О движениях в малой окрестности нуля многомерной системы

Представлено академиком НАН Украины А.А. Мартынюком

Приведен качественный анализ особых точек многомерных систем. В трехмерных системах (базовые модели), образующих аттракторы, особые точки в нуле могут быть седлоузловыми, либо седлофокусными. В связке двух осцилляторов (Дуффинга и Ван-дер-Поля) сумма характеристических показателей в особой точке при синхронизации равна нулю.

Ключевые слова: *нелинейная многомерная система, бифуркация.*

Постановка задачи. Рассмотрим устойчивость особой точки в нуле трехмерных нелинейных систем уравнений. Из этого класса систем возьмем примеры (базовые модели процессов). Уравнения в квадратичных функциях записываем дважды: в нуле и малой окрестности нуля. При второй записи уравнений (рассматривается малая окрестность нуля) применяем неравенства. Предварительная устойчивость (неустойчивость) влияет на знак неравенства, в силу которого строятся уточняющие уравнения. Для обох случав уравнения в квадратичных функциях совпадают. Применение двух видов анализа “вспомогательного” и “уточняющего” приводит к одним и тем же уравнениям и заключениям о качестве особой точки и малой области.Объяснение этого явления связано с элементами теории сравнения. Предлагаемый качественный анализ трехмерных систем содержит элемент, который имеет определенную связь с методом сравнения. Область в окрестности нуля остается малой и сохраняет определенное качество. В рамках этого представления рассмотрим три примера. Для ознакомления с критериями устойчивости (неустойчивости) отсылаем к обзору, который дает современное состояние результатов по данному вопросу [1].

Ключевым утверждением метода сравнения является следующее: если для исследуемой системы существует функция Ляпунова, удовлетворяющая подходящим условиям, тогда различные динамические свойства исходной системы следуют из соответствующих динамических свойств системы сравнения [1].

Необходимость установления неустойчивости возмущенной системы связана с изучением, например, проблемы существования аттракторов. Базовые модели неоднократно анализировались в случае существования аттракторов [2, 3]. Элеметарная технология доказательств существования регулярных аттракторов может быть такой: устанавливается неустойчивость решения в окрестности нуля и при помощи подходящего принципа симметрии (кососимметрии) и устанавливается замыкание траектории [4].

Один из примеров относится к рассмотрению малой окрестности нуля двух связанных осцилляторов (осциллятор Ван-дер-Поля и осциллятор Дуффинга). Малая окрестность нуля при определенных значениях параметров (например, все параметры равны единице) способствует синхронизации двух осцилляторов, так как в окрестности нуля два осциллятора имеют близкую топологию пространства. Анализ значений параметров в виде неравенств, приведенных в статье, указывает на возможность возникновения неустойчивости орбит осцилляторов, образующих в этом случае хаотический аттрактор.

Качественное определение особых точек в нуле трехмерных систем. Рассмотрим систему Рёсслера, которая возникла в динамике химических реакций, протекающих в некоторой среде с перемешиванием [5]. Она описывается безразмерной системой

$$\frac{dx}{dt}=-y-z,\quad \frac{dy}{dt}=x+ay,\quad \frac{dz}{dt}=b-cz+xz, \tag{1}$$

где a, b, c — положительные величины. Координаты особых точек системы (1) находим из уравнения

$$az^2-cz+b=0. \tag{2}$$

Примем в процессе исследования следующие значения параметров:

$$a=0{,}2;\quad b=0{,}2;\quad c=2.$$

Рассмотрим ближайшую к нулю особую точку $A(x=az_a, y=-z_a, z=z_a)$, где $z_a=c/(2a)-\sqrt{(c/2a)^2-b/a}=0{,}2$. Вторая особая точка $B(x=az_b,\ y=-z_b,\ z=z_b)$, где $z_b=c/(2a)+\sqrt{(c/2a)^2-b/a}$. Свяжем с точкой A систему координат $A\xi\eta\chi$, где $\xi=x-az_a$, $\eta=y+z_a$, $\chi=z-z_a$. Система (1) в новых координатах примет вид

$$\frac{d\xi}{dt}=-\eta-\chi,\quad \frac{d\eta}{dt}=\xi+a\eta,\quad \frac{d\chi}{dt}=z_a\xi-\frac{b}{z_a}\chi+\xi\chi. \tag{3}$$

Здесь принято во внимание (на основе уравнения (2)), что $-b/z_a=-c+az_a$.

Введем квадратичные функции

$$V_1=\xi^2/2,\quad V_2=\eta^2/2,\quad V_3=\chi^2/2. \tag{4}$$

Запишем уравнения (3), принимая во внимание квадратичные функции

$$\frac{d(\xi^2/2)}{dt}=-\xi\eta-\xi\chi,\quad \frac{d(\eta^2/2)}{dt}=\eta\xi+a\eta^2,\quad \frac{d(\chi^2/2)}{dt}=z_a\chi\xi-\frac{b}{z_a}\chi^2+\xi\chi^2.$$

Примем следующие допущения. Рассматривается малая окрестность нуля для первого уравнения системы (3). Малые отклонения от нуля

$$|\xi|=|\eta|<<1,\quad |\xi|=|\chi|<<1,$$

имеют такие оценки

$$(\xi-\eta)^2 \geqslant 0, \quad (\xi-\chi)^2 \geqslant 0. \tag{5}$$

При рассматрении особой точки допускаем,что

$$(\xi-\eta)^2 = 0, \quad (\xi-\chi)^2 = 0. \tag{6}$$

Тогда при выполнении условия (5) рассматривается малая окрестность нуля. Принятие условий (6) включает в рассмотрение особую точку — нуль.

Первое уравнение системы (3). С учетом допущения (6) оно имеет вид

$$\frac{(d\xi^2/2)}{dt} = -\xi^2 - \eta^2/2 - \chi^2/2.$$

В переменных (4) первое уравнение примет вид

$$\frac{dV_1}{dt} = -2V_1 - V_2 - V_3. \tag{7}$$

Принимаем оценки (5) , тогда в малой окрестности нуля системы (3) имеют место неравенства $(\xi-\eta)^2 \geqslant 0$, $(\xi-\chi)^2 \geqslant 0$, либо $-\xi\eta \geqslant -\xi^2/2 - \eta^2/2;\quad \xi\chi \geqslant -\xi^2/2 - \chi^2/2$. Первое уравнение имеет также вид (7) (для малой области введем переменные Y_j):

$$\frac{dY_1}{dt} = -2Y_1 - Y_2 - Y_3. \tag{8}$$

Неравенства, которые употреблялись при построении уравнения (8) “уменьшали” слагаемые со знаком минус, которые соответствовали устойчивости. Рассматривая нуль и малую окрестность нуля, замечаем, что результаты “предварительного” (в нуле) и “уточненного” (в окрестности) анализов для первого уравнения системы (3) совпадают.

Второе уравнение системы (3). Рассматривается малая окрестность нуля второго уравнения системы (3):

$$|\xi| = |\eta| << 1. \tag{9}$$

Пусть оценка $(\xi-\eta)^2 \geqslant 0$ при условии (9) допускает для особой точки принять $(\xi-\eta)^2 = 0$. Запишем второе уравнение в виде

$$\frac{d\eta^2/2}{dt} = \xi^2 + (1+2a)\eta^2/2. \tag{10}$$

В переменных (4) уравнение (10) примет вид

$$\frac{dV_2}{dt} = 2V_1 + (1+2a)V_2. \tag{11}$$

Примем оценку $(\xi-\eta)^2 \geqslant 0$, либо $\xi\eta \geqslant \xi^2/2 + \eta^2/2$. Тогда второе уравнение системы (3) запишется в виде уравнения (11):

$$\frac{dY_2}{dt} = 2Y_1 + (1+2a)Y_2. \tag{12}$$

Неравенства, которые употреблялись при построении уравнения (12) уменьшали неустойчивость. Результаты предварительного и уточненного анализов для второго уравнения системы (3) совпадают.

Третье уравнение системы (3). Рассматривается нуль и малая окрестность нуля третьего уравнения системы (3). Принимаем $(\xi-\chi)^2=0$; $(\xi-\chi^2)^2=0$. Третье уравнение в нуле имеет вид

$$\frac{d(\chi^2/2)}{dt}=-(b/z_a-z_a/2)\chi^2+(z_a/2+1/2)\xi^2+\chi^4/2.$$

В переменных (4) уравнение примет вид

$$\frac{dV_3}{dt}=-(2b/z_a-z_a)V_3+(z_a+1)V_1+2V_3. \tag{13}$$

Введем точные оценки $(\xi-\chi)^2\geqslant 0$; $(\xi-\chi^2)^2\geqslant 0$. Тогда $\xi\chi\geqslant\xi^2+\chi^2$, $\xi\chi^2\geqslant\xi^2+\chi^4$. Третье уравнение для окрестности нуля запишется в виде (13):

$$\frac{dY_3}{dt}=-(2b/z_a-z_a)Y_3+(z_a+1)Y_1+2Y_3^2. \tag{14}$$

Результаты предварительного и уточненного анализа для третьего уравнения системы (3) совпадают. При построении уравнения (14) применялись неравенства, которые уменьшали устойчивость уравнения (13).

На плоскости $\xi\eta$ квадратичная функция $Y_{\xi\eta}=Y_1+Y_2$ имеет производную (согласно уравнений (8), (12))

$$\frac{dY_{\xi\eta}}{dt}=(z_a+1)Y_1+2aY_2>0. \tag{15}$$

Ось χ связана с производной

$$\frac{dY_\chi}{dt}=-Y_3-(2b/z_a-z_a)Y_3+2Y_3^2<0. \tag{16}$$

Уравнения (15), (16) показывают, что особая точка $A(0,0,0)$ может быть седлофокусом, либо седлоузлом.

Рассмотрим математическую модель генератора электромагнитных колебаний с квадратичной нелинейностью, приведенную в [5]

$$\frac{dx}{dt}=mx-xz+y,\quad \frac{dy}{dt}=-x,\quad \frac{dz}{dt}=-b(z-x^2), \tag{17}$$

где $m=1$; $b=0,2$. Введем квадратичные функции

$$V_1=x^2/2,\quad V_2=y^2/\,2,\quad V_3=z^2/2.$$

Уравнения (17) примут следующий вид:

$$\frac{d(x^2/2)}{dt}=mx^2-x^2z+xy,\quad \frac{d(y^2/2)}{dt}=-xy,\quad \frac{d(z^2/2}{dt}=-b(z^2-xz^2). \tag{18}$$

Здесь также рассмотрим динамику каждого уравнения из системы (18) в нуле и малой окрестности нуля. В предварительном анализе в нуле замена произведения переменных производится на основе равенства $-x^2z = -(x^2)^2/2 - z^2/2$, тогда первое уравнение системы (18) имеет вид

$$\frac{d(x^2/2)}{dt} = (2m+1)x^2/2 + y^2/2 - z^2/2 - x^4/2,$$

либо

$$\frac{dV_1}{dt} = (2m+1)V_1 + V_2 - V_3 - 2V_1^2$$

Рассмотрим неравенство $(x^2+z)^2 \geqslant 0$. На основе неравенства $-x^2z \geqslant -x^2/2 - z^2/2$ первое уравнение системы (18) имеет вид

$$\frac{dY_1}{dt} = (2m+1)Y_1 + Y_2 - Y_3 - 2Y_1^2. \qquad (19)$$

Результаты предварительного и уточненного анализов для первого уравнения системы (18) совпадают. В уточненном анализе в малой окрестности нуля во втором уравнении системы (18) замена произведения переменных производится на основе неравенства $-xy \geqslant -x^2/2 - y^2/2$. Второе уравнение записываем так:

$$\frac{dY_2}{dt} = -Y_1 - Y_2.$$

Третье уравнение приобретает вид

$$\frac{dY_3}{dt} = -2bY_3 + bY_1 + 2bY_3^2.$$

Особая точка системы (18) в нуле $(0,0,0)$ и в малой окрестности нуля удовлетворяет таким условиям: на плоскости yz

$$\frac{dY}{dt} = -(1-b)Y_1 - 2bY_3 + 2bY_2Y_3 < 0, \qquad (20)$$

где $Y = Y_2 + Y_3$;
по оси x

$$\frac{dY_1}{dt} = (2m+b)Y_1 + (-1-2b)Y_3 > 0. \qquad (21)$$

В малой окрестности нуля имеет место область малого радиуса. Уравнения (20), (21) показывают, что особая точка $(0,0,0)$ может быть седлофокусом, либо седлоузлом.

В системе (17) имеется разделение корней в характеристическом уравнении соответствующем линейной системе (17). Характеристическое уравнение

$$(\lambda+b)(\lambda^2 - m\lambda - 1) = 0$$

имеет корни

$$\lambda_1 = -b, \quad \lambda_{2,3} = m/2 \pm \sqrt{(m/2)^2 - 1}.$$

Рассмотрим математическую модель генератора электромагнитных колебаний Чуа [7, 8]:

$$\frac{dx}{dt} = \alpha(ax - bx^3 + y), \quad \frac{dy}{dt} = x - y + z, \quad \frac{dz}{dt} = -by. \tag{22}$$

Параметры системы имеют следующие значения: $(a, b, \alpha, \beta) = (1/6, 1/6, 6, 7)$. Введем квадратичные функции

$$V_1 = x^2/2, \quad V_2 = y^2/2, \quad V_3 = z^2/2.$$

В квадратичных функциях уравнения (22) записываем в виде

$$\frac{d(x^2/2)}{dt} = \alpha(ax^2 - bx^4 + xy), \quad \frac{d(y^2/2)}{dt} = xy - y^2 + yz, \quad \frac{d(z^2/2)}{dt} = -byz. \tag{23}$$

Для анализа особой точки в нуле примем равенства

$$xy = x^2/2 + y^2/2, \quad yz = x^2/2 + z^2/2, \quad -yz = -x^2/2 - z^2/2. \tag{24}$$

При включении малой окрестности нуля потребуются следующие неравенства:

$$xy \leqslant x^2/2 + y^2/2, \quad yz \leqslant x^2/2 + z^2/2, \quad -yz \geqslant -x^2/2 - z^2/2. \tag{25}$$

Запишем уравнения (23) применяя равенства (24)

$$\frac{dV_1}{dt} = \alpha(2aV_1 - 4bV_1^2 + V_1 + V_2), \quad \frac{dV_2}{dt} = V_1 + V_3, \quad \frac{dV_3}{dt} = -b(V_2 + V_3), \tag{26}$$

Запишем уравнения (23) применяя неравенства (25). Уравнения (23)сохраняют вид уравнений (26):

$$\frac{dY_1}{dt} = \alpha(2aY_1 - 4bY_1^2 + Y_1 + Y_2), \quad \frac{dY_2}{dt} = Y_1 + Y_3, \quad \frac{dY_3}{dt} = -b(Y_2 + Y_3).$$

Особая точка в системе (23) в нуле и малой окрестности нуля удовлетворяет условию

$$\frac{dY}{dt} = (\alpha a + 2)Y_1 + (1-b)Y_2 + (1-b)Y_3 > 0, \tag{27}$$

где $Y = Y_1 + Y_2 + Y_3$. Условие (27) показывает неустойчивость траектории в нуле и малой окрестности нуля.

Предварительный и уточняющий анализы показывают, что качественный анализ проводится в области точных оценок особой точки, поэтому качественные результаты двух случаев совпадают. Качество особой точки соответствует особой точке и распространяется на малую окрестность.

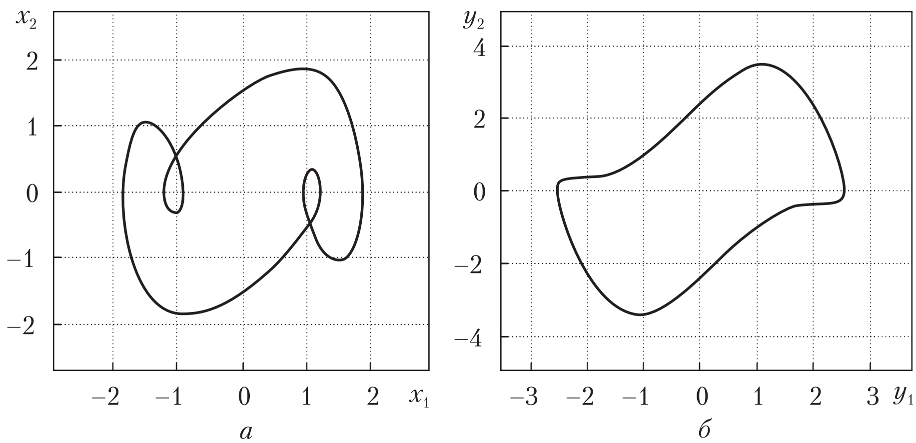

Рис. 1

Применение двух видов анализа вспомогательного и уточняющего приводит к одним и тем же уравнениям и заключениям о качестве области. Объяснение этого явления связано с элементами теории сравнения. Область в окрестности нуля меняет (в рамках теории сравнения) свои размеры, оставаясь малой и сохраняя определенное качество.

О синхронизации связанных осцилляторов. Рассмотрим четырехмерную систему: комбинацию осцилляторов Дуффинга и Ван-дер-Поля. Осциллятор Ван-дер-Поля подробно анализировался весьма многими авторами (с большой величиной параметра μ в [8]):

$$\ddot{x}+b\dot{x}+ax^3+cy=0;\quad \ddot{y}-\mu(1-y^2)\dot{y}-fx=0, \tag{28}$$

где a, b — параметры осцилляторов; c, f — управляющие патаметры. В этом примере установим условия, достаточные для синхронизации связанных осцилляторов. Замыкание траектории системы Ван-дер-Поля происходит согласно принципу кососимметрии [8]. Осциллятор Дуффинга в несвязанном состоянии образует устойчивую особую точку в нуле. Особые точки в нуле и поведение траектории в окрестности нуля обоих осцилляторов связаны с проблемой синхронизации осцилляторов. Представим систему (28) в виде системы уравнений первого порядка

$$\frac{dx_1}{dt}=x_2,\quad \frac{dx_2}{dt}=-bx_2-ax_1^3-cy_1, \tag{29}$$

$$\frac{dy_1}{dt}=y_2,\quad \frac{dy_2}{dt}=\mu(1-y_1^2)y_2-fx_1. \tag{30}$$

Рассмотрим характеристическое уравнение системы (29), (30):

$$\lambda^4+\lambda^3(b-\mu)-\lambda^2 b\mu+cf=0.$$

Примем значения всех параметров системы (29), (30) равным единице $(a, b, \mu, f, c)=$ $=(1, 1, 1, 1, 1)$. Тогда осуществляется синхронизация: осциллятор Дуффинга образует предельный цикл (заметим,что синхронизация может осуществляться и при других значениях параметров). При указанных значениях параметров особая точка связанной системы имеет

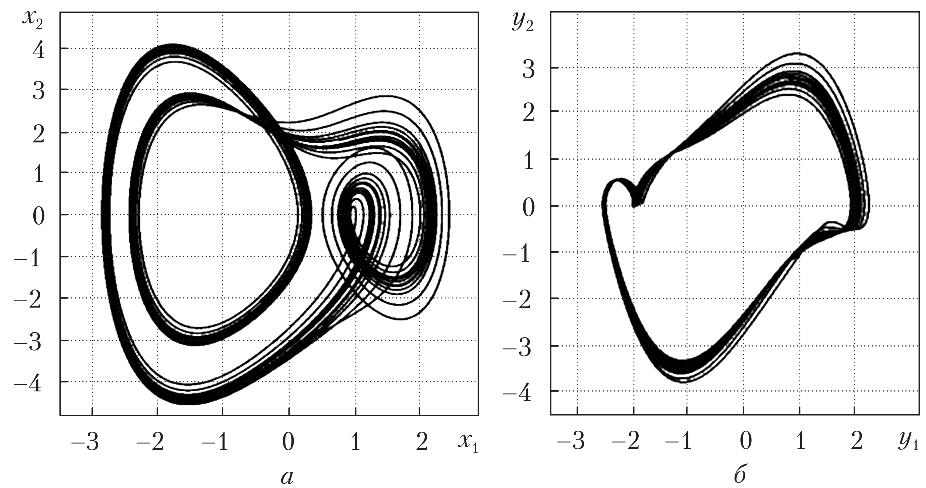

Рис. 2

сумму характеристических показателей, равную нулю. В окрестности нуля четырехмерной системы поведение систем (29), (30) будет близким. На рис. 1 представлены портреты на координатных плоскостях. Траектория Дуффинга (рис. 1, *а*) показывает удвоение периода. При синхронизации скорость передвижения изображающей точки по траектории в системе осциллятора Дуффинга замедлена из-за топологической структуры поля, которая прослеживается по уравнению в вариациях. Система саморегулируется тем, что делает “короткие” обороты, чтобы осуществлять синхронизацию по периоду. Если уменьшить параметр b и увеличить параметр c, который связан с величиной периода осциллятора Ван-дер-Поля, то поиск регулярных движений может привести к хаосу

$$b < \mu; \quad c > 1. \tag{31}$$

Система осцилляторов теряет возможность к полной синхронизации, возникает взаимная неустойчивость орбит осцилляторов. Осциллятор Ван-дер-Поля порождает совместно с осциллятором Дуффинга странный аттрактор. На рис. 2 приведены портреты на координатных плоскостях (параметры $(a, b, \mu, f, c) = (1; 0{,}3; 1; 1; 2)$).

Таким образом, рассматривались движения в окрестности нуля двух видов базовых моделей систем: трехмерные системы и связка двух осцилляторов. Оценки решений в малой окрестности нуля (в виде равенств и неравенств) позволяют показать неустойчивость, которую могут развивать седлофокусные, либо седлоузловые решения в особой точке и малой окрестности нуля. При анализе связки двух осцилляторов условие (31) порождает хаос.

Приведенное приложение к трехмерным примерам и связанным двум осцилляторам является лишь демонстрацией подхода. Однако для систем размерностью более трёх данный подход может быть более конструктивным.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Martynyuk A.A. Asymptotic stability criterion for nonlinear monotonic systems and its applications (Review). *Int. Appl. Mech.* 2011. **47**, № 5. P. 475—534.
2. Martynyuk A.A., Nikitina N.V. Bifurkation and Synchronization of Two Coupled Generators. *Int. Appl. Mech.* 2017. **53**, № 2. P. 209—219.

3. Nikitina N.V. Analysis of Mechanism of Stabilitu Loss and Orbit in Mathematical Models of Three-dimensional Systems. *Int. Appl. Mech*. 2017. **53**, № 6. P. 716—720.
4. Никитина Н.В. Принцип симметрии в трехмерных системах. *Доп. Нац. акад. наук Укр*. 2017. № 7. С. 21—28.
5. Анищенко В.С. Сложные колебания в простых системах. Москва:Наука, 1990. 312 с.
6. Shilnikov L.P., Shilnikov A.L., Turaev D.V., Chua L.O. Methods of Qualitative Theory in Nonlinear Dynamics. Part I. Singapore: World Sci. 1998. 416 p.
7. Shilnikov L.P., Shilnikov A.L., Turaev D.V., Chua L.O. Methods of Qualitative Theory in Nonlinear Dynamics. Part II. Singapore: World Sci. 2001. 592 p.
8. Никитина Н.В. Нелинейные системы со сложным и хаотическим поведением траекторий. Киев: Феникс, 2012. 235 с.

Поступило в редакцию 14.11.2017

REFERENCES

1. Martynyuk, A. A. (2011). Asymptotic stability criterion for nonlinear monotonic systems and its applications (Review). Int.Appl.Mech., 47, No. 5, pp. 475-534.
2. Martynyuk, A. A. & Nikitina, N. V. (2017). Bifurcation and Synchronization of Two Coupled Generators. Int. Appl. Mech., 53, No. 2, pp. 209-219.
3. Nikitina, N. V. (2017). Analysis of Mechanism of Stabilitu Loss and Orbit in Mathematical Models of Tree-dimensional Systems. Int. Appl. Mech., 53, No. 6, pp. 716-720.
4. Nikitina, N. V. (2017). Principle of Symmetry in Three-Dimensional Systems. Dopov. Nac. acad. nauk Ukr., No. 7, pp. 21-28 (in Russian).
5. Anishchenko, V. S. (1990). Complex Oschillations in Simple Systems. Moscow: Nauka (in Russian).
6. Shilnikov, L. P., Shilnikov, A. L., Turaev, D. V. & Chua, L. O. (1998). Methods of Qualitative Theory in Nonlinear Dynamics. Part I. Singapore: World Scientific.
7. Shilnikov, L. P., Shilnikov, A. L., Turaev, D. V. & Chua, L. O. (2001). Methods of Qualitative Theory in Nonlinear Dynamics. Part II. Singapore: World Scientific.
8. Nikitina, N. V. (2012). Nonlinear systems with complex and chaotic behavior of trajectories. Kiev: Phenix (in Russian).

Received 14.11.2017

Н.В. Нікітіна

Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, Київ
E-mail: center@inmech.kiev.ua

ПРО РУХИ В МАЛІЙ ОКОЛИЦІ НУЛЯ
БАГАТОВИМІРНОЇ СИСТЕМИ

Наведено якісний аналіз особливих точок багатовимірних систем. У тривимірних системах (базові моделі), що утворюють атрактори, особливі точки в нулі можуть бути сідловузловими, або сідлофокусними. У зв'язці двох осциляторів (Дуффінга і Ван-дер-Поля) сума характеристичних показників в особливій точці при синхронізації дорівнює нулю.

Ключові слова: *нелінійна багатовимірна система, біфуркація.*

N.V. Nikitina

S. P. Timoshenko Institute of the NAS of Ukraine, Kiev
E-mail: center@inmech.kiev.ua

ON MOTIONS IN A SMALL NEIGHBORHOOD
OF ZERO OF A MULTIDIMENSIONAL SYSTEM

The qualitative analysis of singular points of multidimensional systems is given. In three-dimensional systems (base models) that form attractors, the special points at zero can be saddle-headed or septofocus. In the bundle of two oscillators (Duffing and Van der Pol), the sum of characteristic indices at a singular point with synchronization is zero.

Keywords: *nonlinear multidimensional system, bifurcation.*