ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

doi: https://doi.org/10.15407/dopovidi2018.06.003
УДК 517.956.4

В.М. Лось

НТУ України "Київський політехнічний інститут ім. Ігоря Сікорського"
E-mail: v_los@yahoo.com

$2b$-анізотропні простори Хермандера в циліндричних областях

Представлено членом-кореспондентом НАН України А.Н. Кочубеєм

Вводиться клас 2b-анізотропних гільбертових просторів Хермандера в циліндричній області. Ці простори отримуються інтерполяцією з функціональним параметром пар анізотропних просторів Соболєва. Отримано нову умову неперервності розподілів з введених просторів разом з узагальненими частинними похідними до певного порядку.

Ключові слова: *2b-анізотропний простір Хермандера, циліндрична область, інтерполяція з функціональним параметром.*

У 1963 р. Л. Хермандер [1, п. 2.2] запропонував широке і змістовне узагальнення просторів Соболєва в категорії гільбертових просторів. Це простори $H^{\mu} := \mathcal{B}_{2,\mu}$. Для них показником регулярності розподілів служить вагова функція μ, залежна від кількох дуальних змінних. Це дає змогу характеризувати регулярність належних цим просторам розподілів більш тонко, ніж це можливо в межах просторів Соболєва. Л. Хермандер дав застосування введених ним просторів до диференціальних рівнянь з частинними похідними. Втім до 2000-х років простори Хермандера не знаходили застосувань у теорії крайових задач для диференціальних рівнянь, заданих в обмежених областях. Це пов'язано з принциповою трудністю — простори Хермандера, задані в обмеженій області, не мають внутрішнього опису, на відміну від просторів Соболєва.

У 2005 р. В. А. Михайлець і О. О. Мурач виділили клас ізотропних просторів Хермандера, які отримуються інтерполяцією з функціональним параметром пар відповідних просторів Соболєва, і побудували теорію загальних еліптичних диференціальних операторів і еліптичних крайових задач у цих просторах Хермандера [2].

Метою цієї роботи є знаходження широкого класу анізотропних гільбертових просторів Хермандера в циліндрі, які отримуються інтерполяцією з функціональним параметром пар анізотропних просторів Соболєва та можуть бути застосовані в теорії $2b$-параболічних диференціальних рівнянь. У [3—7] було введено окремі випадки таких просторів та застосовано їх до дослідження параболічних мішаних задач. Відзначимо, що $2b$-анізотропні простори Хермандера на бічній поверхні циліндра було введено у [8].

Простори Хермандера. Основні результати. Показником регулярності функцій (або розподілів), що утворюють простір $H^{\mu}(\mathbb{R}^k)$, де ціле $k \geqslant 1$, є довільна вимірна за Борелем функція $\mu : \mathbb{R}^k \to (0, \infty)$, яка задовольняє таку умову: існують додатні числа $c > 0$ і $l > 0$ такі, що

$$\mu(\xi)/\mu(\eta) \leqslant c(1+|\xi-\eta|)^l \quad \text{для довільних } \xi, \eta \in \mathbb{R}^k. \tag{1}$$

За означенням, комплексний лінійний простір $H^{\mu}(\mathbb{R}^k)$ складається з усіх повільно зростаючих розподілів $w \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^k)$, перетворення Фур'є $\hat{w}$ яких є локально інтегровними за Лебегом функціями, що задовольняють умову

$$\int\limits_{\mathbb{R}^k} \mu^2(\xi)\,|\hat{w}(\xi)|^2\, d\xi < \infty.$$

У роботі всі функції та розподіли вважаються комплекснозначними.

У просторі $H^{\mu}(\mathbb{R}^k)$ означений скалярний добуток за формулою

$$(w_1, w_2)_{H^{\mu}(\mathbb{R}^k)} = \int\limits_{\mathbb{R}^k} \mu^2(\xi)\,\hat{w}_1(\xi)\,\overline{\hat{w}_2(\xi)}\, d\xi,$$

де $w_1, w_2 \in H^{\mu}(\mathbb{R}^k)$. Цей скалярний добуток породжує норму

$$\|w\|^2_{H^{\mu}(\mathbb{R}^k)} := (w, w)^{1/2}_{H^{\mu}(\mathbb{R}^k)}.$$

Згідно з [1, п. 2.2], простір $H^{\mu}(\mathbb{R}^k)$ є гільбертовим і сепарабельним відносно введеного у ньому скалярного добутку. Крім того, цей простір є неперервно вкладеним у лінійний топологічний простір $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^k)$ повільно зростаючих розподілів, заданих на $\mathbb{R}^k$, і множина $C_0^{\infty}(\mathbb{R}^k)$ основних функцій, заданих на $\mathbb{R}^k$, є щільною у $H^{\mu}(\mathbb{R}^k)$. Будемо вважати, що функціональний параметр μ є показником регулярності для простору $H^{\mu}(\mathbb{R}^k)$ та його версій $H^{\mu}(\cdot)$.

Версія простору $H^{\mu}(\mathbb{R}^k)$ для довільної непорожньої відкритої множини $V \subset \mathbb{R}^k$ вводиться у стандартний спосіб. А саме:

$$H^{\mu}(V) := \{w\,|_V : w \in H^{\mu}(\mathbb{R}^k)\},$$

$$\|u\|_{H^{\mu}(V)} := \inf\{\|w\|_{H^{\mu}(\mathbb{R}^k)} : w \in H^{\mu}(\mathbb{R}^k), \quad u = w\,|_V\}, \tag{2}$$

де $u \in H^{\mu}(V)$. Тут, як звичайно, $w\,|_V$ означає звуження розподілу $w \in H^{\mu}(\mathbb{R}^k)$ на відкриту множину V. Іншими словами, $H^{\mu}(V)$ є фактор-простором простору $H^{\mu}(\mathbb{R}^k)$ за його підпростором

$$H^{\mu}_Q(\mathbb{R}^k) := \{w \in H^{\mu}(\mathbb{R}^k) : \operatorname{supp} w \subseteq Q\} \quad \text{з} \quad Q := \mathbb{R}^k \setminus V. \tag{3}$$

Тому простір $H^{\mu}(V)$ є гільбертовим і сепарабельним. Норма (2) породжена скалярним добутком

$$(u_1, u_2)_{H^{\mu}(V)} := (w_1 - \Upsilon w_1, w_2 - \Upsilon w_2)_{H^{\mu}(\mathbb{R}^k)},$$

де $w_j \in H^{\mu}(\mathbb{R}^k)$, $w_j = u_j$ у V для кожного $j \in \{1, 2\}$. Тут Υ є ортогональним проектором простору $H^{\mu}(\mathbb{R}^k)$ на його підпростір (3). Простори $H^{\mu}(V)$ і $H^{\mu}_{Q}(\mathbb{R}^k)$ було введено та досліджено Л.Р. Волєвичем і Б.П. Панеяхом [9, гл. 3].

З точки зору застосувань в теорії параболічних крайових задач доцільно вибрати такий клас показників μ, щоб простори Хермандера H^{μ} мали такі властивості:

а) більш тонко характеризується регулярність розподілу, належного простору H^{μ}, ніж це можна робити в межах шкал просторів Соболєва;

б) ці простори отримуються інтерполяцією з функціональним параметром пар гільбертових анізотропних просторів Соболєва.

Пункт б означає можливість побудови в таких просторах теорії розв'язності параболічних крайових задач на основі методу інтерполяції з функціональним параметром пар гільбертових просторів. З пункту а випливає, наприклад, що в класі цих просторів можна отримати більш тонкі достатні умови класичності узагальнених розв'язків параболічних задач, ніж це можливо в шкалі просторів Соболєва.

Нехай ціле $k \geqslant 2$ і дійсне $\gamma > 0$. Відзначимо, що простори, які введемо нижче, в теорії $2b$-параболічних крайових задач використовуються лише у випадку $\gamma = 1/(2b)$ з цілим $b \geqslant 1$; число $2b$ є параболічною вагою задачі. Але природно їх ввести для довільного $\gamma > 0$. Отже, введемо простори Хермандера $H^{\mu}(\cdot)$ з показником регулярності μ, що має вигляд

$$\mu(\xi', \xi_k) := (1 + |\xi'|^2 + |\xi_k|^{2\gamma})^{s/2} \varphi((1 + |\xi'|^2 + |\xi_k|^{2\gamma})^{1/2}), \tag{4}$$

де $\xi' \in \mathbb{R}^{k-1}$ та $\xi_k \in \mathbb{R}$ є аргументами функції μ. Тут числовий параметр s є дійсним, а функціональний параметр φ пробігає клас $\mathcal{M}$. Зазначимо, що функція μ вигляду (4) задовольняє умову Хермандера (1) (див. [5, додаток]).

За означенням, клас $\mathcal{M}$ складається з усіх вимірних за Борелем функцій $\varphi : [1, \infty) \to (0, \infty)$, які задовольняють такі дві умови:

а) обидві функції φ та $1/\varphi$ обмежені на кожному відрізку $[1, c]$, де $1 < c < \infty$;

б) функція φ повільно змінюється за Й. Карамата на нескінченності, а саме:

$$\lim_{r \to +\infty} \frac{\varphi(\lambda r)}{\varphi(r)} = 1 \text{ для кожного } \lambda > 0.$$

Теорія повільно змінних функцій (на нескінченності) викладена, наприклад, у [10]. Їх важливим прикладом є функції вигляду

$$\varphi(r) := (\ln r)^{q_1} (\ln \ln r)^{q_2} \ldots (\underbrace{\ln \ldots \ln r}_{k \text{ разів}})^{q_k} \quad \text{при} \quad r >> 1,$$

де параметри $k \in \mathbb{N}$ та $q_1, q_2, \ldots, q_k \in \mathbb{R}$ є довільними.

Нехай $s \in \mathbb{R}$ і $\varphi \in \mathcal{M}$. Покладемо $H^{s, s\gamma; \varphi}(\mathbb{R}^k) := H^{\mu}(\mathbb{R}^k)$, де показник регулярності μ має вигляд (4). У важливому окремому випадку $\varphi(r) \equiv 1$ простір $H^{s, s\gamma; \varphi}(\mathbb{R}^k)$ стає анізотропним гільбертовим простором Соболєва $H^{s, s\gamma}(\mathbb{R}^k)$ порядку $(s, s\gamma)$.

У випадку $\gamma = 1/(2b)$ будемо казати, що простір $H^{s, s\gamma; \varphi}(\mathbb{R}^k)$ є $2b$-анізотропний простір Хермандера на $\mathbb{R}^k$.

Нехай довільно задані ціле число $n \geqslant 2$, дійсне число $\tau > 0$ і обмежена область $G \subset \mathbb{R}^n$ з нескінченно гладкою межею ∂G. Позначимо $\Omega := G \times (0, \tau)$ — відкритий циліндр в $\mathbb{R}^{n+1}$. Тоді $\overline{\Omega} := \overline{G} \times [0, \tau]$ є замикання Ω.

Означимо анізотропні простори Хермандера в циліндрі Ω.

Означення. *Нехай $s \in \mathbb{R}$, $\gamma > 0$ і $\varphi \in \mathcal{M}$. Позначимо через $H^{s, s\gamma; \varphi}(\Omega)$ гільбертів функціональний простір Хермандера $H^{\mu}(\Omega)$ з показником μ, визначеним формулою (4), у якій $k := n+1$.*

Якщо $\varphi \equiv 1$, то означені вище простори стають соболєвськими. У цьому випадку будемо опускати індекс φ у позначеннях цих просторів.

Перейдемо до формулювання основних результатів роботи.

Теорема 1. *Нехай $s \in \mathbb{R}$, $\gamma > 0$ і $\varphi \in \mathcal{M}$. Такі твердження є правильні:*

(i) *Множина*

$$C^{\infty}(\overline{\Omega}) := \{w \,|\, \overline{\Omega} : w \in C_0^{\infty}(R^{n+1})\}.$$

є щільною в просторі $H^{s, s\gamma; \varphi}(\Omega)$.

(ii) *Для довільних $s_1 > s$ і $\varphi_1 \in \mathcal{M}$ правильне неперервне та щільне вкладення*

$$H^{s_1, s_1\gamma; \varphi_1}(\Omega) \subset H^{s, s\gamma; \varphi}(\Omega).$$

Введені простори Хермандера $H^{s, s\gamma; \varphi}(\cdot)$ мають важливу інтерполяційну властивість — кожний такий простір Хермандера можна отримати інтерполяцією з підходящим функціональним параметром пар гільбертових просторів Соболєва.

Інтерполяцію з функціональним параметром пар гільбертових просторів систематично викладено у монографії [2, п. 1.1] (див. також [11, п. 2]).

Нехай

$$s, s_0, s_1, \gamma \in \mathbb{R}, \quad s_0 < s < s_1, \quad \gamma > 0 \ \text{ і } \ \varphi \in \mathcal{M}. \tag{5}$$

Розглянемо функцію

$$\psi(r) = \begin{cases} r^{(s-s_0)/(s_1-s_0)} \varphi(r^{1/(s_1-s_0)}) & \text{для} \quad r \geqslant 1, \\ \varphi(1) & \text{для} \quad 0 < r < 1. \end{cases} \tag{6}$$

Ця функція є інтерполяційним параметром [2, теорема 1.11], оскільки вона є правильно змінною функцією на нескінченності порядку $\theta := (s - s_0) / (s_1 - s_0)$ з $0 < \theta < 1$.

Теорема 2. *Нехай числа $0 \leqslant s_0 < s < s_1$, $\gamma > 0$, функція $\varphi \in \mathcal{M}$, а ψ — інтерполяційний параметр, заданий формулою* (6). *Тоді правильна така інтерполяційна формула:*

$$H^{s, s\gamma; \varphi}(\Omega) = [H^{s_0, s_0\gamma}(\Omega), H^{s_1, s_1\gamma}(\Omega)]_{\psi} \tag{7}$$

з точністю до еквівалентності норм.

Тут права частина рівності є результатом інтерполяції вказаної пари гільбертових просторів з функціональним параметром ψ.

Нижченаведена теорема буде корисною при дослідженні узагальнених розв'язків (разом з узагальненими частинними похідними до заданого порядку) $2b$-параболічних задач на неперервність. Далі використовуємо такі позначення: $D_x^{\alpha} := D_1^{\alpha_1} \ldots D_n^{\alpha_n}$, де $D_k := i\partial/\partial x_k$ і

$\partial_t^\beta := \partial^\beta / \partial t^\beta$ для частинних похідних функцій, що залежать від $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ і $t \in \mathbb{R}$. Тут i — уявна одиниця; $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — мультиіндекс; $|\alpha| := \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$; числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ і β є цілими невід'ємними.

Теорема 3. *Нехай* $p \in \mathbb{Z}$, $p \geqslant 0$, $b \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$. *Нехай* $u \in H^{\sigma, \sigma/(2b); \varphi}(\Omega)$ *для* $\sigma := p + b + n/2$ *і такої* $\varphi \in \mathcal{M}$, *що задовольняє інтегральну умову*

$$\int_1^\infty \frac{dr}{r\varphi^2(r)} < \infty. \tag{8}$$

Тоді

$$D_x^\alpha \partial_t^\beta u(x,t) \in C(\overline{\Omega}) \text{ при } |\alpha| + 2b\beta \leqslant p. \tag{9}$$

Навпаки, якщо виконується (9) *для всіх* $u \in H^{\sigma, \sigma/(2b); \varphi}(\Omega)$, *то правильно* (8).

Відзначимо, що у випадку просторів Соболєва (9) правильно для всіх $u \in H^{\sigma, \sigma/(2b)}(\Omega)$ тоді і тільки тоді, коли $\sigma > p + b + n/2$.

Обгрунтування результатів. Твердження (i) теореми 1 безпосередньо випливає з означення $H^{s, s\gamma; \varphi}(\Omega)$ та щільності $C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ у $H^{s, s\gamma; \varphi}(\mathbb{R}^{n+1})$. Твердження (ii) міститься у теоремі 7.4 з [9].

Формула (7) виводиться з її аналогу для просторів на $\mathbb{R}^{n+1}$ (див. [5, лема 7.1]) за схемою доведення формули (56) з [5].

Теорема 3 випливає з означення простору $H^{s, s\gamma; \varphi}(\Omega)$ та леми 8.1 з [5].

ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Хермандер Л. Линейные дифференциальные операторы с частными производными. Москва: Мир, 1965. 380 с.
2. Mikhailets V.A., Murach A.A. Hörmander spaces, interpolation, and elliptic problems. Berlin: De Gruyter, 2014. xiv+297 p.
3. Los V., Murach A.A. Parabolic problems and interpolation with a function parameter. *Methods Funct. Anal. Topol.* 2013. **19**, № 2. P. 146—160.
4. Los V. M. Mixed problems for the two-dimensional heat-conduction equation in anisotropic Hörmander spaces. *Ukr. Math. J.* 2015. **67**, № 5. P. 735—747. doi: https://doi.org/10.1007/s11253-015-1111-3
5. Los V., Mikhailets V.A., Murach A.A. An isomorphism theorem for parabolic problems in Hörmander spaces and its applications. *Commun. Pur. Appl. Anal.* 2017. **16**, № 1. P. 69—97. doi: https://doi.org/10.3934/cpaa.2017003
6. Los V., Murach A. Isomorphism theorems for some parabolic initial-boundary value problems in Hörmander spaces. *Open Mathematics.* 2017. **15**. P. 57—76. doi: https://doi.org/10.1515/math-2017-0008
7. Лось В.Н., Мурач А.А. Параболические смешанные задачи в пространствах обобщенной гладкости. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2014. № 6. С. 23—31. doi: https://doi.org/10.15407/dopovidi2014.06.023
8. Los V. M. Anisotropic Hörmander spaces on the lateral surface of a cylinder. *J. Math. Sci.* 2016. **217**, № 4. P. 456—467. doi: https://doi.org/10.1007/s10958-016-2985-9
9. Волевич Л.Р., Панеях Б.П. Некоторые пространства обобщенных функций и теоремы вложения. *Успехи мат. наук.* 1965. **20**, № 1. С. 3—74.
10. Сенета Е. Правильно меняющиеся функции. Москва: Наука, 1985. 144 с.
11. Mikhailets V.A., Murach A.A. Interpolation with a function parameter and refined scale of spaces. *Methods Funct. Anal. Topol.* 2008. **14**, № 1. P. 81—100.

Надійшло до редакції 05.04.2018

REFERENCES

1. Hörmander, L. (1963). Linear partial differential operators. Berlin: Springer.
2. Mikhailets, V. A. & Murach, A. A. (2014). Hörmander spaces, interpolation, and elliptic problems. Berlin: De Gruyter.
3. Los, V. & Murach, A. A. (2013). Parabolic problems and interpolation with a function parameter. Methods Funct. Anal. Topol., 19, No. 2, pp. 146-160.
4. Los, V. M. (2015). Mixed problems for the two-dimensional heat-conduction equation in anisotropic Hörmander spaces. Ukr. Math. J., 67, No. 5, pp. 735-747. doi: https://doi.org/10.1007/s11253-015-1111-3
5. Los, V., Mikhailets, V. A. & Murach, A. A. (2017). An isomorphism theorem for parabolic problems in Hörmander spaces and its applications. Commun. Pur. Appl. Anal., 16, No. 1. pp. 69-97. doi: https:// doi.org/10.3934/cpaa.2017003
6. Los, V. & Murach, A. (2017). Isomorphism theorems for some parabolic initial-boundary value problems in Hörmander spaces. Open Mathematics, 15, pp. 57-76. doi: https://doi.org/10.1515/math-2017-0008
7. Los, V. M. & Murach, A. A. (2014). Parabolic mixed problems in spaces of generalized smoothness. Dopov. Nac. akad. nauk. Ukr., No. 6, pp. 23-31 (in Russian). doi: https://doi.org/10.15407/dopovidi2014.06.023
8. Los, V. M. (2016). Anisotropic Hörmander spaces on the lateral surface of a cylinder. J. Math. Sci., 217, No. 4. pp. 456-467. doi: https://doi.org/10.1007/s10958-016-2985-9
9. Volevich, L. R. & Paneah, B. P. (1965). Certain spaces of generalized functions and embedding theorems. Russ. Math. Surv., 20, No. 1. pp. 1-73. doi: https://doi.org/10.1070/RM1965v020n01ABEH004139
10. Seneta, E. (1976). Regularly varying functions. Lecture notes in mathematics, vol. 508. Berlin: Springer.
11. Mikhailets, V. A. & Murach, A. A. (2008). Interpolation with a function parameter and refined scale of spaces. Methods Funct. Anal. Topol., 14, No. 1, pp. 81-100.

Received 05.04.2018

В.Н. Лось

НТУ Украины “Киевский политехнический институт им. Игоря Сикорского”
E-mail: v_los@yahoo.com

2*b*-АНИЗОТРОПНЫЕ ПРОСТРАНСТВА ХЕРМАНДЕРА В ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБЛАСТЯХ

Вводится класс 2*b*-анизотропных гильбертовых пространств Хермандера в цилиндрической области. Эти пространства получаются интерполяцией с функциональным параметром пар анизотропных пространств Соболева. Получено новое условие непрерывности распределений из введенных просторанств вместе с обобщенными частными производными до некоторого порядка.

Ключевые слова: 2*b-анизотропное пространство Хермандера, цилиндрическая область, интерполяция с функциональным параметром.*

V.M. Los

NTU of Ukraine “Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute”
E-mail: v_los@yahoo.com

2*b*-ANISOTROPIC HÖRMANDER SPACES IN CYLINDRICAL DOMAINS

We introduce a class of 2*b*-anisotropic inner product Hörmander spaces in a cylindrical domain. These spaces are obtained by the interpolation with a function parameter between anisotropic Sobolev spaces. A new condition for the continuity of distributions from the introduced spaces together with generalized partial derivatives up to some order is obtained.

Keywords: 2*b-anisotropic Hörmander space, cylindrical domain, interpolation with a function parameter.*