

doi: <https://doi.org/10.15407/dopovidi2018.05.022>

УДК 539.3 : 534.1

**В.Т. Грінченко, Н.С. Городецька**

Інститут гідромеханіки НАН України, Київ

E-mail: [nsgihm@gmail.com](mailto:nsgihm@gmail.com)

## Про особливості спектра власних частот пружних тіл

*Представлено академіком НАН України В.Т. Грінченко*

*Проведено аналіз особливостей резонансу на неоднорідних хвилях при симетричних коливаннях півшару з вільними бічними поверхнями і вільним торцем. На частоті крайового резонансу перша нормальна хвиля, що поширюється, утворена суперпозицією SV-хвилі, що поширюється, і неоднорідної P-хвилі. Якісно крайовий резонанс пояснюється особливостями відбиття пружних хвиль від вільної межі. Показано, що частота крайового резонансу і його добротність суттєво залежать від коефіцієнта Пуассона*

**Ключові слова:** *крайовий резонанс, неоднорідні хвилі, пружний хвилевід.*

Якісне уявлення про коливальні (хвильові) процеси різної фізичної природи сформувалися на основі аналізу даних, які було отримано з використанням доволі простих математичних моделей таких процесів. Зокрема, аналіз закономірностей коливань струн, акустичних та електромагнітних резонаторів став основою для такого загального висновку — збільшення геометричних розмірів області, в якій реалізується хвильовий процес, призводить до зменшення значень власних частот.

Оскільки в процесі формування власних форм коливань визначальну роль відіграють процеси відбиття хвиль від границь області, то фізичне тлумачення резонансних властивостей спектра власних частот досить просте — відбиття хвиль від перешкоди відбувається відповідно до закону Снелліуса [1] і для геометричних характеристик власних форм характерна певна співмірність з довжиною хвилі. У випадку електромагнітних хвиль можлива зміна поляризації, але швидкість поширення збурень залишається незмінною.

Для ідеально пружних деформівних тіл ситуація значно інша. У таких тілах (навіть ізотропних) існує два типа хвильових рухів — поздовжні та поперечні хвилі, що поширюються з різними швидкостями. Більш важливим є той факт, що при відбитті таких хвиль від межі пружного тіла спостерігається феномен трансформації енергії одного типу руху в інший. При цьому в певних випадках можливе повне перетворення одного типу в другий. [1]. Як наслідок, в процесі поширення пружних хвиль виникають фізичні явища, що не мають аналогів для акустичних або електромагнітних хвиль. Серед них можна вказати на такі явища

© В.Т. Грінченко, Н.С. Городецька, 2018

як існування поверхневих хвиль — хвиля Релея [2], наявність в пружних хвилеводах хвиль з протилежними знаками фазової та групової швидкостей [1] та інші. Особливу увагу, з моменту його експериментального відкриття в 1956 р. [3], викликає явище крайового резонансу. Крайовий резонанс при аналізі вимушених коливань круглої пластини виникав в результаті збудження специфічної власної форми коливань. Характерною особливістю форми була локалізація інтенсивних коливань поблизу зовнішнього краю пластинки. Причому відповідна власна частота в експерименті практично не залежала від радіуса пластинки. З моменту відкриття крайового резонансу до сьогодні, вже понад 50 років, опубліковано велику кількість робіт, які присвячені визначенню кількісних характеристик цього явища, як на основі експериментальних даних [3], так і при аналізі чисельно-аналітичних розв'язків відповідних граничних задач динаміки обмеженого пружного тіла [4–6]. Отже, можна з впевненістю стверджувати, що таке явище дійсно існує в пружних тілах. Характерна частота крайового резонансу суттєво залежить від механічних характеристик пружного середовища. При детальному аналізі спектра власних частот встановлено ще одну особливість хвильових процесів в пружних тілах — для круглої пластини власна частота крайового резонансу навіть дещо зростає зі збільшенням радіуса пластини. Таку ж властивість було знайдено і для інших форм коливань, власні частоти яких близькі до частоти товщинного резонансу пластини [1].

Значна кількість публікацій стосовно крайового резонансу містить відповідь на питання про його частотні характеристики та характеристики форми коливань, але не дає відповіді на питання — чому це явище виникає в пружних тілах, які механізми формування особливих форм коливань пружних тіл. Пошуки відповіді на це питання є основною метою якісного аналізу хвильових процесів в пружних тілах. Слід сказати, що на сьогодні ми не маємо повної відповіді на це питання, але для певного діапазону змін механічних характеристик пружного тіла вдається прослідкувати зв'язок між особливостями процесу відбиття пружних хвиль від вільної межі і явищем крайового резонансу.

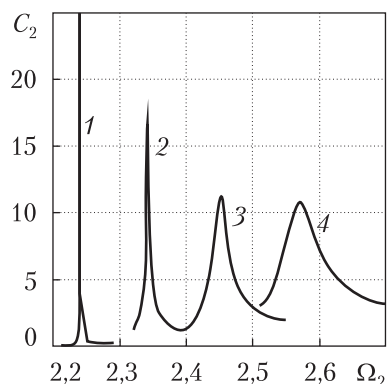
Для ілюстрації сутності такого зв'язку розглянемо модельну задачу про характеристики гармонічного хвильового поля з частотою  $\omega$  із заданими механічними характеристиками: коефіцієнтом Пуассона —  $\nu$ , густиною  $\rho$  та модулем зсуву  $\mu$ . Геометрична конфігурація півшару в безрозмірних координатах з півтовщиною  $H$  шару, як масштабу, описується нерівностями.  $y = \leq \pm 1, z \geq 0, -\infty < x < +\infty$  (випадок плоскої деформації див. далі). Оскільки в даному випадку слід враховувати умови випромінювання, часова залежність характеристик хвиль виражається множителем  $e^{-i\omega t}$ .

Хвильове поле у півшару збуджується першою нормальною хвилею, що приходить з нескінченності. Поверхні  $y = \leq \pm 1, z \geq 0$  і торець хвилеводу  $z = 0$  вільні від напружень. Хвильове поле  $\vec{u}(y, z)$  для векторного рівняння Ламе

$$\mu \Delta \vec{u} (\lambda + \mu) \text{grad div } \vec{u} = \rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} \quad (1)$$

має задовольняти наступні граничні умови:

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}(y, 0) + \sigma_{zz}^{(0)}(y, 0) = 0, \quad \tau_{zy}(y, 0) + \tau_{zz}^{(0)}(y, 0) = 0 \quad |y| \leq 1, \\ \sigma_{zz}(\pm 1, z) = 0, \quad \tau_{zy}(\pm 1, z) = 0, \quad z \geq 0. \end{aligned} \quad (2)$$



**Рис. 1.** Частотна залежність модуля амплітуди першої неоднорідної хвилі для різних значень коефіцієнта Пуассона ( $\nu$ ): 1 – 0,24; 2 – 0,32; 3 – 0,4; 4 – 0,48

Додатково до граничних умов (2) повинні виконуватися умови випромінювання на нескінченності, які полягають в тому, що кожна поширювана нормальна хвиля у відбитому полі має переносити енергію від торця на нескінченність.

Для розв'язання поставленої граничної задачі в даній роботі застосовувався метод суперпозиції. Розглядається симетричне відносно площини  $y = 0$  поле. Вирази для вектора переміщень у відбитому від вільного торця поля, а також відповідні цим переміщенням напруження в рамках методу суперпозиції наведені в [4].

Виконання граничних умов (2) приводить до системи інтегро-алгебраїчних рівнянь. Редукція системи рівнянь виконувалась з урахуванням асимптотичної поведінки невідомих. Після розв'язання граничної задачі результати представляються у вигляді нескінченної суми нормальних хвиль, які можуть існувати на частоті падаючої хвилі. Таким чином хвильове поле має вигляд

$$\bar{u}(y, z) = C_0 \bar{u}(y, \xi_1) e^{-i\xi_0 z} + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \bar{u}(y, \xi_k) e^{i\xi_k z}. \quad (3)$$

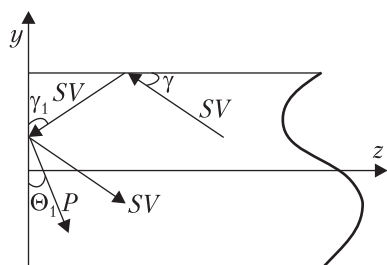
Для даного частотного діапазону в цьому виразі біжучій хвилі відповідає перший доданок. Всі інші доданки відповідають неоднорідним хвилям, амплітуди яких експоненціально спадають при відході від торця.

Величина  $\xi_k$  є коренем дисперсійного рівняння

$$\Delta(\xi, \omega) = (2\xi^2 - \Omega_2^2)^2 \alpha_1 \text{cth} \alpha_1 - 4\xi^2 \alpha_1^2 \alpha_2 \text{cth} \alpha_2 = 0. \quad (4)$$

Тут  $\alpha_i = \sqrt{\xi^2 - \Omega_i^2}$ ,  $\Omega_i = \omega H / c_i$ ;  $c_i$  – швидкість поздовжніх ( $i = 1$ ) і поперечних ( $i = 2$ ) хвиль.

Зупинимося на аналізі деяких кількісних результатів. Відзначимо характерні особливості резонансу на неоднорідних хвилях при симетричних коливаннях. Амплітуда коливань на резонансній частоті обмежена за рахунок радіаційного демпфування. Неоднорідні хвилі і хвиля, що поширюється у відбитому полі, пов'язані граничними умовами.

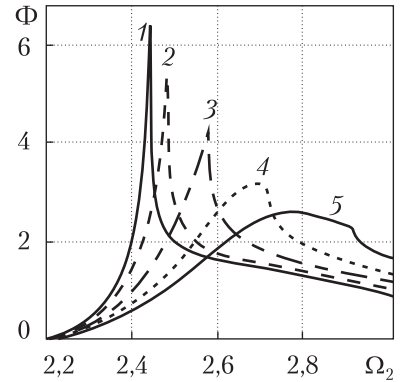


**Рис. 2.** Відбиття SV-хвилі від бічної поверхні та від вільного торця

Характерною особливістю крайового резонансу при симетричних коливаннях є те, що амплітуди всіх неоднорідних хвиль досягають своїх максимальних значень при однаковому значенні частоти. При цьому із збільшенням номера неоднорідної хвилі її амплітуда зменшується. Основний вклад у формування крайової моди вносить перша неоднорідна хвиля.

Відомо, що частота крайового резонансу залежить від коефіцієнта Пуассона. Емпірична залежність частоти від коефіцієнта Пуассона запропонована в [3] і має вигляд

**Рис. 3.** Частотна залежність модуля амплітуди відбитої від торця  $P$ -хвилі для різних значень коефіцієнта Пуассона ( $\nu$ ): 1 – 0,225; 2 – 0,25; 3 – 0,3; 4 – 0,35; 5 – 0,4



$\Omega_R = (0,652\nu^2 + 0,898\nu + 1,9866)$ . Добротність резонансу також залежить від коефіцієнта Пуассона. На рис. 1 представлена частотна залежність модуля амплітуди першої неоднорідної хвилі для різних значень коефіцієнта Пуассона. Крива 1 відповідає  $\nu = 0,24$ ; 2 –  $\nu = 0,32$ ; 3 –  $\nu = 0,4$ ; 4 –  $\nu = 0,48$ . Як видно з рисунка, добротність резонансу падає із збільшенням значення  $\nu$ .

Для фізичної інтерпретації залежності частоти крайового резонансу та його добротності від  $\nu$  розглянемо особливості формування першої нормальної хвилі, що поширюється, в діапазоні частот до критичної частоти другої хвилі. В загальному випадку в пружному тілі довільної форми хвильове поле може бути представлено сумою поздовжніх ( $P$ ) і поперечних ( $SV$ ) хвиль. Вираз для переміщення нормальної хвилі в пружному шарі з вільними границями має вигляд

$$u_z = -i\xi \left( \alpha_1^2 \alpha_2 \frac{ch\alpha_2 y}{sh\alpha_2} - \frac{\xi^2 + \alpha_2^2}{2} \alpha_1 \frac{ch\alpha_1 y}{sh\alpha_1} \right) e^{-i\xi z},$$

$$u_y = \alpha_1^2 \left( \xi^2 \frac{sh\alpha_2 y}{sh\alpha_2} - \frac{\xi^2 + \alpha_2^2}{2} \frac{sh\alpha_1 y}{sh\alpha_1} \right) e^{-i\xi z}. \quad (5)$$

Перший доданок в компонентах переміщення визначає вклад  $SV$ -хвилі, а другий –  $P$ -хвилі. Для першої нормальної хвилі компонента  $SV$  є такою, що поширюється по товщині шару, а компонента  $P$  – неоднорідною відносно товщинної координати. Саме такий склад має дальнє від торця поле. При падінні  $SV$ -хвилі на вільну поверхню у відбитому полі існують як  $SV$ -хвиля, що поширюються, так і  $P$ -хвиля, яка може бути як неоднорідною, так і такою, що поширюється, в залежності від кута падіння  $\gamma$  (рис.2). Кут падіння  $SV$ -хвилі на границю  $z = 0$  є функцією частоти і коефіцієнта Пуассона, і може бути знайдений наступним чином

$$\cos \gamma_1 = \sqrt{\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}} \sin \sqrt{\frac{\Omega_2^2 - \xi^2}{\Omega_2^2}}.$$

Для коефіцієнтів Пуассона  $0,16 \leq \nu \leq 0,42$  на поверхні  $z = 0$  на певній частоті кут падіння перевищує критичний і з'являється  $P$ -хвиля, що поширюється. Більше того, частоті крайового резонансу відповідають значення кута  $\gamma_1$ , при якому спостерігається повне перетворення біжучої  $SV$ -хвилі в поздовжню біжучу хвилю. При цьому частота, на якій  $P$ -хвиля стає такою, що поширюється, зростає із збільшенням коефіцієнта Пуассона. Водночас в дальньому від торця полі  $P$ -хвиля може бути тільки неоднорідною. Така невідповідність структури ближнього і дальнього полів обумовлює значне збудження неоднорідних хвиль на певній частоті.

Запропонований якісний аналіз значного збудження неоднорідних хвиль на певній частоті підтверджується даними рис.3, на якому представлена частотна залежність модуля амплітуди відбитої від поверхні  $z=0$   $P$ -хвилі для різних значень коефіцієнта Пуассона. Криві 1–5 відповідають значенням  $\nu=0,225, 0,25, 0,3, 0,35, 0,4$ , вони мають типовий резонансний характер. Порівняння даних, наведених на рис.1 і 3, показує, що в обох випадках зі збільшенням коефіцієнта Пуассона збільшується резонансна частота і зменшується добротність резонансу.

Таким чином, в роботі на основі порівняння структури ближнього і дальнього поля в півшару з вільним торцем знайдено якісне пояснення явища крайового резонансу для симетричних коливань. При цьому діапазон зміни коефіцієнтів Пуассона поділено на частини. Зокрема, для  $0,16 \leq \nu \leq 0,42$  у відбитому від торця полі на поверхні  $z=0$  існує  $P$ -хвиля, що поширюється, і значне збудження неоднорідних хвиль зумовлено неузгодженістю структури ближнього і дальнього полів. Для діапазону коефіцієнтів Пуассона  $\nu < 0,16$ ,  $\nu < 0,42$  у відбитому від торця полі на поверхні  $z=0$   $P$ -хвиля залишається неоднорідною в області частот, де поширюється тільки одна нормальна хвиля, і для цього діапазону змін коефіцієнта Пуассона фізична інтерпретація явища крайового резонансу вимагає подальшого дослідження.

Також відзначимо, що незвичайною особливістю власних коливань пружних тіл, пов'язаних із збудженням крайового резонансу, є те, що для них існує таке явище як зростання власної частоти зі збільшенням геометричних розмірів тіла [1]. Більше того, в пружних пластинках така поведінка власних частот може спостерігатися і для інших власних форм з частотами поблизу товщинного резонансу. Аналіз фізичних причин цього явища є актуальною проблемою динаміки пружного тіла.

#### ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Гринченко В.Т., Мелешко В.В. Гармонические колебания и волны в упругих телах Киев: Наук. думка, 1981. 284с.
2. Викторов И.А. Физические основы применения ультразвуковых волн Рэля и Лэмба в технике. Москва: Наука, 1966. 168с.
3. Shaw E.A.G. On the resonant vibration of thin barium titanate disks. *J. Acoust. Soc. Amer.* 1956. **20**, № 1. P. 38–50.
4. Pagneux V. Revisiting the edge resonance for Lamb waves in a semi-infinite plate. *J. Acoust. Soc. Amer.* 2006. **120**, № 2. P. 649–656.
5. Городецкая Н.С. Еще раз о краевом резонансе. *Акуст. вісн.* 2000. **3**, № 4. С. 35–44.
6. Гринченко В.Т., Городецкая Н.С., Мелешко В.В. Резонанс на неоднородных волнах в упругом полуслое. *Акуст. вісн.* 2011. **14**, № 1. С. 20–29.

Надійшло до редакції 22.01.2018

#### REFERENCES

1. Grinchenko, V. T. & Meleshko, V. V. (1981). Harmonic oscillations and waves in elastic bodies. Kiev: Naukova Dumka (in Russian).
2. Viktorov, I. A. (1966). Physical bases of application of ultrasonic waves of Rayleigh and Lamb in engineering. Moscow: Nauka (in Russian).
3. Shaw, E. A. G. (1956). On the resonant vibration of thin barium titanate disks. *J. Acoust. Soc. Amer.*, 20, No. 1, pp. 38-50.

4. Pagneux, V. (2006). Revisiting the edge resonance for Lamb waves in a semi-infinite plate. *J. Acoust. Soc. Amer.*, 120, No. 2, pp. 649-656.
5. Gorodetskaya, N. S. (2001). Once again about the edge resonance. *Akust. Visn.*, 3, No. 4, pp. 35-44 (in Russian).
6. Grinchenko, V. T., Gorodetskaya, N. S. & Meleshko, V. V. (2011). Resonance on inhomogeneous waves in an elastic semi-infinite plate. *Akust. Visn.*, 14, No. 1, pp. 20-29 (in Russian).

Received 22.01.2018

*В.Т. Гринченко, Н.С. Городецкая*

Институт гидромеханики НАН Украины, Киев

E-mail: nsgihm@gmail.com

#### ОБ ОСОБЕННОСТЯХ СПЕКТРА СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ УПРУГИХ ТЕЛ

Проведен анализ особенностей резонанса на неоднородных волнах при симметричных колебаниях полуплоскости со свободными боковыми поверхностями и свободным торцом. На частоте краевого резонанса первая нормальная распространяющаяся волна образована суперпозицией распространяющейся SV-волны и неоднородной P-волны. Качественно краевой резонанс объясняется особенностями отражения упругих волн от свободной границы. Показано, что частота краевого резонанса и его добротность существенно зависят от коэффициента Пуассона.

**Ключевые слова:** краевой резонанс, неоднородные волны, упругий волновод.

*V.T. Grinchenko, N.S. Gorodetska*

Institute of Hydromechanics of the NAS of Ukraine, Kiev

E-mail: nsgihm@gmail.com

#### ON THE SPECIFIC FEATURES OF THE SPECTRUM OF EIGENMODES OF ELASTIC BODIES

An analysis of the characteristics of the resonance on inhomogeneous waves with symmetric vibrations of a semi-infinite plate with free lateral boundary and free end is carried out. At the frequency of the edge resonance, the first propagating normal wave is formed by the superposition of propagating SV-wave and an inhomogeneous P-wave. Qualitatively, the edge resonance is due to the peculiarities of the reflection of elastic waves from the free boundary.

**Keywords:** edge resonance, inhomogeneous waves, elastic waveguide.