ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

doi: https://doi.org/10.15407/dopovidi2018.05.003
УДК 517.58/5892

Н.О. Вірченко, О.В. Овчаренко

НТУ України “Київський політехнічний інститут ім. Ігоря Сікорського”
E-mail: nvirchenko@hotmail.com, lena_rum@ukr.net

Узагальнена функція Струве

Представлено академіком НАН України М.О. Перестюком

Запроваджено нове узагальнення функції Струве, встановлено її зв’язок з спеціальними функціями (виродженою гіпергеометричною функцією, функціями Бесселя), подано приклади застосування до обчислення інтегралів, відсутніх у науковій та довідковій літературі.

Ключові слова: *конфлюентна гіпергеометрична функція, функція Струве.*

Інтерес до спеціальних функцій різної природи та складності за останнє півстоліття різко зріс у зв’язку з широким застосуванням диференціальних та інтегральних рівнянь, теорії інтегральних перетворень, теорії ймовірностей та математичної статистики, теорії кодування, теорії ядерних реакторів, теорії біомедицини, обчислювальної математики та ін. [1—13].

У даній роботі запроваджується нове узагальнення функцій Струве, подано теорему про зв’язок узагальненої функції Струве з виродженою гіпергеометричною функцією ${}_1F_2$, з функціями Бесселя. Подано приклади обчислення інтегралів, які відсутні в науковій та довідковій літературі.

Означення узагальненої функції Струве. Узагальнену функцію Струве $\tilde{H}_\nu(z)$ визначаємо за допомогою інтеграла:

$$\tilde{H}_\nu(z)=\frac{1}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu\int_0^1(1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}}\sin(zt)\,{}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c;-r(zt))\,dt, \tag{1}$$

де $\operatorname{Re}\nu>-\frac{1}{2}$; $\operatorname{Re}c>\operatorname{Re}a>0$; $\tau,\beta\in R, \operatorname{Re}r>0,\ \tau>0,\ \beta>0,\ \tau-\beta>1$; ${}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}$ — r-узагальнена конфлюентна гіпергеометрична функція [13]:

$${}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c;z)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)}\int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}\,{}_1\Psi_1\left[\begin{matrix}(a;\tau);\\(c;\beta);\end{matrix}\,zt^\tau\right]dt, \tag{2}$$

тут ${}_1\Psi_1$ — функція Фокса—Райта [14].

Зауважимо, що за допомогою функції ${}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}$ вже було розглянуто узагальнені Γ-, B-функції, дзета-функцію, функцію Трікомі:

$$ {}_{\tau,\beta}\Gamma_a^c(\alpha,\gamma,\omega,r)=\int_0^{\infty} t^{\alpha-1}e^{-t^{\omega}}\,{}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}\left(a;c;-\frac{r}{t^{\gamma}}\right)dt, \tag{3}$$

$$ {}_{\tau,\beta}\mathrm{B}_a^c(\alpha,\mu;r)=\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\mu-1}\,{}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}\left(a;c;-\frac{r}{t(1-t)}\right)dt, \tag{4}$$

$$ {}^r\zeta(\alpha)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\infty}\frac{t^{\alpha-1}e^{-t}}{1-e^{-t}}\,{}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}\left(a;c;-\frac{r}{t}\right)dt, \tag{5}$$

$$ {}^rU^{\tau,\beta}(a;c;x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\infty} t^{\alpha-1}(1+t)^{c-a-1}e^{-xt}\,{}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}\left(\alpha;\gamma;-\frac{r}{t^{\delta}}\right)dt, \tag{6}$$

де $\mathrm{Re}\,c>\mathrm{Re}\,a>0;\ \tau,\beta\in R,\ \mathrm{Re}\,r>0,\ \tau>0,\ \beta>0,\ \tau-\beta>1;\ \mathrm{Re}\,\alpha>\mathrm{Re}\,\gamma>0,\ \delta>0.$

Функцію $\tilde{H}_\nu(z)$ можна переписати у вигляді:

$$ \tilde{H}_\nu(z)=\frac{1}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(z\cos\varphi)(\sin\varphi)^{2\nu}\,{}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c;-r(z\cos\varphi))\,d\varphi. \tag{7}$$

Переписавши (1) за допомогою контурного інтеграла або виконавши відповідні підстановки, легко отримати інші інтегральні зображення для функції $\tilde{H}_\nu(z)$.

Узагальнену модифіковану функцію Струве подамо у вигляді

$$ \tilde{L}_\nu(z)=-ie^{-\frac{i\nu\pi}{2}}\tilde{H}_\nu\left(ze^{\frac{i\pi}{2}}\right), \tag{8}$$

або

$$ \tilde{L}_\nu(z)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu}\int_0^{\frac{\pi}{2}} sh(z\cos\varphi)(\sin\varphi)^{2\nu}\,{}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c;-z\cos\varphi)\,d\varphi, \tag{9}$$

$\left(\mathrm{Re}\,\nu>-\frac{1}{2}\right).$

Теорема. *При умовах, вказаних у нижчеподаних формулах, узагальнена функція Струве* $\tilde{H}_\nu(z)$ *має відповідний зв'язок з виродженою гіпергеометричною функцією* ${}_1F_2$*, функцією Бесселя* $I_{\nu+1}$*:*

$$ \tilde{H}_\nu(z)=\frac{1}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu}\mathrm{B}\left(\nu+\frac{1}{2},\frac{n}{2}+1\right){}_1F_2\left(\frac{n}{2}+1;\frac{3}{2},\frac{n}{2}+\nu+\frac{3}{2};-\frac{z^2}{4}\right), \tag{10}$$

де $\mathrm{Re}(\nu+\frac{1}{2})>0, \frac{n+1}{2}>-\frac{1}{2}$;

$$\tilde{H}_\nu(z)=I_{\nu+1}(z), \tag{11}$$

при $n=1, z>0, \mathrm{Re}\,\nu>-\frac{1}{2}$.

Доведення базується на формулі (1) та на обчисленні при різних n інтегралів вигляду

$$\int_0^1 t^n(1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}}\sin(zt)\,dt, \tag{12}$$

з урахуванням вигляду функції ${}_1\Phi_1^{\tau,\beta}$ через ряд

$${}_1\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c;(zt))=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a+\tau n)}{\Gamma(c+\beta n)}\frac{1}{n!}z^n t^n. \tag{13}$$

Приклади. За допомогою теореми легко одержати значення інтегралів, пов'язаних з $\tilde{H}_\nu(z)$. Подамо приклади:

$$\int_0^1 t^n I_\nu(zt)\,dt=\frac{1}{z}\tilde{H}_\nu(z),$$

$\mathrm{Re}\,\nu>-1, n=1$ в $\tilde{H}_\nu(z)$;

$$\int_0^1 t^{-\frac{\nu+1}{2}}(1-t)^{\mu-1}\tilde{H}_\nu(z\sqrt{t})\,dt=\frac{2^{1-\nu}z^{-\mu}}{\Gamma(\nu+1)}s_{\mu+\nu,\,\mu-\nu-1}(z),$$

$\mathrm{Re}\,\mu>0, n=1$;

$$\int_0^1 t^{-\nu}(1-t^2)^{\mu}\tilde{H}_\nu(zt)\,dt=\frac{2^{-\nu}z^{-\mu-1}}{\Gamma(\nu+1)}s_{\mu+\nu+1,\,\mu-\nu}(z),$$

$\mathrm{Re}\,\mu>-1$.

ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Andrews G., Askey R., Roy R. Special Functions. New York: Cambridge Univ. Press, 1999. 410 p.
2. Вирченко Н.А., Царенко В.Н. Дробные интегральные преобразования гипергеометрического типа. Киев, 1995. 216 с.
3. Вирченко Н.А. Узагальнені гіпергеометричні функції. Київ: НТУУ «КПІ», 2016. 480 с.
4. Aomoto K. Hypergeometric functions: the past, today and ... (from the complex analytic point of view). *Sugaku Expositions*. 1996. **9**. P. 99—116.
5. Barnard R.W. On application of hypergeometric functions. *J. Comput. Appl. Math*. 1999. **105**, № 1—2. P. 1—8.

6. Barnes E.W. A new development of certain hypergeometric functions. *Proc. London Math. Soc*. 1908. **6**. P.141—177.
7. Chaudhry M.A., Qadir A., Srivastava H.M., Paris R.B. Extended hypergeometric and confluent hypergeometric function. *Appl. Math. Comput*. 2004. **159**. P. 589—602.
8. Galue L. Results involving generalized hypergeometric functions. *Math. Balkanica, New Ser*. 2008. **22**, № 1—2. P. 83—100.
9. Joshi C.M., Vyas Y. Extensions of certain classical integral of Erdelyi for Gauss hypergeometric functions. *J. Comput. Appl. Math*. 2003. **160**. P. 125—138.
10. Qadir A. The generalization of special functions. *Appl. Math. Comput*. 2007. **187**. P. 395—402.
11. Virchenko N.O. On some generalizations of the functions of hypergeometric type. Fract. *Calc. Appl. Anal*. 1999. **2**, № 3. P. 233—244.
12. Virchenko N.O., Kalla S.L., Al-Zamel A. Some results on a generalized hypergeometric function. Integr. Transf. Spec. Funct. 2001. **12**, № 1. P. 89—100.
13. Virchenko N.O. On the r-generalized confluent hypergeometric function. *J. Inequal. Spec. Funct*. 2013. **4**, № 1. P. 47—52.
14. Wright E.M. The asymptotic expansion of the generalized hypergeometric function. *J. London Math. Soc*. 1935. **10**. P. 286—293.
15. Бейтмен Г. Высшие трансцендентные функции. Т. 2. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. Москва: Наука, 1974. 296 с.

Надійшло до редакції 29.01.2018

REFERENCES

1. Andrews, G., Askey, R. & Roy, R. (1999). Special Functions. New York: Cambridge Univ. Press.
2. Virchenko, N. O. & Tsarenko, V. N. (1995). Fractional integral transforms of hypergeometric type. Kiev.
3. Virchenko, N. O. (2016). Generalized hypergeometric functions. Kiev: NTUU «KPI».
4. Aomoto, K. (1996). Hypergeometric functions: the past, today and ... (from the complex analytic point of view). Sugaku Expositions, 9, pp. 99-116.
5. Barnard, R. W. (1999). On application of hypergeometric functions. J. Comput. Appl. Math., 105, No. 1-2, pp. 1-8.
6. Barnes, E. W. (1908). A new development of certain hypergeometric functions. Proc. London Math. Soc., 6, pp.141-177.
7. Chaudhry M.A., Qadir A., Srivastava H.M. & Paris R.B. (2004). Extended hypergeometric and confluent hypergeometric function. Appl. Math. Comput., 159, pp. 589-602.
8. Galue, L. (2008). Results involving generalized hypergeometric functions. Math. Balkanica, New Ser., 22, No. 1-2, pp. 83-100.
9. Joshi, C. M., Vyas, Y. (2003). Extensions of certain classical integral of Erdelyi for Gauss hypergeometric functions. J. Comput. Appl. Math., 160, pp. 125-138.
10. Qadir, A. (2007). The generalization of special functions. Appl. Math. Comput., 187, pp. 395-402.
11. Virchenko, N. O. (1999). On some generalizations of the functions of hypergeometric type. Fract. Calc. Appl. Anal., 2, No. 3, pp. 233-244.
12. Virchenko, N. O., Kalla, S. L. & Al-Zamel, A. (2001). Some results on a generalized hypergeometric function. Integr. Transf. Spec. Funct., 12, No. 1, pp. 89-100.
13. Virchenko, N. O. (2013). On the r-generalized confluent hypergeometric function. J. Inequal. Spec. Funct., 4, No. 1, pp. 47-52.
14. Wright, E. M. (1935). The asymptotic expansion of the generalized hypergeometric function. J. London Math. Soc., 10, pp. 286-293.
15. Bateman, H. (1974). Higher transcendental functions. Vol. 2. Bessel functions, functions of parabolic cylinder, orthogonal polynomials. Moscow: Nauka.

Received 29.01.2018

Н.А. Вирченко, Е.В. Овчаренко

НТУ Украины “Киевский политехнический институт им. Игоря Сикорского”
E-mail: nvirchenko@hotmail.com, lena_rum@ukr.net

ОБОБЩЕННАЯ ФУНКЦИЯ СТРУВЕ

Введено новое обобщение функции Струве, представлена ее связь со специальными функциями (вырожденной гипергеометрической функцией, функциями Бесселя), приведены примеры применения к вычислению интегралов, отсутствующих в научной и справочной литературе.

Ключевые слова: *конфлюэнтная гипергеометрическая функция, функция Струве.*

N.O. Virchenko, O.V. Ovcharenko

NTU of Ukraine “Igor Sikorsky Kiev Polytechnic Institute”
E-mail: nvirchenko@hotmail.com, lena_rum@ukr.net

THE GENERALIZED STRUVE FUNCTION

The new generalization of the Struve function is introduced, its connection with the confluent hypergeometric function ${}_1F_2$ and with the Bessel function $I_{\nu+1}(z)$ is given. The examples of applications of the generalized Struve function are given.

Keywords: *confluent hypergeometric function, Struve function.*