

<https://doi.org/10.15407/dopovidi2025.06.074>

УДК 539.375

О.Л. Кіпніс, <https://orcid.org/0000-0001-6747-8584>

Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, Київ, Україна

E-mail: a.l.kipnis@gmail.com

Локальна втрата стійкості покриття тонкоплівкової системи під дією стиску вздовж міжфазної тріщини за різних умов контакту

Представлена академіком НАН України В.М. Назаренком

У межах тривимірної лінеаризованої теорії стійкості деформівних тіл досліджено вплив послаблення зв'язку між компонентами кусково-однорідного напівобмеженого тіла (тонкоплівкова система, матеріал з покриттям) на значення критичних параметрів втрати стійкості під дією стиску такого тіла вздовж міжфазної тріщини. З цією метою на межі поділу середовищ поза тріщиною розглядаються два типи контакту, які моделюють, відповідно, «найсильніший» та «найслабший» тип зв'язку – жорстке з'єднання та гладке проковзування. Указані критичні параметри визначені в результаті розв'язання задач на власні значення для інтегральних рівнянь Фредгольма першого роду (або їх систем), до яких зводяться вихідні граничні задачі. У випадку достатньо довгих по відношенню до товщини покриття тріщин визначено межі застосовності наближеної формули для критичних деформацій, що відповідають локальній втраті стійкості покриття в області над тріщиною.

Ключові слова: тонка плівка, матеріали з покриттям, міжфазна тріщина, гіперпружний матеріал, критичні деформації.

Вступ. Одним з можливих критеріїв початку руйнування структурно неоднорідних тіл під дією стиску може слугувати локальна втрата стійкості [1–4], яка відбувається в зонах із високими градієнтами напружень, наприклад, поблизу тріщин, країв отворів чи вільних поверхонь.

У випадку матеріалу з тонким покриттям, послабленого міжфазною тріщиною, наявність вільної поверхні призводить до того, що втрата стійкості, яка відбувається, коли деформація сягає свого критичного значення, є результатом взаємодії [5] двох різних “конкуруючих” механізмів нестабільності — зморщування (“wrinkling” [6, 7]) та локальна втрата стійкості (“buckling” [8]).

Ц и т у в а н н я: Кіпніс О.Л. Локальна втрата стійкості покриття тонкоплівкової системи під дією стиску вздовж міжфазної тріщини за різних умов контакту. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2025. № 6. С. 74–84. <https://doi.org/10.15407/dopovidi2025.06.074>

© Видавець ВД «Академперіодика» НАН України, 2025. Стаття опублікована за умовами відкритого доступу за ліцензією CC BY-NC-ND (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>)

Перший з них супроводжується утворенням хвилеподібного візерунка на поверхні тіла і є домінуючим у випадку відносно коротких міжфазних тріщин [5, 6]. В цьому разі вони розглядаються як дефекти межі поділу, які не мають істотного впливу на значення критичної деформації, обрахованої для тіла без дефектів.

У фокусі даної роботи другий з можливих механізмів втрати стійкості під дією стискування матеріалів з покриттям — локальна втрата стійкості (рис. 1), який є домінуючим у випадку достатньо довгих [5, 9] по відношенню до товщини покриття міжфазних тріщин.

Для тонкоплівкових матеріалів, в яких товщина плівки покриття (матеріал “2” на рис. 1) настільки мала у порівнянні з товщиною підкладки (матеріал “1” на рис. 1), що останню можна вважати напівнескінченною, для оцінки відповідних критичних деформацій з певними обмеженнями може бути застосована наближена інженерна формула [8, 10]

$$\epsilon_1^0 = \frac{\pi^2}{12} \beta^2, \quad \beta = \frac{h}{a}, \quad (1)$$

де h — товщини покриття; a — половина довжини тріщини.

Формула (1) одержана з використанням балкового наближення, в рамках якого відшарована частина плівки моделюється балкою із жорстко зацемленими торцями. Істотним додатковим обмеженням, що значно звужує застосовність формули (1), є нехтування деформацією підкладки тонкоплівкової системи, через що компоненти формули не залежать від механічних характеристик тіла. Внаслідок цього оцінку критичної деформації, одержану за формулою (1), варто очікувати достатньо точною лише для матеріалів кусково-однорідного напівобмеженого тіла, жорсткість яких є порівняною. Зауважимо, що застосовність балкових наближень до просторової задачі про стиск однорідного тіла вздовж приповерхневої дископодібної тріщини вивчається, наприклад, в [11].

Випадок, про який йшлося вище, а саме, коли компоненти двошарової структури є близькими за жорсткістю, має, втім, широке прикладне значення.

Так, наприклад, у багатьох біологічних системах у процесі зростання і розвитку може спостерігатися нестійкість поверхні двошарової тканини, спричинена невідповідністю стискаючих напружень в обох шарах [12, 13]. Висока еластичність та низька жорсткість тканин створює запит на сучасні полімерні матеріали з відповідними властивостями у біомедичній галузі [14].

Важливо зазначити, що умови контакту між компонентами тонкоплівкових систем не завжди ідеальні, а накопичення мікродефектів на межі поділу може зумовлювати істотне послаблення зв'язку між ними.

Подібні явища спостерігаються також під час моделювання біомедичних інтерфейсів [15]. Наприклад, у разі контакту між рогівкою та кристаліком [16] або між шкірою та фасцією [17] умови на межі поділу можуть описуватись як проковзування без тертя.

Мета даної роботи — вивчення впливу зміни механічних характеристик тонкоплівкової системи з близькими за жорсткістю компонентами, а також умов між-



Рис. 1. Локальна втрата стійкості тонкої плівки на напівобмеженій підкладці

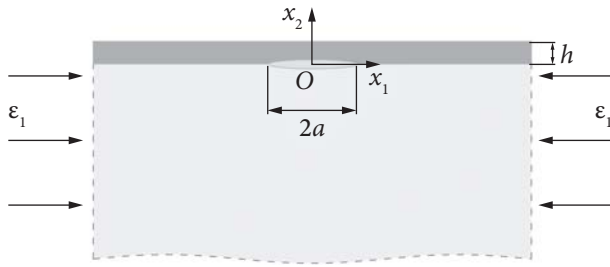


Рис. 2. Система підкладка/плівка за умов стиску вздовж міжфазної тріщини

лінеаризована теорія стійкості деформівних тіл (ТЛТСДТ) [18], основні співвідношення якої одержані шляхом послідовної лінеаризації співвідношень нелінійної теорії пружності. На тепер в межах ТЛТСДТ досліджено широкий клас відповідних плоских і просторових задач для однорідних та кусково-однорідних тіл. Детальну бібліографію з цього питання можна знайти, наприклад, у [19].

Нижче дається строга постановка задачі ТЛТСДТ про стиск кусково-однорідного напівобмеженого тіла вздовж міжфазної тріщини. Вивчаються два типи з'єднання між компонентами тіла в області поза тріщиною: жорстке з'єднання та проковзування без тертя, які за термінологією [4] визначають, відповідно, “найсильніший” та “найслабший” тип зв'язку між складовими тіла. Матеріали тіла вважаються нелінійно-пружними (гіперпружними), що дозволяє застосовувати запропонований підхід до описаного у вступі класу прикладних задач. Дослідження проводяться в межах теорії великих (скінченних) докритичних деформацій ТЛТСДТ [18].

В умовах плоскої деформації розглянемо напівобмежене кусково-однорідне ізотропне тіло, яке складається з двох компонент: напівобмеженої гіперпружної підкладки “1” ($0 \leq x_2 \leq h$) і гіперпружної плівки покриття “2” ($x_2 \leq 0$). Гранична поверхня тіла $x_2 = h$ не навантажена. Прямолинійна межа поділу середовищ $x_2 = 0$ містить відкриту міжфазну невантажену тріщину з довжиною $2a$ (рис. 2).

Нехай на нескінченності компоненти бішару стискаються вздовж осі Ox_1 рівномірно розподіленими навантаженнями

$$\sigma_{11}^{0(i)} = \text{const}, \quad i = 1, 2; \quad \sigma_{11}^{0(1)} \neq \sigma_{11}^{0(2)} \tag{2}$$

таким чином, щоб гарантувати однакові укорочення вздовж осі Ox_1 для обох компонентів: підкладки та плівки

$$\lambda_1^1 = \lambda_1^2 = \lambda_1 = \text{const}, \quad \lambda_1 < 1, \tag{3}$$

де λ_1^1, λ_1^2 — коефіцієнти укорочення підкладки та плівки, що обумовлені стискаючими зусиллями $\sigma_{11}^{0(1)}$ та $\sigma_{11}^{0(2)}$ відповідно.

В (2), (3) і далі верхнім індексом “1” позначені величини, які відповідають матеріалу підкладки, а верхнім індексом “2” — матеріалу плівки покриття “2”. Верхнім індексом “0” позначені величини, що відносяться до докритичного (незбуреного) стану, а збурення цих величин не позначені додатковим індексом.

фазного контакту в області поза тріщиною на значення критичних параметрів втрати стійкості. Вказане дослідження проводиться через призму аналізу застосовності наближеної формули (1).

Задача лінеаризованої теорії стійкості. На протигагу наближеним підходам ефективним апаратом до визначення критичних параметрів втрати стійкості тіл під дією стиску вздовж тріщин є тривимірне

В цьому випадку докритичний напружено-деформований стан у кожній з областей “1” і “2” є статично визначеним, однорідним та визначається виразами для переміщень

$$u_1^{0(i)} = (\lambda_1 - 1)x_1, \quad i = 1, 2. \quad (4)$$

Відносні укорочення, що реалізуються в компонентах бішару визначаються через коефіцієнт укорочення λ_1 :

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_1^1 = \varepsilon_1^2 = 1 - \lambda_1. \quad (5)$$

Граничні умови сформульованої задачі у випадку жорсткого з'єднання компонентів в області поза тріщиною запишуться так:

$$\begin{aligned} t_{22}^{(2)} = 0, \quad t_{21}^{(2)} = 0 \quad (x_2 = h, \quad 0 \leq |x_1| < \infty); \\ t_{22}^{(1)} = t_{22}^{(2)}, \quad t_{21}^{(1)} = t_{21}^{(2)} \quad (x_2 = 0, \quad 0 \leq |x_1| < \infty); \\ t_{21}^{(2)} = 0, \quad t_{22}^{(2)} = 0 \quad (x_2 = 0, \quad |x_1| \leq a); \\ u_1^{(1)} = u_1^{(2)}, \quad u_2^{(1)} = u_2^{(2)} \quad (x_2 = 0, \quad |x_1| > a). \end{aligned} \quad (6)$$

У випадку гладкого проковзування компонентів на межі поділу середовищ поза тріщиною допускається розрив лише дотичного переміщення, в той час, як дотичне напруження обертається в нуль. Граничні умови для цього випадку:

$$\begin{aligned} t_{22}^{(2)} = 0, \quad t_{21}^{(2)} = 0 \quad (x_2 = h, \quad 0 \leq |x_1| < \infty); \\ t_{22}^{(1)} = t_{22}^{(2)}, \quad t_{21}^{(1)} = 0, \quad t_{21}^{(2)} = 0 \quad (x_2 = 0, \quad 0 \leq |x_1| < \infty); \\ t_{22}^{(2)} = 0 \quad (x_2 = 0, \quad |x_1| \leq a); \\ u_2^{(1)} = u_2^{(2)} \quad (x_2 = 0, \quad |x_1| > a). \end{aligned} \quad (7)$$

У (6) та (7) $t_{kl}^{(i)}$, $i, k, l = 1, 2$ є збуреннями компонентів несиметричного тензору напружень Піоли—Кірхгофа \hat{t} .

Ставиться задача — визначити критичні відносні укорочення (5), за яких система підкладка/плівка втрачає стійкість. Інакше кажучи, шукаємо таке перше значення ε_1 (за його зростання починаючи зі значення $\varepsilon_1 = 0$, яке відповідає недеформованому стану), за якого за неперервного збільшення навантаження стиску сформульована однорідна задача має нетривіальний розв'язок. Останнє свідчило б про наявність суміжного рівноважного стану системи рис. 2.

Домовимось надалі називати значення ε_1 критичною деформацією, як це прийнято в літературі, маючи на увазі значення інженерної деформації (*engineering strain*), а не головного значення тензора деформацій Гріна за відповідним напрямком.

Розв'язальні інтегральні рівняння. Подальший хід розв'язання сформульованих задач полягає у поданні їх граничних умов (6) та (7) в термінах потенціальних гармонічних функцій — складових загальних представлень розв'язків лінеаризованих рівнянь рівноваги [20].

Необхідною умовою [4, 18, 20] використання цих представлень окремо в кожній з областей “1”, “2” тіла є забезпечення в них однорідності (4) докритичного напружено-деформованого стану.

Далі, представляючи невідомі гармонічні функції у вигляді інтегралів Фур’є з врахуванням умов затухання напружень і переміщень при $x_2 \rightarrow -\infty$, вихідна гранична задача з умовами (6) (жорстке з’єднання компонентів поза тріщиною) зводиться до системи інтегральних рівнянь Фредгольма першого роду, яка має вигляд [21, 22]

$$\int_0^1 \left[\int_0^\infty P_1(\lambda) \frac{(\cos \lambda \eta - \cos \lambda) \cos \lambda \xi}{\lambda} d\lambda \right] f(\eta) d\eta + \int_0^1 \left[\int_0^\infty P_2(\lambda) \frac{(\cos \lambda \eta - \cos \lambda) \cos \lambda \xi}{\lambda^2} d\lambda \right] g(\eta) d\eta = 0,$$

$$\int_0^1 \left[\int_0^\infty Q_1(\lambda) \frac{(\cos \lambda \eta - \cos \lambda) \cos \lambda \xi}{\lambda^2} d\lambda \right] f(\eta) d\eta + \int_0^1 \left[\int_0^\infty Q_2(\lambda) \frac{(\cos \lambda \eta - \cos \lambda) \cos \lambda \xi}{\lambda^3} d\lambda \right] g(\eta) d\eta - \text{const} = 0, \quad (8)$$

$$0 \leq \xi < 1, \quad 0 \leq \eta \leq 1,$$

та доповнена додатковою умовою [20]

$$\int_0^1 g(\eta)(1 - \eta^2) d\eta = 0. \quad (9)$$

Гранична ж задача з умовами (7) (гладке проковзування компонентів поза тріщиною) зводиться до одного інтегрального рівняння Фредгольма першого роду вигляду [23]

$$\int_0^1 K(\xi, \eta) f(\eta) d\eta = 0, \quad K(\xi, \eta) = \int_0^\infty \frac{\delta_1(n^{-1/2}\beta\lambda)}{\delta(n^{-1/2}\beta\lambda)} \frac{(\cos \lambda \eta - \cos \lambda) \cos \lambda \xi}{\lambda} d\lambda, \quad (10)$$

$$0 \leq \xi < 1, \quad 0 \leq \eta \leq 1.$$

В (8)—(10) f, g — невідомі безрозмірні функції; const — невідома константа, яка пов’язана з додатковою умовою; $P_{1,2}, Q_{1,2}, \delta, \delta_1$ — відомі функції, визначені в [21, 23].

Детально процес одержання розв’язальних інтегральних рівнянь викладено в роботах [21, 23]. В цих же публікаціях аналізуються неперервності ядер інтегральних рівнянь (8), (10) та описується реалізація чисельного дослідження відповідних задач на власні значення відносно невідомого параметра критичної деформації ε_1 методом Бубнова—Гальоркіна [24]. Зауважимо, що параметр ε_1 входить до ядер інтегральних рівнянь складним нелінійним чином.

Аналіз результатів. Дослідимо спочатку питання зменшення критичних напружень і деформацій, що відповідають втраті стійкості системи під дією стиску вздовж міжфазної тріщини у разі послаблення зв’язку між її компонентами.

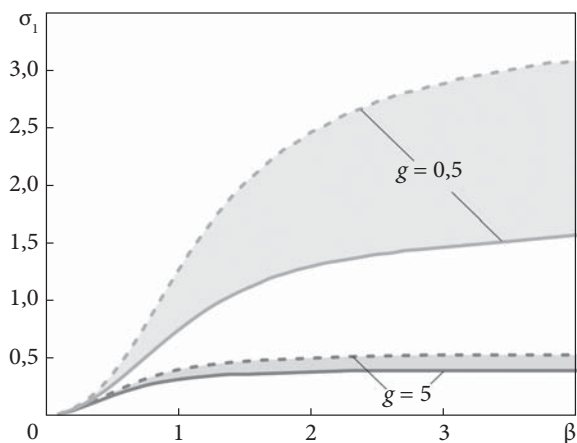


Рис. 3. Залежності $\sigma_1(\beta)$ у випадку потенціалу Бартенева—Хазановича для жорсткого з’єднання і гладкого проковзування поза тріщиною

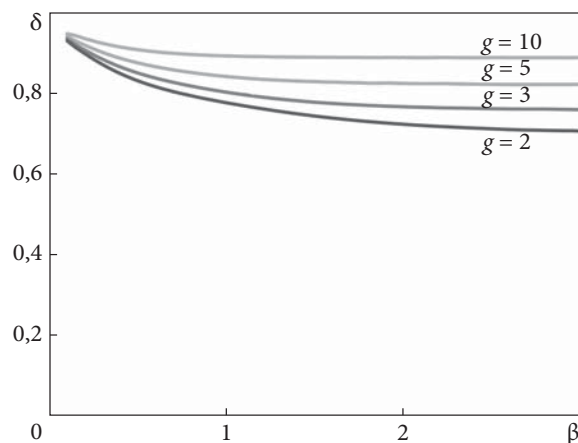


Рис. 4. Залежності $\delta(\beta)$ для потенціалу Бартенева—Хазановича

Аналіз ґрунтується на порівнянні результатів дослідження задачі на власні значення (8), (9) для міжфазної тріщини на межі поділу двох жорстко з’єднаних середовищ з результатами задачі на власні значення (10) для міжфазної тріщини на межі поділу середовищ, що проковзують без тертя.

Для прикладу розглянемо нестисливі тонкоплівкові системи, в яких матеріали підкладки й плівки покриття описуються пружним потенціалом Бартенева—Хазановича [25]. Одноконстантний потенціал Бартенева—Хазановича характеризується однією сталою $\mu_{1,2}$ (для кожного з матеріалів “1”, “2”), яка визначає жорсткість відповідного матеріалу і у разі малих деформацій переходить в модуль жорсткості класичної лінійної теорії пружності.

На графіку, зображеному на рис. 3, представлено залежності безрозмірного критичного напруження стиску $\sigma_1 = -\sigma_{11}^{(0)}/2\mu_1$, що відповідає матеріалу підкладки “1”, від значення геометричного параметра $\beta = h/a$ для двох значень відношення жорсткості матеріалу плівки до жорсткості матеріалу підкладки: $g = \mu_2/\mu_1 = 0,5; 5$. Суцільні криві на рисунках відповідають випадку гладкого проковзування плівки відносно підкладки, а штрихові криві — випадку їх жорсткого з’єднання.

Коли зв’язок між складовими тіла послаблюється лише на окремих ділянках (на цих ділянках утворюються зони проковзування), то критичні значення σ_1 мають бути такими, щоб відповідні точки на графіку рис. 3 потрапляли в затемнені області, розташовані між «верхньою» штриховою та «нижньою» суцільною кривими.

Як видно з графіка, послаблення зв’язку між компонентами кусково-однорідного тіла може зумовити значне зменшення критичного напруження стиску. Наприклад, для тонкоплівкової системи з пружним потенціалом Бартенева—Хазановича, компоненти якої проковзують без тертя, значення σ_1 зменшується на 47 % порівняно з аналогічним значенням для тої ж системи з жорстко з’єднаними компонентами при $g = 0,5$ та $\beta = 2$. При $g = 5$ це зменшення становить вже 24 %.

Збільшення впливу послаблення зв’язку між компонентами тіла на значення критичних параметрів навантаження зі збільшенням геометричного параметра β та зменшенням механічного параметра g демонструється даними графіка на рис. 4.

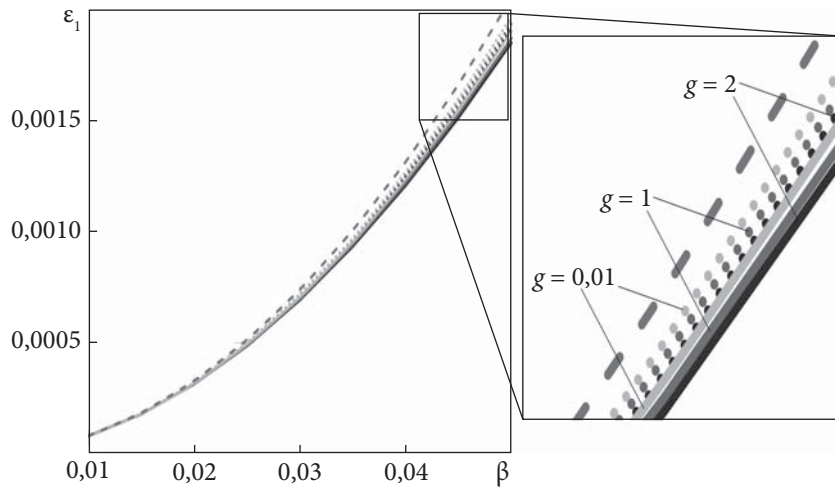


Рис. 5. Залежності $\varepsilon_1(\beta)$ для потенціалу гармонічного типу ($\nu_{1,2} = 0,3$) за різних значень параметра g (суцільні криві та круглі маркери) і залежність $\varepsilon_1^0(\beta)$ (штрихова крива)

На рис. 4 зображено залежності δ — відношення критичної деформації ε_1 у випадку проковзування поза тріщиною до критичної деформації у випадку жорсткого з'єднання вздовж цієї частини інтерфейса — від значення параметра β .

Перейдемо до аналізу застосовності формули (1). Як зазначалося у вступі, слід очікувати, що наближена формула (1) для визначення критичних деформацій, які відповідають локальній нестійкості тонкої плівки покриття в області тріщини, може бути використана за достатньо малих значень g та β .

В роботі [7] було встановлено, що для тонкоплівкових систем без міжфазних дефектів, інженерна формула для визначення критичних деформацій зморщування [5—7] найкраще застосовна до випадку, коли компоненти тіла описуються пружним потенціалом гармонічного типу [26] (серед потенціалів, що розглядалися в роботі). Тож розглянемо тонкоплівкові системи із компонентів з потенціалом гармонічного типу і в рамках даної роботи, аналізуючи застосовність наближеної формули (1).

Двоконстантний пружний потенціал гармонічного типу характеризується двома сталими $\mu_{1,2}$ і $\nu_{1,2}$ (для кожного з матеріалів “1”, “2”), які визначають, відповідно, жорсткість матеріалу та його здатність до стисливості і у випадку малих деформацій переходять в модуль жорсткості й коефіцієнт Пуассона класичної лінійної теорії пружності.

На графіку, зображеному на рис. 5, для відносно довгих міжфазних тріщин (достатньо тонких покриттів) проілюстровано такі залежності $\varepsilon_1(\beta)$ для потенціалу гармонічного типу ($\nu_1 = \nu_2 = 0,3$). Штрихова крива на рис. 5 відповідає формулі «балкового наближення» (1); суцільні криві — результатам дослідження задачі на власні значення (10) (гладке проковзування) за вказаного значення відношення жорсткостей g , а криві з круглих маркерів такого ж тону — задачі (8), (9) (жорстке з'єднання) за того самого значення g .

На рис. 6 для випадку жорсткого з'єднання поза тріщиною подані залежності критичних значень ε_1 (задача (8), (9)), нормованих до значень деформацій ε_1^0 , отриманих на основі формули (1), від значень параметра g (використовується логарифмічна шкала).

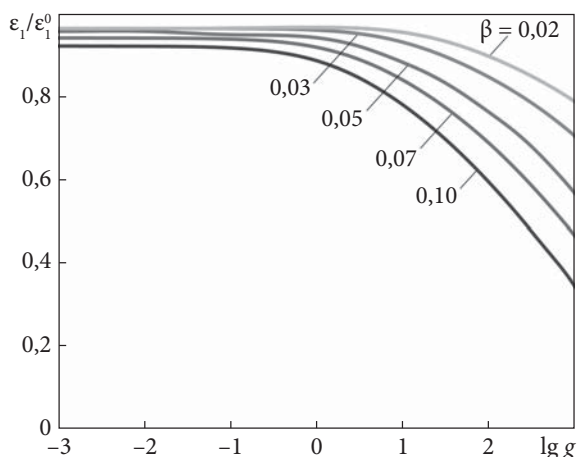


Рис. 6. Залежності $\varepsilon_1 / \varepsilon_1^0$ від значення параметра g для потенціалу гармонічного типу ($\nu_{1,2} = 0,3$) для жорсткого з'єднання

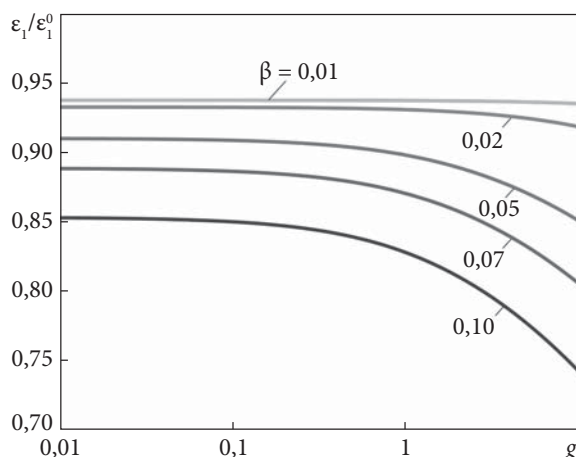


Рис. 7. Залежності $\varepsilon_1 / \varepsilon_1^0$ від значення параметра g для потенціалу гармонічного типу ($\nu_{1,2} = 0,3$) для гладкого проковзування

Розглянуто випадки $\beta = 0,02; 0,03; 0,05; 0,07; 0,1$ ($\nu_1 = \nu_2 = 0,3$). Аналогічні залежності для гладкого проковзування (задача (10)) наведені на рис. 7 (використовується лінійна шкала).

Результати показують, що формула (1) працює тим краще, чим довша тріщина і чим жорсткішою є підкладка по відношенню до плівки покриття. Крім того, коли підкладка істотно жорсткіша за плівку, то критичні значення ε_1 (як і значення ε_1^0) практично не залежать від відношення модулів Юнга, що підтверджується і результатами роботи [8].

Так, наприклад, у випадку жорсткого з'єднання критичні значення ε_1 відрізняються від значень ε_1^0 для розшарування $\beta \leq 0,1$ не більше ніж на 15 %, при всіх $g < 3$. У випадку проковзування без тертя це значення становить 20 %.

Для значень $\beta = h/a < 0,01$ вказана розбіжність між результатами, одержаними з використанням балкового наближення та строгих підходів ТЛТСДТ, становить менше 1 % у випадку жорсткого з'єднання. Такі ж значення для оцінки застосовності наближених формул у випадку стиснення однорідного напівобмеженого тіла вздовж приповерхневої дископодібної тріщини отримані в [11].

Висновки. На практиці доволі типовою є ситуація, коли двошарова система типу підкладка/тонка плівка знаходиться в умовах стиску вздовж межі поділу. У цьому разі актуальною проблемою механіки деформівного твердого тіла є визначення критичних параметрів навантаження, які відповідають втраті стійкості плівки, що може свідчити про початок руйнування такої системи.

Значний прикладний інтерес становить випадок, коли жорсткості матеріалів тонкоплівкової системи є співставними. Тоді навіть за наявності достатньо довгих міжфазних дефектів критичні деформації втрати стійкості можуть виходити за межі застосовності геометрично- та фізично-лінійних моделей.

Натомість напіваналітичний підхід, розвинений в рамках ТЛТСДТ, дозволяє визначати критичні параметри навантаження тонкоплівкових систем, що стискаються вздовж міжфазної тріщини, в межах строгої постановки відповідної граничної задачі. При цьому

матеріали розглядаються як нелінійно-пружні, а структури пружних потенціалів підкладки і плівки покриття — довільними. В представленій роботі вивчалися два типи міжфазного контакту поза тріщиною: жорстке з'єднання та проковзування без тертя.

Показано, що послаблення зв'язку між компонентами тіла в області поза тріщиною може зумовлювати зменшення критичних параметрів навантаження на десятки відсотків, особливо за достатньо малих значень відношення жорсткостей матеріалів тіла і для коротких тріщин порівняно з товщиною покриття.

Водночас для достатньо довгих тріщин ні механічні характеристики, ні вибір конститутивної моделі матеріалів тіла, ні тип міжфазного контакту не впливають істотно на значення критичних деформацій, залежність яких від геометричного параметра h/a в такому випадку є близькою до квадратичної. В цьому випадку з певними обмеженнями застосовується зручна інженерна формула (1), одержана в межах геометрично- та фізично-лінійного балкового наближення.

У випадку жорсткого з'єднання компонентів тіла поза тріщиною вказану формулу можна вважати застосовною для $g < 2$ та $\beta < 0,1$. Коли ж компоненти поза тріщиною проковзують без тертя, діапазон застосовності формули (1) дещо звужується. Коли довжина тріщини зменшується (або товщина плівки збільшується) наближена формула (1) стає незастосовною. Похибка, що виникає при її використанні, обумовлена: а) спрощеннями, пов'язаними з геометрично-лінійною постановкою задачі на основі теорії балок та нехтуванням податливістю підкладки; б) використанням моделі лінійно-пружного тіла; в) нехтуванням внеску механізму зморщування під час визначення критичних параметрів навантаження.

ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Biot M.A. *Mechanics of incremental deformations*. New York: John Wiley & Sons, 1965. 504 p.
2. Schultheisz C.R., Waas A.M. Compressive failure of composites, part I: Testing and micromechanical theories. *Prog. Aerosp. Sci.* 1996. **32**, № 1. P. 1—42. [https://doi.org/10.1016/0376-0421\(94\)00002-3](https://doi.org/10.1016/0376-0421(94)00002-3)
3. Waas A.M., Schultheisz C.R. Compressive failure of composites, part II: Experimental studies. *Prog. Aerosp. Sci.* 1996. **32**, № 1. P. 43—78. [https://doi.org/10.1016/0376-0421\(94\)00003-4](https://doi.org/10.1016/0376-0421(94)00003-4)
4. Гузь А.Н. Основы механики разрушения композитов при сжатии: в 2 т. Киев: Літера ЛТД, 2008.
5. Mei H., Landis C. M., Huang R. Concomitant wrinkling and buckle-delamination of elastic thin films on compliant substrates. *Mech. Mater.* 2011. **43**. P. 627—642. <https://doi.org/10.1016/j.mechmat.2011.08.003>
6. Nikraves S., Ryu D., Shen Y.-L. Instabilities of thin films on a compliant substrate: Direct numerical simulations from surface wrinkling to global buckling. *Sci. Rep.* 2020. **10**. 5728. <https://doi.org/10.1038/s41598-020-62600-z>
7. Kipnis A.L. Wrinkling of hyperelastic thin film on hyperelastic semibounded substrate in cases of rigid connection and frictionless sliding of components. *J. Elast.* 2025. **157**. 40. <https://doi.org/10.1007/s10659-025-10130-y>
8. Yu H.-H., Hutchinson J.W. Influence of substrate compliance on buckling delamination of thin films. *Int. J. Fract.* 2002. **113**. P. 39—55. <https://doi.org/10.1023/A:1013790232359>
9. Gu P., Chen X. Role of an interface crack for the blistering mode of a stiff film on a compliant substrate. *J. Coat. Technol. Res.* 2022. **19**. P. 661—669 <https://doi.org/10.1007/s11998-021-00556-z>
10. Cotterell B., Chen Z. Buckling and cracking of thin film on compliant substrates under compression. *Int. J. Fract.* 2000. **104**. P. 169—179. <https://doi.org/10.1023/A:1007628800620>
11. Bogdanov V., Dovzhyk M., Nazarenko V. Analysis of the beam approximation applicability in problems on compression of bodies along closely spaced cracks. *Selected problems of solid mechanics and solving methods: Altenbach H., Bogdanov V., Grigorenko A.Y., Kushnir R.M., Nazarenko V.M., Eremeyev V.A. (eds.). Advanced Structured Materials (vol. 204)*. Cham: Springer, 2024. P. 59—80. https://doi.org/10.1007/978-3-031-54063-9_5
12. Cao Y., Jiang Y., Li B., Feng X. Biomechanical modeling of surface wrinkling of soft tissues with growth-dependent mechanical properties. *Acta Mech. Solida Sin.* 2012. **25**. P. 483—492. [https://doi.org/10.1016/S0894-9166\(12\)60043-3](https://doi.org/10.1016/S0894-9166(12)60043-3)

13. Stewart P.S., Waters S.L., Sayed T.E., Vella D., Goriely A. Wrinkling, creasing, and folding in fiber-reinforced soft tissues. *Extreme Mech. Lett.* 2016. **8**. P. 22—29. <https://doi.org/10.1016/j.eml.2015.10.005>
14. Dimmock R.L., Wang X., Fu Y., Haj A.J.L., Yang Y. Biomedical applications of wrinkling polymers. *Recent Prog. Mater.* 2020. **2**, № 1. 005. <https://doi.org/10.21926/rpm.2001005>
15. Dowson D. Bio-tribology. *Faraday Discuss.* 2012. **156**. P. 9—30. <https://doi.org/10.1039/c2fd20103h>
16. Dunn A.C., Tichy J.A., Urueña J.M., Sawyer W.G. Lubrication regimes in contact lens wear during a blink. *Tribol. Int.* 2013. **63**. P. 45—50. <https://doi.org/10.1016/j.triboint.2013.01.008>
17. Bereznick D.E., Ross J.K., McGill S.M. The frictional properties at the thoracic skin-fascia interface: implications in spine manipulation. *Clin. Biomech.* 2002. **17**, № 4. P. 297—303. [https://doi.org/10.1016/s0021-9290\(02\)00014-3](https://doi.org/10.1016/s0021-9290(02)00014-3)
18. Guz A.N. Fundamentals of the three-dimensional theory of stability of deformable bodies. Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 1999. 557 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-540-69633-9>
19. Guz A.N. Establishing the foundations of the mechanics of fracture of materials compressed along cracks (review). *Int. Appl. Mech.* 2014. **50**, № 1. P. 1—57. <https://doi.org/10.1007/s10778-014-0609-y>
20. Guz A.N., Bogdanov V.L., Nazarenko V.M. Two-dimensional problems on the fracture of bodies under compression along cracks. *Fracture of materials under compression along cracks*: Guz A.N., Bogdanov V.L., Nazarenko V.M. (eds.). Cham: Springer, 2020. P. 149—248. https://doi.org/10.1007/978-3-030-51814-1_3
21. Bogdanov V.L., Nazarenko V.M., Kipnis O.L. Compression of semibounded body with thin coating layer along interface near-surface crack. Part I. *Int. Appl. Mech.* 2024. **60**, № 5. P. 511—524. <https://doi.org/10.1007/s10778-025-01303-2>
22. Bogdanov V.L., Nazarenko V.M., Kipnis O.L. Compression of semibounded body with thin coating layer along interface near-surface crack. Part II. *Int. Appl. Mech.* 2024. **60**, № 6. P. 641—652. <https://doi.org/10.1007/s10778-025-01316-x>
23. Kipnis A.L. Stability of a piecewise-homogeneous half-plane with sliding components under compression along an interface crack. *Mech. Compos. Mater.* 2025. **61**, № 2. P. 409—424. <https://doi.org/10.1007/s11029-025-10283-w>
24. Mikhlin S.G. Variational methods in mathematical physics. Oxford: Pergamon Press, 1964. 584 p.
25. Бартенев Г.М., Хазанович Т.Н. О законе высокоэластичных деформаций сеточных полимеров. *Высокомолекулярные соединения*. 1960. **2**, № 1. С. 21—28.16.
26. John F. Plane strain problems for a perfectly elastic material of harmonic type. *Commun. Pure Appl. Math.* 1960. **13**, № 2. P. 239—296. <https://doi.org/10.1002/cpa.3160130206>

Надійшла до редакції 05.11.2025

REFERENCES

1. Biot, M. A. (1965). Mechanics of incremental deformations. New York: John Wiley & Sons. 504 p.
2. Schultheisz, C. R. & Waas, A. M. (1996). Compressive failure of composites, part I: Testing and micromechanical theories. *Prog. Aersp. Sci.*, 32, No. 1, pp. 1-42. [https://doi.org/10.1016/0376-0421\(94\)00002-3](https://doi.org/10.1016/0376-0421(94)00002-3)
3. Waas, A. M. & Schultheisz, C. R. (1996). Compressive failure of composites, part II: Experimental studies. *Prog. Aersp. Sci.*, 32, No. 1, pp. 43-78. [https://doi.org/10.1016/0376-0421\(94\)00003-4](https://doi.org/10.1016/0376-0421(94)00003-4)
4. Guz, A. N. (2008). Fundamentals of the fracture mechanics of compressed composites. Kyiv: Litera (in Russian).
5. Mei, H., Landis, C. M. & Huang, R. (2011). Concomitant wrinkling and buckle-delamination of elastic thin films on compliant substrates. *Mech. Mater.*, 43, pp. 627-642.
6. Nikraves, S., Ryu, D. & Shen, Y.-L. (2020). Instabilities of thin films on a compliant substrate: Direct numerical simulations from surface wrinkling to global buckling. *Sci. Rep.*, 10, 5728. <https://doi.org/10.1038/s41598-020-62600-z>
7. Kipnis, A. L. (2025). Wrinkling of hyperelastic thin film on hyperelastic semibounded substrate in cases of rigid connection and frictionless sliding of components. *J. Elast.*, 157, 40. <https://doi.org/10.1007/s10659-025-10130-y>
8. Yu, H.-H. & Hutchinson, J. W. (2002). Influence of substrate compliance on buckling delamination of thin films. *Int. J. Fract.*, 113, pp. 39-55. <https://doi.org/10.1023/A:1013790232359>
9. Gu, P. & Chen, X. (2022). Role of an interface crack for the blistering mode of a stiff film on a compliant substrate. *J. Coat. Technol. Res.*, 19, pp. 661-669. <https://doi.org/10.1007/s11998-021-00556-z>
10. Cotterell, B. & Chen, Z. (2000). Buckling and cracking of thin film on compliant substrates under compression. *Int. J. Fract.*, 104, pp. 169-179. <https://doi.org/10.1023/A:1007628800620>
11. Bogdanov, V., Dovzhyk, M. & Nazarenko, V. (2024). Analysis of the beam approximation applicability in problems on compression of bodies along closely spaced cracks. In: Altenbach, H., Bogdanov, V., Grigorenko, A. Y., Kushnir, R. M., Nazarenko, V. M. & Eremeyev, V. A. (eds.). Selected problems of solid mechanics and solving methods. *Advanced Structured Materials*, vol. 204 (pp. 59-80). Cham: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-031-54063-9_5

12. Cao, Y., Jiang, Y., Li, B. & Feng, X. (2012). Biomechanical modeling of surface wrinkling of soft tissues with growth-dependent mechanical properties. *Acta Mech. Solida Sin.*, 25, pp. 483-492. [https://doi.org/10.1016/S0894-9166\(12\)60043-3](https://doi.org/10.1016/S0894-9166(12)60043-3)
13. Stewart, P. S., Waters, S. L., Sayed, T. E., Vella, D. & Goriely, A. (2016). Wrinkling, creasing, and folding in fiber-reinforced soft tissues. *Extreme Mech. Lett.*, 8, pp. 22-29. <https://doi.org/10.1016/j.eml.2015.10.005>
14. Dimmock, R. L., Wang, X., Fu, Y., Haj, A. J. L. & Yang, Y. (202). Biomedical applications of wrinkling polymers. *Recent Prog. Mater.*, 2, No. 1, 005. <https://doi.org/10.21926/rpm.2001005>
15. Dowson, D. (2012). Bio-tribology. *Faraday Discuss.*, 156, pp. 9-30. <https://doi.org/10.1039/c2fd20103h>
16. Dunn, A. C., Tichy, J. A., Urueña, J. M. & Sawyer, W. G. (2013). Lubrication regimes in contact lens wear during a blink. *Tribol. Int.*, 63, pp. 45-50. <https://doi.org/10.1016/j.triboint.2013.01.008>
17. Bereznick, D. E., Ross, J. K. & McGil, S. M. (2002). The frictional properties at the thoracic skin-fascia interface: implications in spine manipulation. *Clin. Biomech.*, 17, No. 4, pp. 297-303. [https://doi.org/10.1016/s0021-9290\(02\)00014-3](https://doi.org/10.1016/s0021-9290(02)00014-3)
18. Guz, A. N. (1999). *Fundamentals of the three-dimensional theory of stability of deformable bodies*. Berlin, Heidelberg, New York: Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-540-69633-9>
19. Guz, A. N. (2014). Establishing the foundations of the mechanics of fracture of materials compressed along cracks (review). *Int. Appl. Mech.*, 50, No. 1, pp. 1-57. <https://doi.org/10.1007/s10778-014-0609-y>
20. Guz, A. N., Bogdanov, V. L. & Nazarenko, V. M. (2020). Two-dimensional problems on the fracture of bodies under compression along cracks. In: Guz, A. N., Bogdanov, V. L. & Nazarenko, V. M. (eds.). *Fracture of materials under compression along cracks* (pp. 149-248). Cham: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-51814-1_3
21. Bogdanov, V.L., Nazarenko, V.M. & Kipnis, O.L. (2024). Compression of semibounded body with thin coating layer along interface near-surface crack. Part I. *Int. Appl. Mech.*, 60, No. 5, pp. 511-524. <https://doi.org/10.1007/s10778-025-01303-2>
22. Bogdanov, V. L., Nazarenko, V. M. & Kipnis, O. L. (2024). Compression of semibounded body with thin coating layer along interface near-surface crack. Part II. *Int. Appl. Mech.*, 60, No. 6, pp. 641-652. <https://doi.org/10.1007/s10778-025-01316-x>
23. Kipnis, A. L. (2025). Stability of a piecewise-homogeneous half-plane with sliding components under compression along an interface crack. *Mech. Compos. Mater.*, 61, No. 2, pp. 409-424. <https://doi.org/10.1007/s11029-025-10283-w>
24. Mikhlin, S. G. (1964). *Variational methods in mathematical physics*. Oxford: Pergamon Press.
25. Bartenev, G. M. & Khazanovich, T. N. (1960). On the law of highly elastic deformations of network polymers. *Vysokomolekulyarnyye Soyedineniya*, 2, No. 1, pp. 21-28 (in Russian).
26. John, F. (1960). Plane strain problems for a perfectly elastic material of harmonic type. *Commun. Pure Appl. Math.*, 13, No. 2, pp. 239-296. <https://doi.org/10.1002/cpa.3160130206>

Received 05.11.2025

A.L. Kipnis, <https://orcid.org/0000-0001-6747-8584>

S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of the NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine

E-mail: a.l.kipnis@gmail.com

LOCAL BUCKLING OF THIN-FILM COATING UNDER PRESSURE ALONG INTERPHASE CRACK UNDER VARIOUS CONTACT CONDITIONS

Within the framework of three-dimensional linearized stability theory for deformable bodies, the influence of weakened adhesion between components of a piecewise-homogeneous half-plane (thin-film structure, coated material) on critical instability parameters during compression along an interphase crack is investigated. For this purpose, two types of contact along the interface outside the crack are considered, modeling, respectively, the “strongest” and “weakest” types of interphase adhesion — perfect adhesion and frictionless sliding. Critical parameters are determined by solving eigenvalue problems for Fredholm integral equations of the first kind (or their systems), to which the initial boundary value problems are reduced. For cracks that are sufficiently long compared to the thickness of the coating, limits of applicability of the approximate formula for critical deformation loss of stability are established.

Keywords: *thin film, coated materials, buckling, interfacial crack, hyperelastic material, critical strain.*