https://doi.org/10.15407/dopovidi2025.06.046
УДК 621.391:519.22

І.М. Яворський[1], https://orcid.org/0000-0003-0243-6652
Р.М. Юзефович[1,2], https://orcid.org/0000-0001-5546-453X
Р.І. Пелипець[2], https://orcid.org/0009-0008-9603-6716
О.В. Личак[1], https://orcid.org/0000-0001-5559-1969

[1] Фізико-механічний інститут ім. Г.В. Карпенка НАН України, Львів, Україна
[2] Національний університет "Львівська політехніка", Львів, Україна
E-mail: ihor.yavorskyj@gmail.com, roman.yuzefovych@gmail.com,
pelypets.ri@gmail.com, olehlychak2003@yahoo.com

Перетворення Гільберта для аналізу стохастичної модуляції біперіодично нестаціонарного випадкового сигналу

Представлена академіком НАН України З.Т. Назарчуком

Розглянуто властивості моделі сигналу у вигляді біперіодично нестаціонарного випадкового процесу (БПНВП). Показано, що кореляційна структура БПНВП визначається стаціонарно зв'язаними випадковими процесами, які модулюють за амплітудою і фазою несучі гармоніки, частоти яких є комбінаціями двох базових. Проведено аналіз стохастичної модуляції з використанням перетворення Гільберта. Встановлені характерні особливості кореляційної і спектральної структури перетворення Гільберта сигналу, що необхідно враховувати під час оброблення натурних даних.

Ключові слова: *біперіодично нестаціонарний випадковий сигнал, несучі гармоніки, перетворення Гільберта, стохастична модуляція, кореляційна функція.*

Вступ. Стохастичні сигнали як природного, так й технічного походження у багатьох випадках мають вітко виражену ритмічну структуру, що проявляється на рівні статистичних характеристик першого і другого порядку. У найпростішому випадку така структура описується періодично нестаціонарними випадковими процесами з однією базовою частотою [1—7]. Однак на практиці часто зустрічаються випадки, коли в одному й тому ж сигналі одночасно присутні декілька ритмів, тобто стохастична повторюваність одного періоду взаємодіє з повторюваністю іншого. Саме така подвійна ритмічність (або біперіодичність) є характерною

Цитування: Яворський І.М., Юзефович Р.М., Пелипець Р.І., Личак О.В. Перетворення Гільберта для аналізу стохастичної модуляції біперіодично нестаціонарного випадкового сигналу. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2025. № 6. С. 46—60. https://doi.org/10.15407/dopovidi2025.06.046

як для багатьох природних процесів, так і для цілої низки технічних, що виникають у системах зв'язку, обладнанні електроенергетики, механічних обертових вузлах [1—3, 10—12].

Особливо важливою є подвійна ритмічність у вібраційних сигналах, породжених механічними системами та обертовими вузлами. Тут вона виникає внаслідок різних швидкостей обертання окремих елементів, несинхронних приводів у механізмах, появи дефектів окремих елементів та взаємодії механічних вузлів [10—15]. Імовірнісною моделлю стохастичної мінливості з подвійною ритмічністю є біперіодично нестаціонарні випадкові процеси (БПНВП) [1, 12]. Для таких процесів кореляційно-спектральна структура визначається стаціонарно зв'язаними процесами, які моделюють несучі гармоніки з частотами, що є лінійними комбінаціями двох базових частот. Тому можна вважати, що БПНВП узагальнює клас періодично нестаціонарних випадкових процесів (ПНВП) з однією базовою частотою, які успішно застосовуються у задачах аналізу та діагностики механічних систем [1, 12, 16—19].

Окремий напрям розвитку методів БПНВП-аналізу пов'язаний із використанням перетворення Гільберта [20—22]. У роботах [16—19] показано, що для аналізу стохастичної модуляції, коли несучі гармоніки характеризуються однією базовою частотою та її кратними, перетворення Гільберта дозволяє виділити приховану структуру періодично нестаціонарних коливань. При цьому було встановлено, що властивості перетворення Гільберта як для однокомпонентних, так і для багатокомпонентних ПНВП істотно залежать від частотних характеристик модулюючих процесів і помітно відрізняються для випадків низько- та високочастотної модуляції несучих [16, 18].

Разом із тим, попри наявність розвинутої теорії періодично нестаціонарних випадкових процесів і перших результатів для ПНВП [1, 2, 12, 16—19], властивості перетворення Гільберта для БПНВП досі вивчені недостатньо. Відсутність таких досліджень істотно обмежує можливості коректного використання перетворення Гільберта та пов'язаних із ним методів аналізу у задачах вібраційної діагностики механізмів із подвійною ритмічністю.

Мета даної статті — встановлення загальних властивостей перетворення Гільберта для біперіодично нестаціонарних випадкових процесів, які адекватно описують вібрації дефектних обертових механізмів із подвійною ритмічністю.

Біперіодично нестаціонарний випадковий процес для опису сигналів вібрацій. Вібрації складних механізмів, що містять принаймні декілька обертових вузлів, чи приводів від різних двигунів характеризуються складною кореляційно-спектральною структурою, що спричинена різними, у тому числі несинхронними швидкостями обертання окремих елементів. Такі вібрації, несучі гармоніки яких є стохастично промодульованими внаслідок впливу дефектів, моделюють у вигляді полі-періодично нестаціонарних випадкових процесів [12—14]. Відомо, що ці процеси належать до класу майже періодично нестаціонарних випадкових процесів [15]. Для найпростішого випадку, коли у складі вібрації присутні лише два залежні ритми, матимемо БПНВП [13, 14].

Розглянемо стохастичну модуляцію сигналу унаслідок впливу дефекту в моделі ПНВП, що описує стохастичну повторюваність з одним періодом. У гармонічному поданні її можна описати випадковим процесом таким чином:

$$\xi(t)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\xi_k(t)e^{ik\frac{2\pi}{P_1}t}, \tag{1}$$

де P_1 — період обертання пошкодженого елемента. Якщо інший вузол механізму, що обертається також пошкоджений, його коливання опишемо іншим ПНВП з періодом P_2. Взаємодію між вібраціями двох пошкоджених елементів представимо як модуляцію гармонік першого ПНВП коливаннями з періодом P_2. Вважатимемо, що кожна гармоніка може бути модульована по-різному, тобто:

$$\xi_k(t)=\sum_{l\in\mathbb{Z}}\xi_{kl}(t)e^{il\frac{2\pi}{P_2}t}. \tag{2}$$

Підставляючи (2) у (1), отримуємо

$$\xi(t)=\sum_{k,l\in\mathbb{Z}}\xi_{kl}(t)e^{i\omega_{k,l}t}, \tag{3}$$

де $\omega_{k,l}=k\dfrac{2\pi}{P_1}+l\dfrac{2\pi}{P_2}$, а $\xi_{kl}(t)$ — взаємостаціонарні випадкові процеси. Таким чином випадковий процес у (3), записаний у вигляді суперпозиції амплітудно- та фазово-модульованих гармонік, частоти яких є лінійними комбінаціями двох (різних, несинхронних у загальному випадку) базових частот $\omega_{1,0}=\dfrac{2\pi}{P_1}=2\pi f_{1,0}$ і $\omega_{0,1}=\dfrac{2\pi}{P_2}=2\pi f_{0,1}$. Тоді функція математичного сподівання від (3) буде:

$$m(t)=\mathrm{E}\xi(t)=\sum_{k,l\in\mathbb{Z}}m_{kl}e^{i\omega_{kl}t}=m_{00}+\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}(m_{kl}^{c}\cos\omega_{kl}t+m_{kl}^{s}\sin\omega_{kl}t)+$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}(m_{k,-l}^{c}\cos\omega_{k,-l}t+m_{k,-l}^{s}\sin\omega_{k,-l}t), \tag{4}$$

де $m_{kl}=\mathrm{E}\xi_{kl}(t)=\frac{1}{2}(m_{kl}^{c}-im_{kl}^{s})$. Виконавши центрування сигналу (3) $\overset{\circ}{\xi}_{kl}(t)=\xi_{kl}(t)-m_{kl}$ обчислимо його кореляційну функцію $b(t,\tau)=\mathrm{E}\overset{\circ}{\xi}(t)\overset{\circ}{\xi}(t+\tau)$. Кореляційна функція для цього випадку матиме вигляд

$$b(t,\tau)=\sum_{r,s\in\mathbb{Z}}\sum_{p,q\in\mathbb{Z}}b_{rspq}(\tau)e^{i\omega_{p-r,q-s}t}e^{i\omega_{pq}\tau}, \tag{5}$$

де $b_{rspq}(\tau)=\mathrm{E}\overset{\circ}{\xi}_{rs}(t)\overset{\circ}{\xi}_{pq}(t+\tau)$. Виконавши заміну індексів сумування на $k=p-r$ і $l=q-s$, отримаємо вирази для кореляційної функції у вигляді ряду Фур'є:

$$b(t,\tau)=\sum_{k,l\in\mathbb{Z}}B_{kl}(\tau)e^{i\omega_{kl}t}=B_{00}(\tau)+\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}[B_{kl}^{c}(\tau)\cos\omega_{kl}t+B_{kl}^{s}(\tau)\sin\omega_{kl}t]+$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}[B_{k,-l}^{c}(\tau)\cos\omega_{k,-l}t+B_{k,-l}^{s}(\tau)\sin\omega_{kl}t], \tag{6}$$

де

$$B_{kl}^{c}(\tau)=\frac{1}{2}[B_{kl}^{c}(\tau)-iB_{kl}^{s}(\tau)]=\sum_{p,q\in\mathbb{Z}}b_{p-k,q-l,p,q}(\tau)e^{i\omega_{pq}\tau}. \tag{7}$$

З (7) випливає, що кореляційна функція є біперіодичною у часі, якщо модулюючі процеси $\xi_{kl}(t)$ декількох різних порядків є взаємокорельованими. Випадкові процеси, математичне сподівання та кореляційна функція яких змінюються біперіодично у часі, називають БПНВП [14, 15]. Взаємокореляційні функції процесів $\xi_{rs}(t)$ та $\xi_{pq}(t)$, для яких $p-r=k$ та $q-s=l$, формують кореляційні компоненти $B_{kl}(\tau)$.

Нульова кореляційна компонента $R_{00}(\tau)$ виражається через автокореляційні функції $b_{pq}(\tau)=\mathrm{E}\overline{\xi}_{pq}(t)\xi_{pq}(t+\tau)$ (символ “ $-$ ” означає комплексно спряжену величину) таким чином:

$$B_{00}(\tau)=\sum_{p,q\in\mathbb{Z}} b_{pq}(\tau)e^{-i\omega_{pq}\tau}. \tag{8}$$

Ця величина є результатом усереднення за часом кореляційної функції БПНВП, тобто кореляційною функцією її стаціонарного наближення.

Нульову спектральну компоненту БПНВП можна подати у вигляді

$$f_{00}(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} B_{00}(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau=\sum_{p,q\in\mathbb{Z}} f_{pq}^{(md)}(\omega-\omega_{pq}), \tag{9}$$

де функції $f_{pq}^{(md)}(\omega)$ — спектральні густини потужності модулюючих процесів, тобто

$$f_{pq}^{(md)}(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} b_{pq}(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau. \tag{10}$$

Ці функції визначають спектральний склад БПНВП. Ненульові спектральні компоненти

$$f_{kl}(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} B_{kl}(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau \tag{11}$$

характеризують взаємні кореляції гармонік спектра, зміщених на величину ω_{kl}. Вони є результатом кореляцій модулюючих процесів у стохастичному ряді (3):

$$f_{kl}(\omega)=\sum_{p,q\in\mathbb{Z}} f_{p-k,\, q-l,\, p,q}^{(md)}(\omega-\omega_{pq}), \tag{12}$$

де

$$f_{mspq}^{(md)}(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} b_{mspq}(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau. \tag{13}$$

Гармонічний ряд (3) є загальною формою простої моделі біперіодичних змін сигналу у часі.

Кореляційні властивості перетворення Гільберта БПНВП. Аналіз властивостей перетворення Гільберта багатокомпонентного ПНВП у загальному випадку проведено у роботах [14—17]. Тут розглянемо основні особливості перетворення Гільберта сигналу, який описується БПНВП.

Припустимо, що випадковий процес $\xi(t)$ у (3) є центрованим і має нульову постійну складову. Застосувавши перетворення Гільберта до цього процесу маємо:

$$\eta(t) = H\{\xi(t)\} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\xi(\tau)}{t-\tau}d\tau, \qquad (14)$$

його математичне сподівання буде:

$$m_\eta(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{m_\xi(t)}{t-\tau}d\tau.$$

Підставивши в останнє рівняння ряд (4), отримуємо

$$m_\eta(t) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}(m_{kl}^c \sin\omega_{kl}t - m_{kl}^s \cos\omega_{kl}t) + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}(m_{k,-l}^c \sin\omega_{k,-l}t - m_{k,-l}^s \cos\omega_{k,-l}t).$$

Тут враховано, що застосування перетворення Гільберта зсуває фази гармонік (4) на $-\frac{\pi}{2}$.

Математичне сподівання аналітичного сигналу, побудованого з використанням перетворення Гільберта $\zeta(t) = \xi(t) + i\eta(t)$, матиме вигляд

$$m_\zeta(t) = 2\left[\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} m_{kl} e^{i\omega_{kl}t} + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} m_{k,-l} e^{i\omega_{k,-l}t}\right].$$

Взявши до уваги обернене перетворення Гільберта

$$\xi(t) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\eta(\tau)}{t-\tau}d\tau,$$

отримуємо

$$m_\xi(t) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{m_\eta(\tau)}{t-\tau}d\tau.$$

Звідси одержуємо:

$$\overset{\circ}{\xi}(t) = \xi(t) - m_\xi(t) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\overset{\circ}{\eta}(\tau)}{t-\tau}d\tau, \qquad (15)$$

$$\overset{\circ}{\eta}(t) = \eta(t) - m_\eta(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\overset{\circ}{\xi}(\tau)}{t-\tau}d\tau. \qquad (16)$$

Кореляційна функція процесу (15) дорівнює

$$b_\xi(t,u) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{b_{\xi\eta}(t+u, \tau-t-u)}{t-\tau}d\tau.$$

Після підстановки $r-t-u=\tau_1$ маємо

$$b_{\xi}(t,u)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{b_{\xi\eta}(t+u,\tau_1)}{u+\tau_1}d\tau_1\,. \tag{17}$$

Аналогічно для автокореляційних функцій перетворення Гільберта (16) отримуємо

$$b_{\eta}(t,u)=-\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{b_{\eta\xi}(t+u,\tau)}{u+\tau}d\tau\,. \tag{18}$$

Використовуючи (15) та (16) отримуємо представлення взаємокореляційних функцій:

$$b_{\xi\eta}(t,u)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{b_{\eta}(t+u,\tau)}{\tau+u}d\tau\,, \tag{19}$$

$$b_{\eta\xi}(t,u)=-\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{b_{\xi}(t+u,\tau)}{\tau+u}d\tau\,. \tag{20}$$

З огляду на це має місце така теорема.

Теорема 1. *БПНВП $\xi(t)$, кореляційна функція якого задається рядом (6), і його перетворення Гільберта є взаємозалежними біперіодично нестаціонарними процесами, а їх авто- та взаємокореляційні компоненти визначаються співвідношеннями:*

$$B_{kl}^{(\xi\eta)}(u)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}h(u-\tau)B_{kl}^{(\xi)}(\tau)d\tau\,, \tag{21}$$

$$B_{kl}^{(\eta\xi)}(u)=-\int\limits_{-\infty}^{\infty}h(u-\tau)B_{kl}^{(\eta)}(\tau)d\tau\,,$$

$$B_{kl}^{(\xi)}(u)=-\int\limits_{-\infty}^{\infty}h(u-\tau)B_{kl}^{(\xi\eta)}(\tau)d\tau\,, \tag{22}$$

$$B_{kl}^{(\eta)}(u)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}h(u-\tau)B_{kl}^{(\eta\xi)}(\tau)d\tau\,,$$

де $h(\tau)=(\pi\tau)^{-1}$ є імпульсним відгуком перетворення Гільберта. Ці співвідношення свідчать про те, що кореляційні компоненти $B_{kl}^{(\xi)}(u)$ і $B_{kl}^{(\xi\eta)}(u)$, та $B_{kl}^{(\eta\xi)}(u)$ і $B_{kl}^{(\eta)}(u)$ є парами перетворення Гільберта.

Доведення.

Підставимо у рівняння (20) ряд Фур'є (6). Тоді отримуємо

$$B_{\eta\xi}(t,u)=\sum_{k,l\in\mathbb{Z}}e^{i\omega_{kl}t}\left[-\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{B_{kl}^{(\xi)}(\tau)}{\tau+u}d\tau\right]e^{i\omega_{kl}u}\,.$$

Звідси випливає, що взаємокореляційні компоненти $B_{kl}^{(\eta\xi)}(u)$ визначаються формулою

$$B_{kl}^{(\eta\xi)}(u) = -\frac{e^{i\omega_{kl}u}}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{B_{kl}^{(\xi)}(\tau)}{\tau+u}d\tau,$$

а отже

$$B_{kl}^{(\eta\xi)}(-u) = \frac{e^{-i\omega_{kl}u}}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{B_{kl}^{(\xi)}(\tau)}{u-\tau}d\tau.$$

Оскільки $b_{\eta\xi}(t,u) = E\overset{\circ}{\eta}(t)\overset{\circ}{\xi}(t+u) = b_{\xi\eta}(t+u,-u)$, то $B_{kl}^{(\eta\xi)}(-u) = B_{kl}^{(\xi\eta)}(u)e^{-i\omega_{kl}u}$. Це означає, що

$$B_{kl}^{(\xi\eta)}(u) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{B_{kl}^{(\xi)}(\tau)}{u-\tau}d\tau = \int_{-\infty}^{\infty}h(u-\tau)B_{kl}^{(\xi)}(\tau)d\tau. \qquad (23)$$

Зі співвідношення (19) випливає, що

$$B_{kl}^{(\xi\eta)}(u) = \left[\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{B_{kl}^{(\eta)}(\tau)}{\tau+u}d\tau\right]e^{i\omega_{kl}u}, \qquad (24)$$

звідси

$$B_{kl}^{(\xi\eta)}(u)e^{-i\omega_{kl}u} = B_{kl}^{(\eta\xi)}(-u) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{B_{kl}^{(\eta)}(\tau)}{\tau+u}d\tau,$$

і

$$B_{kl}^{(\eta\xi)}(u) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{B_{kl}^{(\eta)}(\tau)}{u-\tau}d\tau = -\int_{-\infty}^{\infty}h(u-\tau)B_{kl}^{(\eta)}(\tau)d\tau.$$

Взявши до уваги вирази (17) і (18), знаходимо

$$B_{kl}^{(\xi)}(u) = \frac{e^{i\omega_{kl}u}}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{B_{kl}^{(\xi\eta)}(\tau)}{\tau+u}d\tau,$$

$$B_{kl}^{(\eta)}(u) = -\frac{e^{i\omega_{kl}u}}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{B_{kl}^{(\eta\xi)}(\tau)}{\tau+u}d\tau,$$

тоді

$$B_{kl}^{(\xi)}(u) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{B_{kl}^{(\xi\eta)}(\tau)}{u-\tau}d\tau = -\int_{-\infty}^{\infty}h(u-\tau)B_{kl}^{(\xi\eta)}(\tau)d\tau, \qquad (25)$$

$$B_{kl}^{(\eta)}(u)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{B_{kl}^{(\eta\xi)}(\tau)}{u-\tau}d\tau=\int_{-\infty}^{\infty}h(u-\tau)B_{kl}^{(\eta\xi)}(\tau)d\tau\,. \tag{26}$$

Теорему доведено.

Зі співвідношень (23) і (25) та (24) і (26) видно, що авто- та взаємокореляційні компоненти $B_{kl}^{(\xi)}(u)$ і $B_{kl}^{(\xi\eta)}(u)$, а також $B_{kl}^{(\eta\xi)}(u)$ і $B_{kl}^{(\eta)}(u)$ є парами перетворення Гільберта.

Врахувавши теорему про згортку в частотній області маємо

$$f_{kl}^{(\xi\eta)}(\omega)=H(\omega)f_{kl}^{(\xi)}(\omega)\,, \tag{27}$$

$$f_{kl}^{(\xi)}(\omega)=-H(\omega)f_{kl}^{(\xi\eta)}(\omega)\,, \tag{28}$$

$$f_{kl}^{(\eta)}(\omega)=H(\omega)f_{kl}^{(\eta\xi)}(\omega)\,, \tag{29}$$

$$f_{kl}^{(\eta\xi)}(\omega)=-H(\omega)f_{kl}^{(\eta)}(\omega)\,. \tag{30}$$

Тут $H(\omega)$ — передавальна функція: $H(\omega)=-i$ для $\omega>0$ та $H(\omega)=i$ для $\omega<0$, а авто- та взаємокореляційні компоненти визначаються формулою (13), а також

$$f_{kl}^{(\eta)}(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}B_{kl}^{(\xi)}(u)e^{-i\omega u}du\,,\;\; f_{kl}^{(\xi\eta)}(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}B_{kl}^{(\xi\eta)}(u)e^{-i\omega u}du\,, \tag{31}$$

$$f_{kl}^{(\eta\xi)}(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}B_{kl}^{(\xi\eta)}(u)e^{-i\omega u}du\,. \tag{32}$$

Оскільки авто- та взаємокореляційні компоненти задовільняють умови

$$B_{kl}^{(\xi,\,\eta)}(-u)=B_{kl}^{(\xi,\,\eta)}(u)e^{i\omega_{kl}u}\,,\;\; B_{kl}^{(\xi\eta)}(-u)=B_{kl}^{(\eta\xi)}(u)e^{i\omega_{kl}u}\,, \tag{33}$$

то для авто- та взаємоспектральних компонентів отримуємо

$$f_{kl}^{(\xi,\,\eta)}(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}B_{kl}^{(\xi,\,\eta)}(-u)e^{-i\omega u}du=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}B_{kl}^{(\xi,\,\eta)}(u)e^{-i(\omega+\omega_{kl})u}du=f_{kl}^{(\xi,\,\eta)}(\omega+\omega_{kl})\,,$$

$$f_{kl}^{(\xi\eta)}(-\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}B_{kl}^{(\xi\eta)}(-u)e^{-i\omega u}du=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}B_{kl}^{(\eta\xi)}(u)e^{-i(\omega+\omega_{kl})u}du=f_{kl}^{(\eta\xi)}(\omega+\omega_{kl})\,.$$

Зі співвідношень (13), (31) та (32) після врахування рівностей

$$B_{-k,-l}^{(\xi,\,\eta)}(u)=\overline{B}_{kl}^{(\xi,\,\eta)}(u)\,,\;\; B_{-k,-l}^{(\xi\eta)}(u)=\overline{B}_{kl}^{(\xi\eta)}(u)\,,$$

випливає, що

$$f_{-k,\,-l}^{(\xi,\,\eta)}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi}\overline{B}_{kl}^{(\xi,\,\eta)}(u)e^{-i\omega u}du=\overline{f}_{kl}^{(\xi,\,\eta)}(-\omega)=\overline{f}^{(\xi,\,\eta)}(\omega+\omega_{kl})\,,$$

$$f_{-k,-l}^{(\xi\eta)}(\omega)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi}\overline{B}_{kl}^{(\xi\eta)}(u)e^{-i\omega u}du=\overline{f}_{kl}^{(\xi\eta)}(-\omega)=\overline{f}^{(\eta\xi)}(\omega+\omega_{kl})\,. \quad (34)$$

Властивості спектральних компонентів (27)—(30) можна використати для встановлення зв'язків між кореляційними та спектральними характеристиками сигналу та його перетворення Гільберта.

Сформулюємо наступну теорему.

Теорема 2. *Нульові кореляційні компоненти БПНВП сигналу та його перетворення Гільберта є рівними, а їх нульові взаємокореляційні компоненти є непарними функціями і відрізняються тільки знаками, та визначаються за формулою:*

$$B_{00}^{(\xi\eta)}(u)=2\int\limits_{0}^{\infty}f_{00}^{(\xi)}(\omega)\sin\omega u d\omega\,.$$

Доведення. З рівності (27), врахувавши, що $f_{00}^{(\eta\xi)}(\omega)=\overline{f}_{00}^{(\xi\eta)}(\omega)$, маємо $f_{00}^{(\eta)}=H(\omega)\overline{f}_{00}^{(\xi\eta)}(\omega)$.

Підставляючи в останнє рівняння формулу (27), приходимо до рівності:

$$f_{00}^{(\eta)}=H(\omega)\overline{H}(\omega)f_{00}^{(\xi)}(\omega)=\left|H(\omega)\right|^{2}f_{00}^{(\xi)}(\omega).$$

Оскільки $\left|H(\omega)\right|^{2}=1$, то $f_{00}^{(\eta)}(\omega)=f_{00}^{(\xi)}(\omega)$, а звідси $B_{00}^{(\eta)}(u)=B_{00}^{(\xi)}(u)$.

Для нульових взаємокореляційних компонентів, взявши до уваги співвідношення (27) отримуємо

$$B_{00}^{(\xi\eta)}(u)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}f_{00}^{(\xi\eta)}(\omega)e^{i\omega u}d\omega=\int\limits_{-\infty}^{\infty}H(\omega)f_{00}^{(\xi)}(\omega)e^{i\omega u}d\omega=$$

$$=i\int\limits_{-\infty}^{0}f_{00}^{(\xi)}(\omega)e^{i\omega u}d\omega-i\int\limits_{0}^{\infty}f_{00}^{(\xi)}(\omega)e^{i\omega u}d\omega=i\int\limits_{0}^{\infty}[f_{00}^{(\xi)}(-\omega)e^{-i\omega u}-f_{00}^{(\xi)}(\omega)e^{i\omega u}]d\omega\,.$$

Оскільки $f_{00}^{(\xi)}(-\omega)=f_{00}^{(\xi)}(\omega)$,

$$B_{00}^{(\xi\eta)}(u)=2\int\limits_{0}^{\infty}f_{\xi}(\omega)\sin\omega u d\omega\,. \quad (35)$$

З формули

$$B_{00}^{(\eta\xi)}(u)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}f_{00}^{(\eta\xi)}(\omega)e^{i\omega u}d\omega$$

і рівностей

$$f_{00}^{(\eta\xi)}\left(\omega\right)=-H\left(\omega\right)f_{00}^{(\eta)}\left(\omega\right),\ f_{00}^{(\eta)}\left(\omega\right)=f_{00}^{(\xi)}\left(\omega\right)$$

маємо

$$B_{00}^{(\eta\xi)}(u)=-\int\limits_{-\infty}^{\infty}H(\omega)f_{00}^{(\xi)}(\omega)e^{i\omega u}d\omega\,,$$

а звідси

$$B_{00}^{(\eta\xi)}(u) = -2\int_0^\infty f_{00}^{(\xi)}(\omega)\sin\omega u d\omega\,. \tag{36}$$

З (35) і (36) видно, що нульові взаємокореляційні компоненти є непарними функціями і відрізняються лише знаком $B_{00}^{(\xi\eta)}(u) = -B_{00}^{(\eta\xi)}(u)$. Теорему доведено.

Сформулюємо теорему.

Теорема 3. *Взаємокореляційна функція БПНВП та його перетворення Гільберта, а також автокореляційна функція останнього біперіодично змінюються з часом, а їх коефіцієнти Фур'є визначаються формулами:*

$$B_{kl}^{(\eta)}(u) = \int_{-\infty}^{0} f_{kl}^{(\xi)}(\omega)e^{i\omega u}d\omega - \int_0^{\omega_{kl}} f_{kl}^{(\xi)}(\omega)e^{i\omega u}d\omega + \int_{\omega_{kl}}^{\infty} f_{kl}^{(\xi)}(\omega)e^{i\omega u}d\omega\,,$$

$$B_{kl}^{(\xi\eta)}(u) = i\int_0^\infty [f_{kl}^{(\xi)}(\omega+\omega_{kl})e^{-i\omega u} - f_{kl}^{(\xi)}(\omega)e^{i\omega u}]d\omega\,.$$

Доведення. Взявши до уваги рівності $H(-\omega) = -H(\omega)$, $f_{kl}^{(\xi\eta)}(-\omega) = f_{kl}^{(\xi\eta)}(\omega+\omega_{kl})$ і (29) для кореляційного компонента $B_{kl}^{(\eta)}(u)$ отримуємо:

$$B_{kl}^{(\eta)}(u) = -\int_{-\infty}^{\infty} H(\omega)f_{kl}^{(\eta\xi)}(-\omega)e^{-i\omega u}d\omega = -\int_{-\infty}^{\infty} H(\omega)f_{kl}^{(\xi\eta)}(\omega+\omega_{kl})e^{-i\omega u}d\omega\,.$$

Введемо нову змінну інтегрування $\nu = \omega + \omega_{kl}$ і врахуємо рівність $f_{kl}^{(\xi\eta)}(\omega) = H(\omega)f_{kl}^{(\xi)}(\omega)$. Тоді

$$B_{kl}^{(\eta)}(u) = -e^{i\omega_{kl}u}\int_{-\infty}^{\infty} f_{kl}^{(\xi)}(\nu)H(\nu)H(\nu-\omega_{kl})e^{-i\nu u}d\nu\,.$$

Згідно з умовою (33) $B_{kl}^{(\xi)}(u) = B_{kl}^{(\xi)}(-u)e^{i\omega_{kl}u}$, тому

$$B_{kl}^{(\eta)}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{kl}^{(\xi)}(\omega)H(\omega)H(\omega-\omega_{kl})e^{i\omega u}d\omega\,. \tag{37}$$

Оскільки

$$H(\omega)H(\omega-\omega_{kl}) = \begin{cases} 1, & \omega\in(-\infty,0), \\ -1, & \omega\in(0,\omega_{kl}), \\ 1, & \omega\in(\omega_{kl},\infty), \end{cases}$$

то

$$B_{kl}^{(\eta)}(u) = \int_{-\infty}^{0} f_{kl}^{(\xi)}(\omega)e^{i\omega u}d\omega - \int_0^{\omega_{kl}} f_{kl}^{(\xi)}(\omega)e^{i\omega u}d\omega + \int_{\omega_{kl}}^{\infty} f_{kl}^{(\xi)}(\omega)e^{i\omega u}d\omega\,. \tag{38}$$

Теорему доведено.

Взявши до уваги рівність (34), для взаємокореляційних компонентів $B_{kl}^{(\xi\eta)}(u)$ отримуємо

$$B_{kl}^{(\xi\eta)}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) f_{kl}^{(\xi)}(\omega) e^{i\omega u} d\omega = i\int_{0}^{\infty} [f_{kl}^{(\xi)}(\omega+\omega_{kl}) e^{-i\omega u} - f_{kl}^{(\xi)}(\omega) e^{i\omega u}] d\omega \,. \quad (39)$$

Формули (38) і (39) визначають авто- і взаємокореляційні властивості перетворення Гільберта в залежності від спектральних компонент сигналу.

Наслідок 1. *Якщо спектральні компоненти БПНВП-сигналу задовільняють умову*

$$f_{kl}^{(\xi)}(\omega) = \begin{cases} f_{kl}^{(\xi)}(\omega), & \omega \in [0, \omega_{kl}], \\ 0, & \omega \notin [0, \omega_{kl}], \end{cases} \quad (40)$$

то кореляційні компоненти сигналу та його перетворення Гільберта відрізняються тільки знаком, тобто $B_{kl}^{(\eta)}(u) = -B_{kl}^{(\xi)}(u)$, *а взаємокореляційні компоненти є рівними* $B_{k}^{(\xi\eta)}(u) = B_{kl}^{(\eta\xi)}(u)$ *і визначаються формулою* $B_{kl}^{(\xi\eta)}(u) = -iB_{kl}^{(\xi)}(u)$.

Якщо значення спектральних компонентів зосереджені в інтервалі $[0, \omega_{kl}]$, то перший і третій інтеграли у виразі (38) дорівнюють нулю, і тоді

$$B_{kl}^{(\eta)}(u) = -\int_{0}^{\omega_{kl}} f_{kl}^{(\xi)}(\omega) e^{i\omega u} d\omega \,.$$

Цей інтеграл, очевидно, можна поширити на весь діапазон частот, тому

$$B_{kl}^{(\eta)}(u) = -\int_{-\infty}^{\infty} f_{kl}^{(\xi)}(\omega) e^{i\omega u} d\omega = -B_{k}^{(\xi)}(u) \,, \quad (41)$$

Перший інтеграл у виразі (39) можна переписати у вигляді:

$$\int_{0}^{\infty} f_{kl}(\omega+\omega_{kl}) e^{-i\omega u} d\omega = [\int_{\omega_{kl}}^{\infty} f_{kl}(\omega) e^{-i\omega u} d\omega] e^{i\omega_{kl} u} \,.$$

Якщо виконується умова (40), то цей інтеграл дорівнює нулю. Тому

$$B_{kl}^{(\xi\eta)}(u) = i\int_{0}^{\infty} f_{kl}^{(\xi)}(\omega) e^{i\omega u} d\omega = -i\int_{-\infty}^{\infty} f_{kl}^{(\xi)}(\omega) e^{i\omega u} d\omega = -iB_{kl}^{(\xi)}(u) \,. \quad (42)$$

З рівності (30) випливає, що

$$B_{kl}^{(\eta\xi)}(u) = -\int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) f_{kl}^{(\eta)}(\omega) e^{i\omega u} d\omega \,.$$

За умови (40) справедливою є рівність (42), а отже $f_{kl}^{(\eta)}(\omega) = -f_{kl}^{(\xi)}(\omega)$. Звідси, а також з рівності (27) маємо

$$B_{kl}^{(\eta\xi)}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) f_{kl}^{(\eta)}(\omega) e^{i\omega u} d\omega = B_{kl}^{(\xi\eta)}(u) \,.$$

Наслідок 2. *Якщо значення спектральних компонентів сигналу* $f_{kl}^{(\xi)}(\omega)$ *зосереджені поза інтервалом* $[0, \omega_{kl}]$, *то ненульові кореляційні компоненти БПНВП сигналу і його перетворення Гільберта є рівними:* $B_{kl}^{(\eta)}(u) = B_{kl}^{(\xi)}(u)$, *а їх взаємокореляційні компоненти відрізняються тільки знаком:* $B_{kl}^{(\eta\xi)}(u) = -B_{kl}^{(\xi\eta)}(u)$.

Якщо $f_{kl}^{(\xi)}(\omega) = 0,\ \forall\, \omega \in [0, \omega_{kl}]$, то формулу (38) можна переписати так:

$$B_{kl}^{(\eta)}(u) = \int_{-\infty}^{0} f_{kl}^{(\xi)}(\omega) e^{i\omega u} d\omega + \int_{0}^{\infty} f_{kl}^{(\xi)}(\omega) e^{i\omega u} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} f_{kl}^{(\xi)}(\omega) e^{i\omega u} d\omega ,$$

а це означає, що $B_{k}^{(\eta)}(u) = B_{k}^{(\xi)}(u)$. З рівностей (27) і (30) маємо

$$B_{kl}^{(\xi\eta)}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) f_{kl}^{(\xi)}(\omega) e^{i\omega u} d\omega ,$$

$$B_{kl}^{(\eta\xi)}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) f_{kl}^{(\eta)}(\omega) e^{i\omega u} d\omega ,$$

і оскільки за цих умов $f_{kl}^{(\eta)}(\omega) = f_{kl}^{(\xi)}(\omega)$, то приходимо до висновку, що $B_{kl}^{(\xi\eta)}(u) = -B_{kl}^{(\xi\eta)}(u)$.

Оскільки в теоремі 2 було доведено, що $B_{00}^{(\eta)}(u) = B_{00}^{(\xi)}(u)$ та $B_{00}^{(\eta\xi)}(u) = -B_{00}^{(\xi\eta)}(u)$, то в цьому випадку $b_{\eta}(t,u) = b_{\xi}(t,u)$ та $b_{\eta\xi}(t,u) = -b_{\xi\eta}(t,u)$.

Висновки. Розроблено теоретичні основи використання перетворення Гільберта для аналізу стохастичної модуляції сигналів з подвійною періодичністю представленими як БПНВП. Показано, що БПНВП і його перетворення Гільберта є взаємозв'язаними біперіодично нестаціонарними процесами, а їх кореляційні компоненти є парами перетворення Гільберта. Отримано формули, що визначають авто- і взаємокореляційні властивості перетворення Гільберта в залежності від спектральних компонент сигналу. Ненульові кореляційні компоненти БПНВП сигналу і його перетворення Гільберта є рівними, а їх взаємокореляційні компоненти відрізняються тільки знаком.

ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Nandi S., Toliyat H.A., Li X. Condition monitoring and fault diagnosis of electrical motors — A review. *IEEE Trans. Energy Convers*. 2005. **20**. P. 719—729. https://doi.org/10.1109/TEC.2005.847955
2. Mehrjou M.R., Marium N., Marhaban M.H., Misron N. Rotor fault condition monitoring techniques for squirrel-cage induction machine — A review. *Mech. Syst. Signal Process.* 2011. **25**. P. 2827—2848. https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2011.05.007
3. Alwodai A., Gu F., Ball A.D. A comparison of different techniques for induction motor rotor fault diagnosis. *J. Phys.: Conf. Ser*. 2012. **364**. 012066. https://doi.org/10.1088/1742-6596/364/1/012066
4. Hassan O.E., Amer M., Abdelsalam A.K., Williams B.W. Induction motor broken rotor bar fault detection techniques based on fault signature analysis — A review. *IET Electr. Power Appl*. 2018. **12**, № 7. P. 895—907. https://doi.org/10.1049/iet-epa.2018.0054
5. Gangsar P., Tiwari R. Signal based condition monitoring techniques for fault detection and diagnosis of induction motors: A state-of-the-art review. *Mech. Syst. Signal Process*. 2020. **144**. 106908. https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2020.106908
6. Gardner W.A. The spectral correlation theory of cyclostationary time-series. *Signal Processing*. 1986. **11**, № 1. P. 13—36. https://doi.org/10.1016/0165-1684(86)90092-7

7. Antoni J., Bonnardot F., Raad A., Badaoui M.El. Cyclostationary modeling of rotating machine vibration signals. *Mech. Syst. Signal Process*. 2004. **18**. P. 1285—1314. https://doi.org/10.1016/S0888-3270(03)00088-8
8. Clough R.W., Penzien J. Dynamics of structures. 3 ed. Berkeley: Computers & Structures, Inc., 1995. 730 p.
9. Engineering dynamics and vibrations. Recent developments: Jia J., Paik J.K. (Eds.). CRC Press Taylor & Francis Group, Boca Raton, London, New York: 2019. 30 p.
10. Akbar S., Vaimann T., Asad B., Kallaste A., Sardar M.U., Kudelina K. State-of-the-art techniques for fault diagnosis in electrical machines: Advancements and Future Directions. *Energies*. 2023. **16**, № 17. 6345. https://doi.org/10.3390/en16176345
11. Shuster A. On lunar and solar periodicities of earthquakes. *Proc. R. Soc*. 1897. **61**. P. 455—465. https://doi.org/10.1098/rspl.1897.0060
12. Mykhailyshyn V.Yu., Javors'kyj I.M., Vasylyna Yu.T., Drabych O.P., Isaev I.Yu. Probabilistic models and statistical methods for the analysis of vibrational signals in the problems of diagnostics of machines and structures. *Mater. Sci*. 1997. **33**. P. 655—672. https://doi.org/10.1007/BF02537594
13. Javorskyj I., Matsko I., Yuzefovych R., Lychak O., Lys R. Methods of hidden periodicity discovering for gearbox fault detection. *Sensors*. 2021. **21**. 6138. https://doi.org/10.3390/s21186138
14. Javorskyj I., Yuzefovych R., Lychak O., Trokhym G., Varyvoda M. Methods of periodically non-stationary random processes for vibrations monitoring of rolling bearing with damaged outer race. *Digit. Signal Process*. 2024. **145**. 104343. https://doi.org/10.1016/j.dsp.2023.104343
15. Javors'kyj I., Yuzefovych R., Kravets I., Matsko I. Methods of periodically correlated random processes and their generalizations. *Cyclostationarity: theory and methods*: Chaari F., Leskow J., Sanches-Ramires A. (Eds.). New York: Springer, 2014. P. 73—93. https://doi.org/10.1007/978-3-319-04187-2_6
16. Javorskyj I., Yuzefovych R., Dzeryn O. Component and the least square estimation of mean and covariance functions of biperiodically correlated random signals. *Nonstationary systems: theory and applications*: Contributions to the 13th Workshop on Nonstationary Systems and Their Applications, February 3-5, 2020, Grodek nad Dunajcem, Poland. Cham: Springer, 2022. P. 145—177. https://doi.org/10.1007/978-3-030-82110-4_8
17. Javorskyj I., Yuzefovych R, Matsko I., Zakrzewski Z., Majewski J. Covariance analysis of periodically correlated random processes for unknow non-stationarity period. *Advances in signal processing: Reviews.* Barcelona: IFSA Publishing, 2018. P. 155—276. https://doi.org/10.1016/j.dsp.2017.02.013
18. Javorskyj I., Dehay D., Kravets I. Component statistical analysis of second order hidden periodicities. *Digit. Signal Process*. 2014. **26**. P. 50—70. https://doi.org/10.1016/j.dsp.2013.12.002
19. Javorskyj I., Yuzefovych R., Matsko I., Zakrzewski Z. The least square estimation of the basic frequency for periodically non-stationary random signals. *Digit. Signal Process*. 2022. **122**. 103333. https://doi.org/10.1016/j.dsp.2021.103333
20. King F.W. Hilbert transforms. Encyclopedia of mathematics and its applications (vol. 124). Cambridge: Cambridge University Press, 2009. https://doi.org/10.1017/CBO9780511721458
21. Feldman M. Hilbert transform applications in mechanical vibration. Chichester: Wiley. 2011. https://doi.org/10.1002/9781119991656
22. Nuttall A.H., Bedrosian E. On the quadrature approximation to the Hilbert transform of modulated signals. *Proc. IEEE*. 1966. **54**, № 10. P. 1458—1459. https://doi.org/10.1109/PROC.1966.5138

Надійшла до редакції 18.11.2025

REFERENCES

1. Nandi, S., Toliyat, H.A. & Li, X. (2005). Condition monitoring and fault diagnosis of electrical motors — A review. IEEE Transa. Energy Conver., 20, pp. 719-729. https://doi.org/10.1109/TEC.2005.847955
2. Mehrjou, M. R., Marium, N., Marhaban, M. H. & Misron, N. (2011). Rotor fault condition monitoring techniques for squirrel-cage induction machine — A review. Mech. Syst. Signal Process., 25, pp. 2827-2848. https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2011.05.007
3. Alwodai, A., Gu, F. & Ball, A. D. (2012). A comparison of different techniques for induction motor rotor fault diagnosis. J. Phys.: Conf. Ser., 364, 012066. https://doi.org/10.1088/1742-6596/364/1/012066
4. Hassan, O. E., Amer, M., Abdelsalam, A. K. & Williams, B. W. (2018). Induction motor broken rotor bar fault detection techniques based on fault signature analysis — A review. IET Electr. Power Appl., 12, No. 7, pp. 895-907. https://doi.org/10.1049/iet-epa.2018.0054

5. Gangsar P. & Tiwari R. (2020). Signal based condition monitoring techniques for fault detection and diagnosis of induction motors: A state-of-the-art review. Mech. Syst. Signal Process., 144, 106908. https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2020.106908
6. Gardner, W.A. (1986). The spectral correlation theory of cyclostationary time-series. Signal Processing, 11, No. 1, pp. 13-36. https://doi.org/10.1016/0165-1684(86)90092-7
7. Antoni, J., Bonnardot, F., Raad, A. & Badaoui, M. El. (2004). Cyclostationary modeling of rotating machine vibration signals. Mech. Syst. Signal Process., 18, pp. 1285-1314. https://doi.org/10.1016/S0888-3270(03)00088-8
8. Clough, R.W. & Penzien, J. (1995). Dynamics of structures. 3 ed. Berkeley: Computers & Structures, Inc.
9. Jia, J. & Paik, J. K. (Eds). (2019). Engineering dynamics and vibrations recent developments. Boca Raton, London, New York: CRC Press Taylor & Francis Group.
10. Akbar, S., Vaimann, T., Asad, B., Kallaste, A., Sardar, M. U. & Kudelina, K. (2023). State-of-the-Art techniques for fault diagnosis in electrical machines: Advancements and Future Directions. Energies, 16, No. 17, 6345. https://doi.org/10.3390/en16176345
11. Shuster, A. (1897). On lunar and solar periodicities of earthquakes. Proc. R. Soc., 61, pp. 455-465. https://doi.org/10.1098/rspl.1897.0060
12. Mykhailyshyn, V. Yu., Javors'kyj, I. M., Vasylyna, Yu. T., Drabych, O. P. & Isaev, I. Yu. (1997). Probabilistic models and statistical methods for the analysis of vibrational signals in the problems of diagnostics of machines and structures. Mater. Sci., 33, pp. 655-672. https://doi.org/10.1007/BF02537594
13. Javorskyj, I., Matsko, I., Yuzefovych, R., Lychak, O. & Lys, R. (2021). Methods of hidden periodicity discovering for gearbox fault detection. Sensors, 21, 6138. https://doi.org/10.3390/s21186138
14. Javorskyj, I., Yuzefovych, R., Lychak, O., Trokhym, G. & Varyvoda, M. (2024). Methods of periodically non-stationary random processes for vibrations monitoring of rolling bearing with damaged outer race. Digit. Signal Process., 145, 104343. https://doi.org/10.1016/j.dsp.2023.104343
15. Javors'kyj, I., Yuzefovych, R., Kravets, I. & Matsko, I. (2014). Methods of periodically correlated random processes and their generalizations. In: Chaari F., Leskow J., Sanches-Ramires A. (Eds.). Cyclostationarity: theory and methods (pp. 73-93). New York: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-04187-2_6
16. Javorskyj, I., Yuzefovych, R. & Dzeryn, O. (2022). Component and the least square estimation of mean and covariance functions of biperiodically correlated random signals. In: Nonstationary systems: theory and applications: Contributions to the 13th Workshop on Nonstationary Systems and Their Applications, February 3-5, 2020, Grodek nad Dunajcem, Poland (pp. 145-177). Cham: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-82110-4_8
17. Javorskyj, I., Yuzefovych, R., Matsko, I., Zakrzewski, Z. & Majewski, J. (2018). Covariance analysis of periodically correlated random processes for unknow non-stationarity period. In: Advances in signal processing: Reviews (pp. 155-276). Barcelona: IFSA Publishing. https://doi.org /10.1016/j.dsp.2017.02.013
18. Javorskyj, I., Dehay, D. & Kravets, I. (2014). Component statistical analysis of second order hidden periodicities. Digit. Signal Process., 26, pp. 50-70. https://doi.org/10.1016/j.dsp.2013.12.002
19. Javorskyj, I., Yuzefovych, R., Matsko, I. & Zakrzewski, Z. (2022). The least square estimation of the basic frequency for periodically non-stationary random signals. Digit. Signal Process., 122, 103333. https://doi.org/10.1016/j.dsp.2021.103333
20. King, F.W. (2009). Hilbert transforms. Encyclopedia of mathematics and its applications (vol. 124). Cambridge: Cambridge University Press. https://doi.org/10.1017/CBO9780511721458
21. Feldman, M. (2011). Hilbert transform applications in mechanical vibration. Chichister: Wiley. https://doi.org/10.1002/9781119991656
22. Nuttall, A. H. & Bedrosian, E. (1966). On the quadrature approximation to the Hilbert Transform of modulated signals. Proc. IEEE, 54, No. 10, pp. 1458-1459. https://doi.org/10.1109/PROC.1966.5138

Received 18.11.2025

I.M. Javorskyj[1], https://orcid.org/0000-0003-0243-6652
R.M. Yuzefovych[1, 2], https://orcid.org/0000-0001-5546-453X
R.I. Pelypets[2], https://orcid.org/0009-0008-9603-6716
O.V. Lychak[1], https://orcid.org/0000-0001-5559-1969

[1] Karpenko Physico-Mechanical Institute of the NAS of Ukraine, Lviv, Ukraine

[2] Lviv Polytechnic National University, Lviv, Ukraine

E-mail: ihor.yavorskyj@gmail.com, roman.yuzefovych@gmail.com, pelypets.ri@gmail.com, olehlychak2003@yahoo.com

HILBERT TRANSFORM FOR ANALYZING STOCHASTIC MODULATION
OF BI-PERIODICALLY NON-STATIONARY RANDOM SIGNAL

Stochastic signals of natural and technological origin often have a clearly expressed rhythmic structure, which manifests itself in first- and second-order statistical characteristics. In the simplest case, such a structure is described by periodically non-stationary random processes (PNRP) with a single base frequency. In practice, there are also frequent cases when several rhythms are simultaneously present in the same signal. That is, the stochastic repeatability of one period interacts with the repeatability of another. A probabilistic model of stochastic variability with double rhythmicity is a bi-periodically non-stationary random process (BPNRP).

It was previously shown that for the analysis of signals with stochastic modulation, in cases where the harmonics of the carrier are characterized by a single fundamental frequency and its multiples, the use of Hilbert transform allows the hidden structure of periodically non-stationary modulating oscillations to be extracted. However, despite the existence of a well-developed PNRP theory and initial results on its demodulation using Hilbert transform for single-carrier signals, the properties of Hilbert transform for BPNRP have not yet been sufficiently studied. The paper discusses in detail the properties of the signal model in the form of BPNRP. It is shown that the correlation structure of BPNRP is determined by stationary correlated random processes that modulate the amplitude and phase of carrier harmonics, whose frequencies are combinations of two fundamental frequencies. An analysis of stochastic modulation using the Hilbert transform is carried out. The characteristic features of the correlation and spectral structure of the Hilbert transform of a signal have been established, which must be taken into account when processing real data.

Keywords: *bi-periodically non-stationary random signal, carrier harmonics, Hilbert transform, stochastic modulation, covariation function.*